Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey
Aux: M.Guajardo, M. Pereira, D.Yung

Solución Clase Auxilliar 8, 24 de Agosto de 2005

Programación Dinámica Estocástica

Problema 1

1. Basta con calcular la esperanza de las utilidades recibidas en k, teniendo en cuenta que b_k es una v.a.:

$$E(Ut_k) = \int_0^\infty \sqrt{a_k + y \cdot G} \cdot f_{b_k}(y)dy$$

2. - **Etapas**:

     Cada una de las semanas del horizonte de evaluación, k=0,...,T

   - **Variable de Estado**:

     S_k = Cantidad de dinero disponible al comienzo de la semana k.

   - **Variable de Decisión**:

     x_k = Cantidad de dinero a gastar en semana k.

   - **Variable Aleatoria**:

     b_k = Variable que modela el hecho de no saber todas las actividades a realizar en la semana.

   - **Recurrencia**:

$$S_{k+1} = S_k - x_k$$

   - **Función de Beneficio**:

$$E_{b_k}[V_k(S_k, x_k)] = \int_0^\infty \sqrt{(a_k + y) \cdot x_k} \cdot f_{b_k}(y)dy + V_{k+1}^*(S_k - x_k)$$

     Donde:

$$V_k^*(S_k) = \max_{0 \leq x_k \leq S_k} \{E_{b_k}[V_k(S_k, x_k)]\}$$

   - **Condiciones de Borde**:

$$V_{T+1}(S_{T+1}) = 0$$
$$S_0 = M$$

Problema 2

1. Está es la clásica pregunta de programación dinámica. La respuesta va por el lado de justificar la existencia de decisiones intertemporales, la existencia de variables de estado que resumen la historia hasta un determinado momento y que la decisión en un período solo depende de ellas y no de la historia, etc.

2. Siguiendo los pasos metodológicos tendremos que:

   - Etapas: Cada una de las T semanas (supondremos que el show final se realiza en una semana ficticia $T+1$).

   - Variables de Estado:

   $$R_t = \text{Número de semanas con rutinas repetidas consecutivamente}$$
   $$N_t = \text{Número ocasiones en las cuales se repiten rutinas en la temporada}$$

   - Variable de Decisión:

   $$X_t = \begin{cases} 1 & \text{Si creo una nueva rutina} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

   - Variable aleatoria: P_n donde n es el número de semanas consecutivas con repeticiones.
   - Recurrencias: Comencemos con el show final (en la semana ficticia $T+1$):

   $$V^*_{T+1}(R_{T+1}, N_{T+1}) = q_{N_{T+1}} \cdot m \cdot C(T+1)$$

   Para una semana t (supuesto que $p_0 = 0$):

   $$V^*_t(R_t, N_t, X_t) = \begin{cases} C(t) + V^*_{t+1}(0, N_t) & \text{Si} \quad X_t = 1 \\ p_{R_t+1} \cdot D(R_t+1) + V^*_{t+1}(R_t+1, N_t+1) & \sim \end{cases} \qquad \forall 0 < t < T+1$$

   - Condiciones de borde:

   $R_1 = N_1 = 0$

Problema 3

- **Etapas:** cada una de las semanas del horizonte de evaluación, $t = 1, .., T$

- **Variable de Decisión:**

  P_t = Precio a fijar en semana t.

- **Variables de Estado:**

  S_t = Stock al inicio de semana t.
  A_t = Demanda insatisfecha acumulada al inicio de la semana t.
  SP_t = Precio fijado en la semana anterior (t-1).

- **Variable Aleatoria:**

  D_t = Demanda en semana t.

  $$M_t = \begin{cases} 1 & \text{si multa en t} \;, dado\ P_{t-1} = P^a \\ 0 & \qquad\qquad\quad \sim \end{cases}$$

- **Recurrencias:**

$$S_{t+1} = S_t - (1 - M_t) \cdot D_t$$

$$A_{t+1} = A_t + M_t \cdot D_t$$

$$SP_{t+1} = P_t$$

- **Función de Beneficio:**

  En primer lugar, definimos la siguiente notación:

$$P(D(j,k)) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} q^k (1-q)^{j-k} \cdot D_j(SP_t)$$

- Etapa T+1:

$$V^*_{T+1}(S_{T+1}, A_{T+1}, SP_{T+1}) = V \cdot S_{T+1} - \ K \cdot A_{T+1}$$

- Etapa t genérica:

$$V_t(S_t, A_t, SP_t, P_t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} P(D(j,k)) \cdot [P_t \cdot (j-k) + 0{,}9 P_t \cdot k + V^*_{t+1}(S_t - j, A_t, P_t)] \text{ ,si } SP_t \in [P^m, P^b] \\ \\ (1 - P_{multa}) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} P(D(j,k)) \cdot [P_t \cdot (j-k) + 0{,}9 P_t \cdot k + V^*_{t+1}(S_t - j, A_t, P_t)] \\ + P_{multa} \cdot \{ -M + \sum_{j=0}^{\infty} D_j(SP_t)[-j \cdot C + V^*_{t+1}(S_t, A_t + j, P_t)]\} \text{ ,si } \mathrm{SP}_t = P^a \end{cases}$$

Donde:

$$V^*_t(S_t, A_t, SP_t) = \max_{P_t \in [P^a, P^m, P^b]} \{V_t(S_t, A_t, SP_t, P_t)\}$$

Así, el beneficio esperado óptimo se obtiene con:

$$V^* = V^*_1(S_1, A_1, SP_1)$$

- **Condiciones de Borde:**

$$S_1 = S$$
$$A_1 = 0$$
$$SP_1 = P^b$$

Dudas y/o errores:
Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl