Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

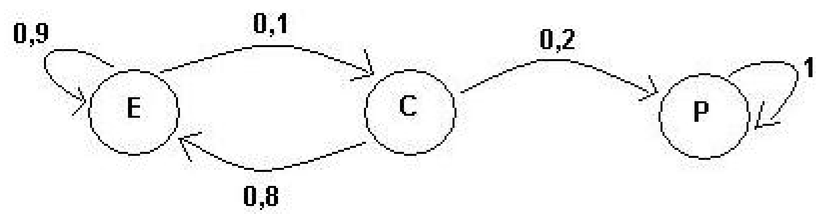
IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey
Aux: M.Guajardo, M. Pereira, D.Yung

Clase Auxilliar 18, 18 de Octubre de 2005

Cadenas de Markov con beneficios

Problema 1, CTP 3 Otoño 2004

1. Comenzamos por formar la cadena y especificar las probabilidades de transición.



En donde hemos definido la siguiente notación para los estados:

- **E:** Se presenta a las elecciones.
- **C:** Reflexiona un año en la casa de retiro.
- **P:** Descansa definitivamente en la parcela.

De acuerdo a los valores denotados en el enunciado, definimos la siguiente estructura de costos:

$$r_E = 1000 \quad , \quad r_C = 200 \quad , \quad r_P = 0$$
$$r_{EC} = r_{CE} = 100 \quad , \quad r_{CP} = 400 \quad , \quad r_{EE} = r_{PP} = 0$$

De esta forma:
$\widehat{r}_E = r_E + r_{EC} \cdot P_{EC} = 1000 + 100 \cdot 0,1 = 1010$
$\widehat{r}_C = r_C + r_{CE} \cdot P_{CE} + r_{CP} \cdot P_{CP} = 200 + 100 \cdot 0,8 + 400 \cdot 0,2 = 360$
$\widehat{r}_P = 0$
Notar que como sólo los estados transientes tienen valores no negativos en el vector de costos anterior, se tendrá que $g = 0$ (en el estado estacionario la probabilidad asociada a estar en esos estados es cero, mientras que para el estado recurrente el costo asociado es cero).
Entonces se satisface la siguiente ecuación:

$$\overrightarrow{W} + \overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 1010 \\ 360 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{W}$$

Imponiendo que $W_P = 0$ se tiene que:

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} 52300 \\ 42200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, el beneficio acumulado esperado cuando quedan n etapas estará dado por:

$$\overrightarrow{V}_n = (n) \cdot 0 \cdot \overrightarrow{e} + \begin{pmatrix} 52300 \\ 42200 \\ 0 \end{pmatrix} + P^n \Big[\begin{pmatrix} 1000 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 52300 \\ 42200 \\ 0 \end{pmatrix} \Big]$$

En particular, se nos pide calcular el costo acumulado que se espera para los próximos 3 años, asumiendo que acaba de inscribirse para una elección. Por lo tanto, debemos reemplazar $n = 3$ en la ecuación anterior:

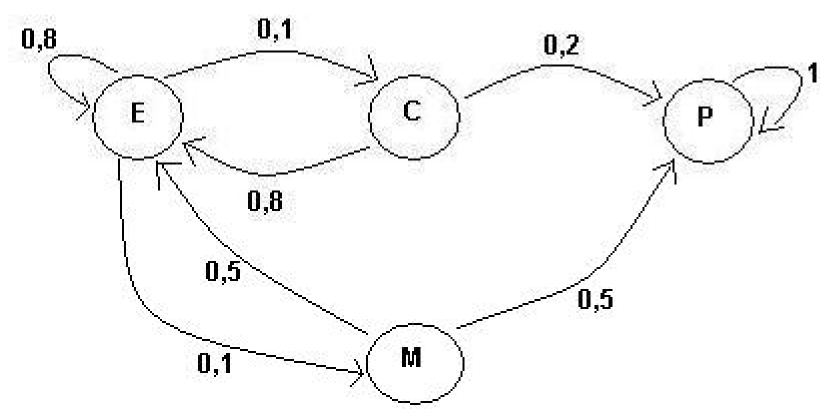
$$\overrightarrow{V}_3 = \begin{pmatrix} 52300 \\ 42200 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}873 & 0{,}089 & 0{,}038 \\ 0{,}712 & 0{,}072 & 0{,}216 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \Big[\begin{pmatrix} 1000 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 52300 \\ 42200 \\ 0 \end{pmatrix} \Big]$$

De lo que se obtiene:

$$\overrightarrow{V}_3 = \begin{pmatrix} 3777{,}1 \\ 2650{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como parte en el estado de elecciones, escogemos la primera componente del vector anterior y se obtiene que el costo acumulado esperado para los próximos 3 años es igual a 3777,1

2. Ahora la cadena asociada al problema es la siguiente (Denotamos por **M** al estado en que dedica un año a la música):



Debemos calcular el número de años esperado que *Fernet* estará en el régimen transiente. Para ello, definimos la siguiente estructura de costos:

$$r_E = r_C = r_M = 1 \qquad r_P = 0 \qquad y \quad r_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Imponiendo que la componente recurrente $W_P = 0$, el vector $\overrightarrow{W}$ en sus componentes asociadas a los estados transientes debe cumplir con:

$$\overrightarrow{W}_{Transientes} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{W}_{Transientes}$$

Resolviendo, se llega a que:

$$\overrightarrow{W}_{Transientes} = \begin{pmatrix} 17{,}14 \\ 14{,}71 \\ 9{,}57 \end{pmatrix}$$

La primera componente nos da la respuesta: Si acaba de lanzar su candidatura en una elección, se espera que transcurran 17,14 años para que se retire definitivamente a la parcela.

