



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey
Aux: M. Guajardo, M. Pereira, D. Yung

Clase Auxilliary 23, 15 de Noviembre de 2005

Redes de colas

Problema 1, CTP 5 Otoño 2005

Un laboratorio farmacéutico que fabrica medicamentos para combatir resfríos invernales trabaja según un proceso que intentaremos modelar de acuerdo a teoría de colas.

Los medicamentos son ingresados al laboratorio según un proceso de Poisson de tasa λ [medicamentos/hora]. A la entrada se ubican en una única cola para ser codificados. Se cuenta con 2 máquinas codificadoras que realizan esta tarea en un tiempo distribuido exponencialmente de media $\frac{1}{\mu_1}$ [hora].

Una vez que los medicamentos han sido codificados se enfrentan a un primer control de calidad que revisa que las dosis de químicos en cada medicamento sean las correctas. En este control se cuenta con 2 estudiantes en práctica que pueden hacer la revisión de dosis, demorando en esta tarea un tiempo distribuido exponencialmente de media $\frac{1}{\mu_2}$ [hora]. Suponga que una fracción p de los medicamentos ingresados al laboratorio realmente presentan dosis erróneas. Independiente de todo lo demás, los estudiantes logran detectar a uno de estos medicamentos alterados con probabilidad r , enviándolo inmediatamente al *Departamento de Dosis*.

Todo medicamento que es enviado al *Departamento de Dosis*, será sometido a un tratamiento químico realizado por el único especialista en dosis del laboratorio, que durante un tiempo distribuido exponencialmente de media $\frac{1}{\mu_3}$ [hora] logra corregir totalmente la composición de los medicamentos alterados. Luego de este tratamiento, los medicamentos están listos para la venta por lo que son enviados directamente a la *Sala de Despacho*.

Por otro lado, todos los medicamentos que pasan el primer control de calidad, deben pasar a un control de confirmación, en que un profesional experto en química de fármacos demora un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro μ_4 [1/hora] en realizar el chequeo. Del total de medicamentos que revisa, este experto envía una fracción q_1 al *Departamento de Dosis*, mientras que a una fracción q_2 del total, dado que no tiene mucha seguridad acerca de su composición, la ubica de nuevo en la cola de este control de confirmación. El resto de los medicamentos revisados por el experto son aprobados y quedan listos para la venta, por lo que son enviados directamente a la *Sala de Despacho*.

Por último, suponga que la *Sala de Despacho* tiene capacidad ilimitada y que cada medicamento permanecerá en ella durante un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro μ_5 [1/hora] (luego del cual es finalmente despachado).

1. (1.5 pts) Modele la situación anteriormente descrita como una red de colas, indicando el modelo que ocupará para cada sistema y los parámetros asociados. Calcule las tasas efectivas de entrada a cada sistema.
2. (0.5 pts) Escriba las condiciones para que exista estado estacionario.
3. (1.2 pts) Asuma conocidas las fórmulas para los **tiempos** esperados de permanencia en los sistemas clásicos vistos en el curso. Sin usar la fórmula de Little (**no puede** ocupar las fórmulas del **número de personas** promedio en esos sistemas), calcule el tiempo promedio que un medicamento pasa en todo el sistema en estado estacionario.
4. (1.0 pts) Sea $k = p \cdot r$. En función de los parámetros del problema, encuentre una condición para k tal que, en promedio, la fracción de medicamentos que pasan por el *Departamento de Dosis* sea menor que el 50% del total de medicamentos ingresados al laboratorio.

5. (0.8 pts) Suponga que el propietario del laboratorio incurre en un costo de \$I por cada medicamento ingresado, que el experto del Departamento de Dosis cobra un sueldo de \$S por unidad de tiempo, que cada estudiante en el primer control de calidad significa un costo de \$E por unidad de tiempo. El profesional del control de confirmación significa un costo de \$P por unidad de tiempo sólo si está ocupado. Además, todo medicamento que es derivado al Departamento de Dosis significa un costo de \$R (por concepto de compuestos requeridos para su corrección). ¿Cuál es el mínimo valor a cobrar por medicamento listo para la venta para que en promedio el propietario autofinancie la operación del laboratorio? (suponga que todos los parámetros en el enunciado del problema están basados en una misma unidad de tiempo).

En lo que sigue, nos centraremos en una instancia de ocurrencias en el *Departamento de Dosis*:

i	Instante de entrada	Instante de salida
1	t_1	t_3
2	t_2	t_6
3	t_4	t_7
4	t_5	t_8
5	t_9	t_{10}

La tabla anterior indica los instantes de llegada y salida de cada medicamento. Por ejemplo, t_2 es el tiempo al que llega el segundo medicamento al departamento y t_6 el tiempo al que sale.

