

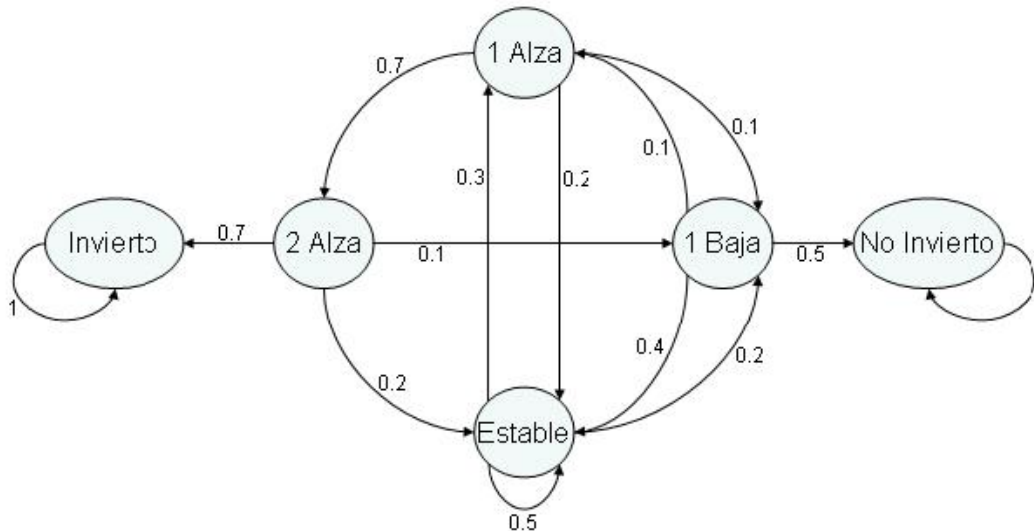


Clase Auxilliary 15, 28 de Septiembre de 2005

Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

Problema 1

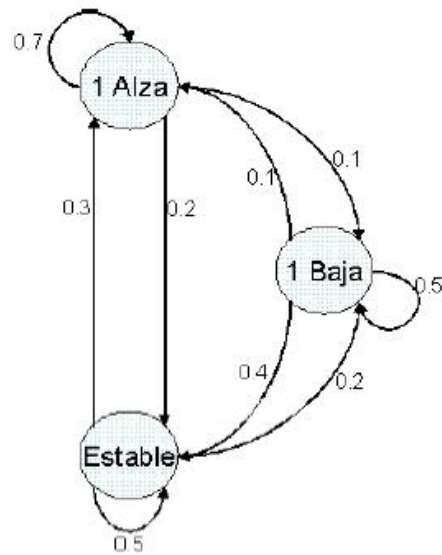
- Podemos formular el problema de inversión como una cadena de Markov debido a que la probabilidad de evolución entre estados del mercado (en alza, estable o en baja) depende solamente del estado actual. Con un pequeño truco seremos capaces de adaptar una cadena que indique cuando invertir. La cadena es la siguiente:



Vemos que existen 3 clases, 2 recurrentes y una transiente. Los estados invierto y no invierto conforman clases recurrentes aperiódicas por sí mismos, mientras que el resto de los estados conforman una clase transiente.

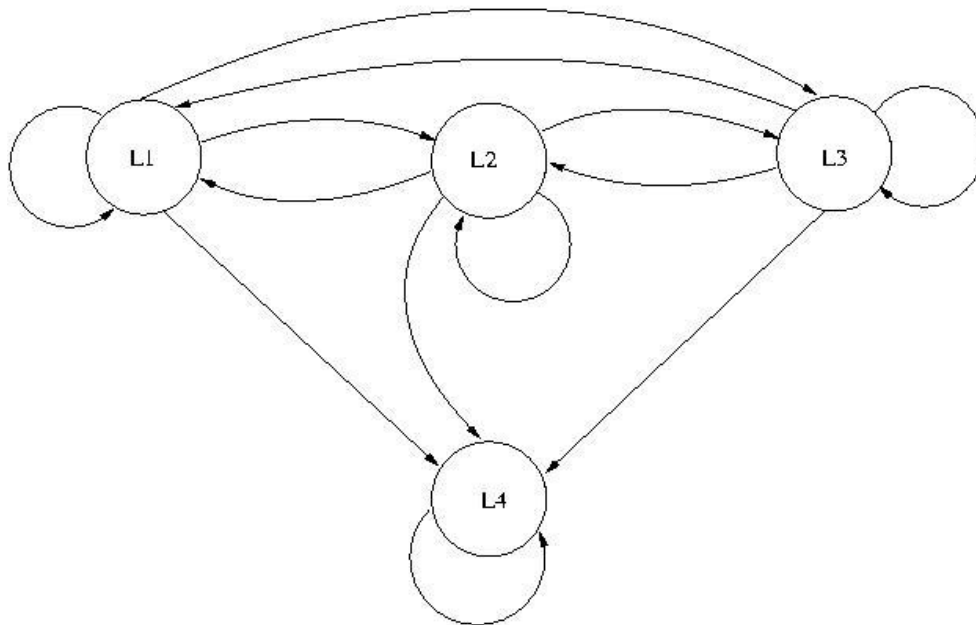
- Claramente no existirán probabilidades estacionarias dado que tenemos 2 clases recurrentes.
- Si finalmente se invierte tendremos que el problema puede representarse con el siguiente grafo:
En este caso existe una única clase recurrente aperiódica.
- Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias (provenientes de resolver el sistema tendremos que la ganancia diaria esperada en el largo plazo será:

$$E[\text{Ganancias}] = ME \cdot \pi_E + MA \cdot \pi_A + MB \cdot \pi_B$$



Problema 2

- La cadena de Markov tiene cuatro estados, uno asociado a cada local. El grafo que la representa es el siguiente:



