Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey
Aux: M.Guajardo, D.Yung

Solución Clase Auxilliar 2, 27 de Julio de 2005

Repaso Probabilidades

Problema 1

1. Sea t_a el tiempo que trancurre hasta que el primer cliente se va del banco. De acuerdo a esto, tenemos que: $t_a = min\{t_1, t_2\}$ donde t_1 y t_2 son los tiempos de atención en la primera y segunda caja respectivamente. Entonces, dado que la distribución del minimo entre dos exponenciales es una exponencial de la suma de las tasas, se tiene que $t_a \rightsquigarrow EXP(\mu + \lambda)$.

2. Esto es que el equipo A haga exactamente 3 goles y el equipo B haga exactamente 4 goles.Ahora, dado que los goles hechos por un equipo son independientes de los goles que hace el otro equipo, se tiene que:

$$P[\text{Serie termina 4-3}] = P[\text{B hace 4 goles}] \cdot P[\text{A hace 3 goles}] = 54q^4(1-q) \cdot 53p^3(1-p)^2$$

3. Para que se suban exactamente k personas ,dada la perdida de memoria de la exponencial, tiene que suceder que la exponencial de μ le debe ganar a la exponencial de λ en k ocasiones y luego perder. La probabilidad asociado a esto es:

$$P[\text{Suben exactamente k personas}] = (\frac{\mu}{\mu+\lambda})^k \cdot \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

4. Definamos las siguientes variables:
H= estudiante es hombre.
M= estudiante es mujer.
I= estudiante está invicto.
NI= estudiante no está invicto.

Luego la probabilidad pedida es : $P(H|NI) = \frac{P(NI|H)P(H)}{P(NI)}$

Reconociendo términos, se tiene que:

$P(NI|H) = t$
$P(H) = p$
$P(NI) = P(NI|H)P(H) + P(NI|M)P(M) = t \cdot p + r \cdot (1-p)$

Finalmente :

$P(H|NI) = \frac{t \cdot p}{t \cdot p + r \cdot (1-p)}$

Problema 2, CTP 1 Primavera 2002

1. Para lograr dar k sin chocar es necesario que cada una de esas vueltas no resulten en un choque. Dado que la probabilidad de no chocar en una vuelta x es independiente de todo lo demás, se

tendrá que:

$$P[\text{Dar más de k vueltas}] = (1-q)^k$$

De esta forma, la probabilidad de terminar la carrera será:

$$P[\text{Dar V vueltas sin chocar}] = (1-q)^V$$

2. Sin considerar a Feliceo, la probabilidad que (M-1) pilotos terminen la carrera, será:

$$P[\text{Terminen (M-1) de (C-1)}] = C-1M-1((1-q_1)^V)^{M-1}(1-(1-q_1)^V)^{C-M}$$

3. Utilizando un resultado conocido:

$$P[\text{Gane Feliceo }|\text{M}] = P[Exp(\mu)\text{le gane a minimo de M-1}Exp[\lambda]] = \frac{\mu}{\mu+(M-1)\lambda}$$

4. Siguiendo la indicación del enunciado:

$$\begin{aligned}
P[\text{Feliceo gane}] &= P[\text{Gane Feliceo}|\text{llega}]P[\text{llega}] + P[\text{Gane Feliceo}|\text{No lLega}]P[\text{No llega}] \\
&= P[\text{Gane Feliceo }|\text{llega}](1-q_2)^V + 0 \\
&= (1-q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^{C} P[\text{Gane Feliceo}|\text{llega}|\text{llegan otros M - 1}]P[\text{llegan otros M - 1}] \\
&= (1-q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^{C} \frac{\mu}{\mu+(M-1)\lambda} C-1M-1((1-q_1)^V)^{M-1}(1-(1-q_1)^V)^{C-M}
\end{aligned}$$

5. Notemos que:

$$\begin{aligned}
E[\text{Utilidades}] &= E[\text{U(Ganar)}] + E[\text{U(Terminar)}] - E[\text{U(Chocar)}] \\
&= W \cdot (1-q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^{C} \frac{\mu}{\mu+(M-1)\lambda} C-1M-1((1-q_1)^V)^{M-1}(1-(1-q_1)^V)^{C-M} \\
&\quad + T \cdot (1-q_2)^V - R \cdot (1-(1-q_2)^V)
\end{aligned}$$

Problema 3, Control 1 Otoño 2001

Para determinar x^*, el momento óptimo para citar al segundo paciente, seguiremos los pasos dados enumerados en el enunciado del problema.

1. Primero debemos calcular la probabilidad que, dado un x, el segundo paciente encuentre al dentista ocupado. Esto es equivalente a la probabilidad que la atención del paciente se demore más de x (x$\geq$ 0) unidades de tiempo. Es decir:

$$P_x[\text{Encontrar al dentista ocupado}] = \int_x^b \frac{\partial t}{(b-a)} = \frac{b-x}{(b-a)}$$

Vemos que no tiene sentido que $x > b$ dado que implica que con certeza el dentista estará libre. Tampoco tiene sentido un $x < a$ dado que con certeza el dentista estará ocupado.

2. Primero separemos los casos:

   - Si encuentra al dentista ocupado la esperanza del tiempo restante de espera será:

$$E_x[\text{tiempo de espera}|\text{dentista ocupado}] = \int_x^b \frac{(t-x)\partial t}{(b-x)} = \frac{b-x}{2}$$

   - Si encuentra al dentista desocupado la esperanza del tiempo restante de espera será:

$$E_x[\text{tiempo de espera}|\text{dentista desocupado}] = 0$$

   Entonces, combinando los dos resultados anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned} E_x[\text{tiempo de espera}] &= E_x[\text{tiempo de espera}|\text{dentista desocupado}] \cdot P_x[\text{dentista desocupado}] \\ &\quad + E_x[\text{tiempo de espera}|\text{dentista ocupado}] \cdot P_x[\text{dentista ocupado}] \\ E_x[\text{tiempo de espera}] &= \frac{b-x}{b-a} \cdot \frac{b-x}{2} = \frac{(b-x)^2}{2 \cdot (b-a)} \end{aligned}$$

3. Claramente el dentista estará en el consultorio hasta que termine la atención del segundo paciente:

$$\begin{aligned} E_x[\text{Tiempo del dentista en consulta}] &= x + E_x[\text{tiempo de espera}] + E_[\text{tiempo de atención}] \\ &= x + \frac{(b-x)^2}{2 \cdot (b-a)} + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

4. Entonces el problema de minimización a enfrentar será el siguiente:

$$\min_{0 \leq x \leq b} M \cdot [x + \frac{(b-x)^2}{2 \cdot (b-a)} + \frac{a+b}{2}] + P \cdot [\frac{(b-x)^2}{2 \cdot (b-a)}]$$

   Si derivamos e igualamos a 0 tenemos que:

$$x^* = b - \frac{M \cdot (b-a)}{M+P}$$

Dudas y/o errores:
Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl