Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey
Aux: M.Guajardo, M. Pereira, D.Yung

Clase Auxilliar 14, 27 de Septiembre de 2005

Procesos de Poisson

Problema 1

1. *a*) Sea t_i el instante de la llegada del i-ésimo pasajero antes de la llegada del siguiente tren. Luego la esperanza pedida corresponde a: $E[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - t_i)]$

   Dado que esta esperanza depende de la variable aleatoria $N(t)$ que representa la cantidad de personas que llegan hasta el instante t, se debe condicionar con respecto a esta variable y luego descondicionar. Luego se tiene que:

$$
\begin{aligned}
E[\sum_{i}^{N(t)}(t-t_i)] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-t_i)/N(t)=n]\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[E[\sum_{i=1}^{N(t)} t/N(t)=n] - E[\sum_{i=1}^{N(t)} t_i/N(t)=n]\right]\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} E[t/N(t)=n] - \sum_{i=1}^{N(t)} E[t_i/N(t)=n]\right]\cdot P[N(t)=n]
\end{aligned}
$$

   En la expresión anterior t es una constante por lo que $E[t] = t$. Por otro lado los tiempos t_i se distribuyen uniformes en el intervalo $[0, t]$ cuya esperanza es $E[t_i] = \frac{t}{2}$. Finalmente el término $P[N(t) = n]$ corresponde a la definición de un proceso de Poisson.

$$
E[\sum_{i}^{N(t)}(t-t_i)] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[nt - \frac{nt}{2}\right]\cdot\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{t}{2}\sum_{k=0}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{\lambda t^2}{2}
$$

   b) En la parte 1 se calculó la esperanza pedida dado un tiempo entre trenes conocido igual a t. Dado que los trenes llegan a la estación según un Proceso de Poisson de tasa μ[trenes/hora], el tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial de parámetro μ. Luego descondicionando el resultados de la parte anterior, se tiene que la esperanza pedida es:

$$
\int_0^{\infty} \frac{\lambda t^2}{2}\mu e^{-\mu t} dt
$$

2. Sea $N_{ij}(t)$ el número de autos que vienen de la calle i y toman la calle j, hasta el instante t. Por la propiedad de división de Poisson $N_{ij}(t)$ es también un Proceso de Poisson con tasa $\lambda_i P_{ij}$ y todos los $N_{ij}(t)$ son independientes. Luego, se tiene que:

$$
B_j(t) = \sum_i N_{ij}(t)
$$

Por lo propiedad de composición de Poisson la variable $B_j(t)$ es Proceso de Poisson con tasa $\sum_i \lambda_i P_{ij}$:

$$P[B_j(t) = k] = \frac{(\sum_i \lambda_i P_{ij} t)^k e^{-\sum_i \lambda_i P_{ij} t}}{k!} \qquad E[B_j(t)] = \sum_i \lambda_i P_{ij} t$$

Problema 2

1. (1,0 ptos.) Si el precio en el instante t es P se debe a que ha llegado una persona con una valoración de \$$P$ por el artículo, y otra con una valoracíon superior o igual a \$$P$. Para que el precio no cambie no debe llegar nadie más con una valoración superior a P. Dado que el tiempo restante es $T-t$ [horas], debemos imponer que no llegue ninguno de esos personajes en ese lapso de tiempo. Demás esta decir que el proceso de llegada es un poisson filtrado.

$$P[\text{Se venda a P}] = e^{-\lambda(T-t)(1-P)}$$

2. (1,0 pto.) Para que se venda a quien hizo la oferta no debe llegar nadie con una valoración por el articulo superior a la suya. Su valoración se distribuye como una Uniforme entre P y 1. Entonces:

$$P[\text{Se venda al ofertante actual}] = \frac{1}{1-P}\int_P^1 e^{-\lambda(T-t)(1-x)}dx = \frac{1-e^{-\lambda(T-t)(1-P)}}{(1-P)\cdot\lambda(T-t)}$$

3. (1,5 ptos.) Primero notamos que el precio de venta es el segundo mayor valor dentro de las valoraciones de las personas que llegaron a la subasta. Partamos suponiendo que llegaron n personas a la subasta. La distribución del segundo mayor valor entre n variables aleatorias de distribución F es:

$$x \rightsquigarrow n(n-1)\overline{F}(x)\cdot f(x)\cdot F(x)^{n-2}$$

que en el caso de variables $U[0,1]$ es $n(n-1)x^{n-2}(1-x)$.