Los estados pueden ser separados en las siguientes clases:

- $\{L1, L2, L3\}$: clase transiente.
- $\{L4\}$: clase recurrente aperiódica.

La matriz de probabilidades de transición es (con filas y columnas ordenadas según los estados L1, L2,

L3, L4, en este orden, y este orden utilizaremos para todos los vectores y matrices en esta pauta):

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} \\ \frac{1-p_2}{3} & p_2 & \frac{1-p_2}{3} & \frac{1-p_2}{3} \\ \frac{1-p_3}{3} & \frac{1-p_3}{3} & p_3 & \frac{1-p_3}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Esta cadena tiene probabilidades estacionarias ya que es una cadena del tipo “ergódica más transiente” (o equivalentemente, porque tiene una sola clase recurrente, la cual es aperiódica).

Como la clase recurrente tiene apenas un estado, las probabilidades estacionarias se determinan sin necesidad de cálculos:

$$\pi = [0, 0, 0, 1].$$

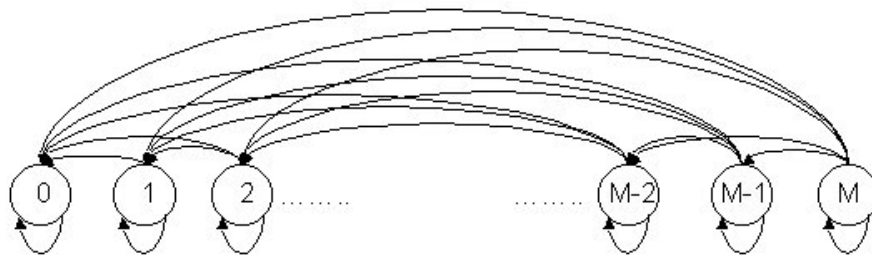
De aquí podemos concluir que, a partir de un cierto momento, Mandinga irá siempre a L4, ya que es el único estado recurrente de la cadena (que es finita).

Problema 3

- La situación claramente puede ser modelada como una cadena de Markov en tiempo discreto debido a que si me defino los estados como el número de pacientes que quedan en el centro en un día, entonces todas las probabilidades de transición pueden ser determinadas a partir de esta información. De esta forma se tiene que:

- El estado i Será la situación en que quedan i pacientes enfermos en el centro, $\forall i \in \{0, \dots, M\}$.
- Las probabilidades de transición quedan determinadas por la siguiente formula¹:

$$P(i, j) = P(\text{ir del estado } i \text{ al estado } j) = \begin{cases} \frac{i!}{(i-j)!j!} p^{i-j} (1-p)^j & \text{si } M \geq i \geq j \geq 0 \\ 0 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$



Grafo Parte 1

- Existen $M + 1$ clases distintas: 1 recurrente compuesta por el estado 0, y M clases transientes compuesta cada una por uno de los M estados restantes. Recuerden que una clase esta compuesta por todos los estados comunicados² entre sí, y en este caso ningún estado se comunica con otro.

¹Esto es equivalente a definir la matriz de transición P .

²Ver definición en apuntes del curso

2. Primero necesitamos encontrar la probabilidad de eventualmente pasar por el estado $M - 1$. Para calcular esta probabilidad vemos que de pasar por este estado, la transición debe lograrse en algún número de períodos. Por esto se tiene que:

$$P(\text{Pasar por el estado M-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Pasar por M-1 en i transiciones})$$

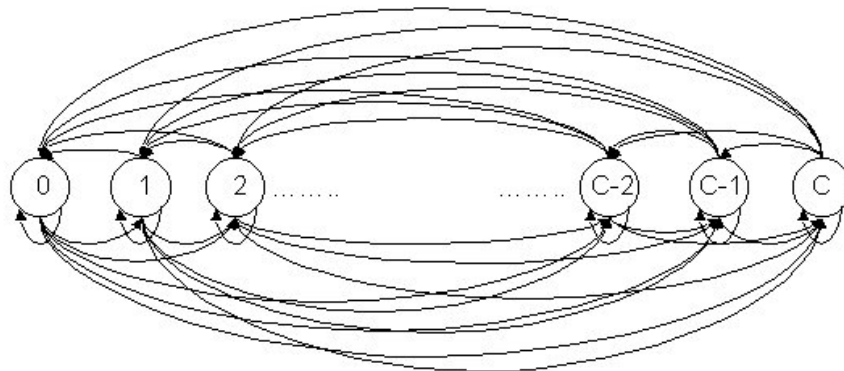
$$P(\text{Pasar por el estado M-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Quedarme en M por i-1 transiciones}) \cdot P(M.M - 1)$$