3. Si *Fernet* acaba de ingresar a la casa de retiro, entonces el número de años esperado hasta que se retire definitivamente a la parcela corresponde a la segunda componente del vector anterior y, por lo tanto, equivale a 14,71 años. Análogamente, si parte en el estado que se dedica a la música la tercera componente nos dice que se demorará en términos esperados un total de 9,57 años.

   Ambos valores son menores que el resultado obtenido en la parte anterior, lo que intuitivamente se explica notando que desde el estado $\boldsymbol{E}$ al menos debe pasar una etapa más por el transiente antes de llegar al recurrente. En cambio, si parte en los estados $\boldsymbol{C}$ o $\boldsymbol{M}$ puede ocurrir que ingrese directamente al estado recurrente en la primera transición.

Problema 2, Control 2 primavera 2003

1. En la cadena se tiene que los estados A y B forman una clase transiente y los estados C y T una clase recurrente aperiódica. Si la cadena inicialmente se encuentra en el estado A y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal*, podemos descomponer esta esperanza como la suma de los siguientes 2 términos:

   - El número esperado de transiciones hasta llegar al estado C, partiendo de A, lo que corresponde a W_A si utilizamos la estructura de contador de permanencia en el transiente.
   - El número esperado de transiciones hasta llegar por primera vez al estado T, partiendo de C. Sea esta esperanza $E_{C,T}$.

   Si denotamos a la esperanza pedida como E_A, se tiene que:

$$E_A = W_A + E_{C,T}$$

   Para calcular W_A, utilizamos la siguiente estructura de costos de contador de permanencia en el transiente:

$$\widehat{r}_A = 1 \qquad \widehat{r}_B = 1 \qquad \widehat{r}_C = 0 \qquad \widehat{r}_T = 0$$

   En esta caso $g = 0$, ya que los estados transientes que tienen costos distintos de cero tienen probabilidades estacionarias nulas, por lo que debemos resolver el sistema:

$$[I-P]\overrightarrow{W} = \widehat{r} \qquad W_C = 0 \qquad W_T = 0$$[1]

   Reemplazando con los valores de la cadena:

$$\begin{pmatrix} q & -q & 0 & 0 \\ -r & r+s & -s & 0 \\ 0 & 0 & u & -u \\ 0 & 0 & t-1 & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \\ W_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Dado que $W_C = W_T = 0$, del sistema matricial anterior se obtiene el siguiente sistema de 2X2.

[1] Corresponde a los estados recurrentes

$$qW_A - qW_B = 1 \qquad -rW_A + (r+s)W_B = 1$$

Donde se obtiene que:

$$W_A = \frac{r+s+q}{q \cdot s}$$

Para calcular el término de $E_{C,T}$ se tiene que:

$$E_{C,T} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-u)^{k-1} \cdot u$$

Reordenando y usando la serie $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}$ entregada en el enunciado, se tiene que:

$$E_{C,T} = \frac{u}{1-u} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-u)^k = \frac{u}{1-u} \cdot \frac{1-u}{u^2} = \frac{1}{u}$$

Este resultado también se puede obtener directamente observando que la variable aleatoria a la cual le calculamos la esperanza es una geome'trica, cuya valor se entrega en el enunciado.

Finalmente:

$$E_A = \frac{r+s+q}{q \cdot s} + \frac{1}{u}$$

2. Si inicialmente se encuentra en el estado X y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar por primera vez alguno de los nodos terminales (E_{X,T_1,T_2}), podemos separar esta esperanza en 3 partes:

   - Esperanza del número de transiciones hasta salir del estado X. Este valor (E_x) se calcula de la misma forma que el segundo término de la parte 1, a través de la esperanza de la geométrica. Esto es: $E_X = \frac{1}{n+m}$.
   - Si la cadena al salir de X evoluciona a la sub-cadena 1 (con probabilidad $\frac{n}{n+m}$), inicialmente se encuentra en el estado A_1 y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal* T_1, lo que calculamos en la parte 1, para el caso general.
   - Si la cadena al salir de X evoluciona a la sub-cadena 2 (con probabilidad $\frac{m}{n+m}$), inicialmente se encuentra en el estado A_2 y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal* T_2, lo que calculamos en la parte 1, para el caso general.

$$E_{X,T_1,T_2} = \frac{1}{n+m} + \left[\frac{r_1+s_1+q_1}{q_1 \cdot s_1} + \frac{1}{u_1}\right] \cdot \frac{n}{n+m} + \left[\frac{r_2+s_2+q_2}{q_2 \cdot s_2} + \frac{1}{u_2}\right] \cdot \frac{m}{n+m}$$

Dudas y/o errores:

Mario Guajardo mguajard@ing.uchile.cl

Marianela Pereira mapereir@ing.uchile.cl

Daniel Yung dyung@ing.uchile.cl