La esperanza del pago, condicional a que llegaron n ($n > 0$) personas es entonces:

$$\begin{aligned}
Q_n &= \int_0^1 x\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}(1-x)dx \\
&= \int_0^1 n\cdot(n-1)\cdot(x^{n-1}-x^n)dx \\
&= \int_0^1 n\cdot(n-1)\cdot x^{n-1} - \int_0^1 n\cdot(n-1)\cdot x^n dx \\
&= (n-1) - \frac{n\cdot(n-1)}{n+1} \\
&= \frac{n-1}{n+1}
\end{aligned}$$

Para obtener la respuesta deseada simplemente debemos descondicionar del número de llegadas:

$$
\begin{aligned}
Q &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} \\
&= (1 - e^{-\lambda T}) - \frac{2}{\lambda T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= (1 - e^{-\lambda T}) - \frac{2}{\lambda T} \left[1 - e^{-\lambda T} - e^{-\lambda T} \cdot \lambda T\right] \\
&= (1 + e^{-\lambda T}) - \frac{2}{\lambda T} \left[1 - e^{-\lambda T}\right]
\end{aligned}
$$

4. (1,5 ptos.) Los desarrollos son los mismos de la parte anterior, sólo que ahora consideramos la distribución del máximo de las nn variables uniformes. La distribución del máximo valor entre n variables aleatorias de distribución F es:

   $$x \rightsquigarrow nF(x)^{n-1} \cdot f(x)$$

   que en el caso de variables $U[0,1]$ es nx^{n-1}.

   La esperanza de la máxima disposición a pagar, condicional a que llegaron n ($n > 0$) personas es entonces:

   $$
   \begin{aligned}
   Q_n &= \int_0^1 x \cdot n \cdot x^{n-1} dx \\
   &= \frac{n}{n+1}
   \end{aligned}
   $$

   Para obtener la respuesta deseada simplemente debemos descondicionar del número de llegadas:

   $$
   \begin{aligned}
   Q &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} \\
   &= 1 - \left[\frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T}\right]
   \end{aligned}
   $$

   Ahora simplemente hacemos la diferencia:

   $$\text{Ahorro} = \left[\frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T}\right] - e^{-\lambda T}$$

Problema 3

1. Llamemos $N(t)$ al proceso de llegada de ambulancias, con $t = 0$ las 8:00 y al tiempo lo medimos en horas. Lo que debemos calcular es $P(N(14) - N(10) = k)$. Hay (al menos) dos maneras de hacer esto de acuerdo a lo estudiado en el curso.

Primera solución

Aplicamos la propiedad que nos dice que los incrementos de un proceso de Poisson no homogéneo se distribuyen como una variable aletoria Poisson con el parámetro apropiado.

Específicamente, si llamamos $\lambda(t)$ a la función de intensidad del proceso $N(t)$, la variable aleatoria $N(14) - N(10)$ tiene distribución Poisson de parámetro

$$\Lambda = \int_{10}^{14} \lambda(s)ds = 14 \,.$$

Por lo tanto,

$$P(N(14) - N(10) = k) = \frac{e^{-14}14^k}{k!} \,.$$

Segunda solución

Otra alternativa es considerar que el proceso de llegada es homogéneo entre las 18:00 y las 20:00 y entre las 20:00 y las 22:00. Con esta idea, dividimos el cálculo en dos intervalos independientes (son disjuntos y el proceso es de Poisson) y condicionamos en el número de llegadas en el primer intervalo:

$$\begin{aligned}
P(N(14) - N(10) = k) &= \sum_{l=0}^{k} P(N(14) - N(12) = k - l | N(12) - N(10) = l) P(N(12) - N(10) = l) \\
&= \sum_{l=0}^{k} P(N(14) - N(12) = k - l) P(N(12) - N(10) = l) \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{e^{-8}8^{k-l}}{(k-l)!} \frac{e^{-6}6^l}{l!} \\
&= \frac{e^{-14}}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} 8^{k-l}6^l \\
&= \frac{e^{-14}}{k!} (8+6)^k \\
&= \frac{e^{-14}14^k}{k!}
\end{aligned}$$

2. Debemos calcular la probabilidad

$$\begin{aligned}
P(\text{ 1 llegada en h. diurno } | \text{hubo 1 llegada }) &= \frac{P(\text{“hubo 1 llegada” y “llegada en h. diurno”})}{P(\text{“hubo 1 llegada”})} \\
&= \frac{P(\text{“1 llegada en h. diurno” y “sin llegadas en h. nocturno”})}{P(\text{“hubo 1 llegada”})} \\
&= \frac{P(N(12) = 1 \text{ y } N(24) - N(12) = 0)}{P(N(24) = 1)} \\
&= \frac{36\, e^{-36} \cdot e^{-48}}{84\, e^{-84}} \\
&= \frac{3}{7} \,.
\end{aligned}$$