$$P(\text{Pasar por el estado M-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{M(i-1)} \cdot M \cdot p \cdot (1-p)^{M-1}$$

$$P(\text{Pasar por el estado M-1}) = \frac{M(1-p)^{M-1}p}{1 - (1-p)^M}$$

Por otro lado, la probabilidad de instalar los equipos algún día es equivalente a la probabilidad de llegar alguna vez al estado 0. Sin embargo dado que esta es una cadena ergodica, sé que en el largo plazo con seguridad estare en la clase recurrente. Como en este caso la clase recurrente esta compuesta por el estado 0, es que se puede decir con seguridad (Probabilidad =1) que en el largo plazo el sistema llegará al estado 0 y por lo tanto se podran instalar los equipos.

3. En este caso se tiene un número C de camas disponibles y existe la posibilidad que llegue gente al centro asistencial. De esta forma:



Grafo Parte 3

- El estado i Será la situación en que quedan i pacientes enfermos en el centro, $\forall i \in \{0, \dots, C\}$.
- Para calcular la probabilidad de transición entre dos estados cualesquiera condicionaremos sobre el número de personas que se recuperan.
Entonces, para $j \neq C$:

$$P(i, j) = \sum_{k=0}^i P(i, j | \text{Se mejoran } k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

- Sin embargo;

$$P(i, j \mid \text{Se mejoran } k \text{ personas}) = P(\text{lleguen } j - i + k \text{ personas})$$

siempre y cuando $j - i + k \geq 0$, entonces:

$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i P(\text{lleguen } j - i + k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i q_{j-i+k} \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

■ De la misma forma, si $j = C$, entonces:

$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i P(\text{lleguen más de } j - i + k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

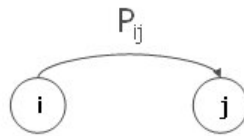
$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i \left(\sum_{z=j-i+k}^{\infty} q_z \right) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

Problema 4

- Definitivamente es posible modelar el número de maquinas buenas al comienzo de un día. Esto dado que el estado posee información que resume todo lo que necesitamos saber: Si existen i máquinas buenas al comienzo del día, entonces (dado que las maquinas sólo pueden estar buenas o malas) obligatoriamente tengo $T - i$ maquinas malas las cuales estarán disponibles al comienzo del proximo día, si no fuese así no estarían malas (dado que solo pueden fallar durante el transcurso de un día). Por otro lado tenemos que:

$$S(j, i) = \begin{cases} \binom{i}{j} q^j (1-q)^{i-j} & j \leq i \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- Claramente tendremos $T + 1$ estados (desde el 0 al T), sin embargo dibujar las transiciones y un esquema de la cadena general es muy complicado (debido al elevado número de transiciones). Entonces la mejor forma de determinar la cadena es especificar cada transición entre estados con la probabilidad de transición asociada. Entonces la cadena queda como se muestra en la figura a continuación. Para

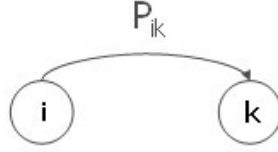


determinar P_{ij} debemos notar el hecho que si $T-i$ maquinas estarán con seguridad buenas en el siguiente etapa, entonces sólo tiene sentido que $j \geq T - i$. Por otro lado, para los j que cumplen la condición tenemos que la transición implica que solo una cantidad $j - T + i$ de las i maquinas buenas sobrevive (o que $T - j$ no lo hacen). De esta forma, en términos de $S(i, j)$, tendremos que:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & j < T - i \\ S(T - j, i) & \sim \end{cases}$$

Finalmente es bastante claro que (dado que todos los estados están comunicados entre si, la cadena es finita y hay estados aperiódicos) la cadena es ergódica, por lo si existirán probabilidades estacionarias. Todos los estados forman una única clase recurrente.

3. Los estados siguen siendo los mismos, sólo cambiarán las probabilidades de transición. Ahora debemos considerar que al próximo día no contaremos con $T - i$ máquinas buenas con seguridad si no con una cantidad menor o igual. ¿Cuántas?: Si tengo $T - i$ máquinas con desperfectos puedo formar $\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor$ lotes de J , por lo tanto tendré $\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J$ máquinas buenas con seguridad. Tomando esto en cuenta tendremos que:



Donde:

$$P_{ik} = \begin{cases} 0 & k < \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J \\ \binom{i + \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J - k}{\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J - k} q^{i + \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J - k} (1 - q)^{k - \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J} & k \geq \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J \end{cases}$$

En función de $S(i, j)$ queda de la siguiente forma ($n = \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor$):

$$P_{ik} = \begin{cases} 0 & k < n \cdot J \\ S(i + n \cdot J - k, i) & k \geq n \cdot J \end{cases}$$

Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl

Marianela Pereira
mapereir@ing.uchile.cl

Daniel Yung
dyung@ing.uchile.cl