Suponga que $t_1 > 0$, $t_i < t_{i+1} \forall i \in \{1, \dots, 9\}$ y que el intervalo de tiempo $[0, t_{10}]$ y las 5 llegadas registradas son suficientes como para describir el comportamiento promedio del sistema.

Se pide lo siguiente:

6. (0.2 pts) Grafique el número de medicamentos en el Departamento de Dosis v/s tiempo a partir de los datos proporcionados en la tabla.
7. (0.8 pts) Mediante algunos cálculos y una aproximación apropiada, muestre que la fórmula de Little es satisfecha por la instancia dada.

Problema 2, Examen Otoño 2005

Una empresa metalúrgica fabrica piezas para equipos de precisión y debido a lo exigente que es ese mercado cuenta con una división de certificación que cuida de la calidad de las piezas que son puestas a la venta. A continuación se describe el funcionamiento de esta división.

Las piezas producidas en la planta de la empresa, llegan al sector de certificación de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [piezas/hora].

El proceso de certificación comienza con un “técnico” que genera el primer reporte sobre la pieza y la clasifica preliminarmente como “tipo A” (de mayor calidad) o “tipo B”. El técnico demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_T$ [horas] en procesar cada pieza que recibe. Las piezas clasificadas como “tipo A” constituyen una fracción s del total de piezas procesadas. Las piezas clasificadas preliminarmente pasan a una segunda etapa en que son revisadas con mayor detalle y etiquetadas.

Las piezas clasificadas como “tipo B” son revisadas por un especialista que sólo procesa estas piezas. Como resultado de esta revisión una fracción r de las piezas procesadas en este paso son eliminadas por fallas graves. El resto es etiquetado y pasa a la última etapa de certificación. Este especialista demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_B$ [horas] para procesar cada pieza que recibe.

Las piezas clasificadas como “tipo A” son sometidas a un test de calidad y etiquetadas por uno de los *dos* especialistas disponibles. Como resultado del test se detecta que una fracción p de las piezas inicialmente

clasificadas como “tipo A” no cumplen con las exigencias de calidad y en realidad son de “tipo B”. Estas piezas son enviadas al especialista que procesa las piezas de “tipo B”. Las piezas restantes (las que superan el test) son etiquetadas y enviadas a la última etapa de certificación. Los especialistas que trabajan con piezas “tipo A” demoran un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_A$ [horas] en procesar cada pieza que llega a este sector.

En la última etapa de certificación, un ingeniero revisa los reportes del proceso que siguió cada pieza. Este ingeniero revisa tanto las piezas de “tipo A” como las de “tipo B”. Si el proceso fue realizado correctamente, autoriza su despacho. En caso que detecte alguna falla de procedimiento, devuelve la pieza al primer paso (clasificación preliminar). Esto último sucede con una fracción q de las piezas que recibe. Procesar cada pieza le lleva al ingeniero un tiempo distribuido exponencialmente con media $1/\mu_I$ [horas].

1. (2,0 ptos.) Modele el sistema descrito como una red de colas, indicando a qué tipo de sistema de espera (notación de Kendall) corresponde cada uno de los subsistemas descritos. Determine las tasas efectivas para cada subsistema y las condiciones para que exista estado estacionario. Justifique su respuesta.

Considere que el sistema cumple con las condiciones para régimen estacionario y suponga que está funcionando hace mucho tiempo.

2. (1,0 pto.) ¿Cuántas piezas hay en promedio en cada sector de la división?
3. (1,0 pto.) ¿Cuánto tiempo pasa, en promedio, una pieza en el sistema?

Considere que el jefe de la división de certificación cuenta con recursos para contratar a una persona más para trabajar en la división. Suponga que la persona que se contrataría tiene características similares a las que actualmente trabajan en el puesto para el que sería contratada¹. Suponga que el sistema actualmente cumple con las condiciones para régimen estacionario.

4. (1,5 pto.) Indique cómo decidiría en qué sector de la división sería más conveniente contratarlo, si el objetivo fuera equilibrar las cargas de trabajo. Es decir, lo que se pretende es que el tiempo que pasan desocupados, en promedio, cada uno de los empleados sea lo más parecido posible.
5. (0,5 ptos.) Si el objetivo fuera aumentar el número de piezas procesadas por hora ¿afecta en algo la contratación de un nuevo empleado? ¿por qué?

¹Por ejemplo, si se contrata a un ingeniero, este demorará para procesar cada pieza un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_I$ [horas].