



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey
Aux: M. Guajardo, M. Pereira, D. Yung

Clase Auxilliary 15, 28 de Septiembre de 2005

Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

Problema 1

Un inversionista extranjero desea invertir su capital en el mercado accionario nacional. De acuerdo a un estudio que realizó, el comportamiento mensual de este mercado puede clasificarse en 3 categorías: En alza (A), estable (E) y en baja (B). Además, este comportamiento mensual es una variable aleatoria que depende únicamente del comportamiento en el mes anterior. La siguiente matriz representa las probabilidades de transición en el mercado accionario:

	A	E	B
A	0.7	0.2	0.1
E	0.3	0.5	0.2
B	0.1	0.4	0.5

Como el inversionista tiene la posibilidad de ubicar su capital en otro país, por lo que ha decidido observar el mercado nacional. La política de inversión que seguirá es tal que si durante 3 meses consecutivos observa al mercado nacional en alza, invierte sin retirar su dinero, sin embargo, si durante 2 meses consecutivos observa que el mercado está en baja invierte en el extranjero sin la posibilidad de reconsiderar su decisión. Si invierte en el mercado accionario nacional obtendrá un ingreso esperado mensual de \$MA, \$ME o \$MB, si el comportamiento es en alza, estable o baja respectivamente.

Si inicialmente el mercado accionario nacional se encuentra estable, responda:

1. Explique porqué este problema de inversión puede formularse como una cadena de Markov. Represente-lo con un grafo, identifique y clasifique sus estados.
2. ¿Existen probabilidades estacionarias?, justifique.
3. Suponga que el inversionista finalmente invierte en el mercado nacional, ¿Cómo cambia su respuesta de la parte anterior?, ¿Cuál es el ingreso promedio mensual que espera obtener el inversionista en esta situación?.

Problema 2, Control 2 Otoño 2003

Giusseppe Mandinga, un dedicado estudiante de nuestra escuela, está preocupado con el estrés que le está produciendo tanto estudio este semestre. Para mantener su salud, ha decidido dedicar las noches de los viernes para salir y “ventilar la mente”. Para ello ha elegido cuatro locales de entretención nocturna de una conocida zona de Santiago. Los locales que ha elegido son “L1”, “L2”, “L3” y “L4”.

Según información que nos proporcionó un amigo cercano, Giusseppe decide a qué local dirigirse cada fin de semana de acuerdo a los siguientes criterios: - Si el show de la semana anterior le gustó, este viernes se dirige al mismo local. - Si el espectáculo al que acudió la semana anterior no le gustó, este viernes concurrirá a otro local. En este caso el próximo local a visitar (de los tres posibles) es escogido equiprobablemente.

Además, nuestro informante nos comentó, a partir de su experiencia como compañero de salidas de Mandinga, que él sale satisfecho del local “Li” con una probabilidad p_i , que es igual todas las semanas e independiente de todas las salidas anteriores. En particular, nos garantiza con certeza absoluta que el espectáculo de “L4” le gustará a Giuseppe siempre (es decir $p_4 = 1$).

1. Construya una cadena de Markov que represente las salidas de los viernes de Giuseppe Mandinga. Construya un grafo que la represente. Identifique las clases de estados de esta cadena y clasifíquelas en transientes y recurrentes. Para las clases recurrentes determine el período de cada una. Identifique las probabilidades de transición entre estados.
2. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas. ¿Podemos afirmar, que a partir de algún momento, Mandinga concurrirá todas las semanas a mismo local? En caso afirmativo, ¿a cuál de ellos lo hará? Justifique.

Problema 3

En un pequeño centro hospitalario se tiene la urgencia de instalar equipos nuevos. Estos equipos son muy costosos y se deben manejar con mucho cuidado por lo que se necesita que el establecimiento esté vacío al momento de la instalación. El problema es que actualmente se tiene M pacientes en el centro (y los equipos no llegarán hasta que no haya nadie).

Cada mañana un doctor evalúa la condición de los pacientes para ver si son dados de alta. Se ha determinado que cada paciente tiene una probabilidad p de estar rehabilitado y salir del centro y una probabilidad $(1 - p)$ de seguir internado, independiente de lo que ocurra con los demás pacientes. Nadie puede ingresar al centro hasta después de instalados los equipos.

1. Muestre que el sistema descrito puede ser modelado como una cadena de Markov en tiempo discreto, dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique sus estados.¹
2. Si el sistema tiene inicialmente M pacientes, ¿Cuál es la probabilidad que algún día tenga $M - 1$? ¿Cuál es la probabilidad que algún día se puedan instalar los equipos?. Encuentre estas probabilidades y fundamente adecuadamente sus respuestas.

Ahora suponga que la instalación de los equipos ya se realizó, por lo que pueden llegar pacientes al centro hospitalario. Se sabe que la probabilidad que lleguen k pacientes en un día es q_k , con $k = 0, 1, 2, \dots$. Además el centro sólo cuenta con C camas por lo que si llega una persona y no hay cama disponible, ésta es derivada a otro centro médico. Considere que una persona que ingresa al centro es internada al menos por 1 noche (no puede tener el alta sin una evaluación positiva del doctor que pasa revisión en la mañana).

3. Modifique su modelo para esta nueva situación y dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique los estados.

Problema 4

Una unidad productiva de una empresa minera tiene un número muy grande que llamaremos \mathbf{T} mini retro excavadoras para la extracción del mineral. Estas máquinas se utilizan durante el día y al caer la tarde se guardan para ser utilizados en la mañana siguiente.

Sin embargo, existe una probabilidad q que una máquina en operación falle durante un día, independiente de cuántos días consecutivos lleve operando. En estos casos la mini retro excavadora será enviada al taller de reparación al final del día en el que falla, donde su mantenimiento siempre se realiza al día siguiente.

¹HINT: Calcule la probabilidad $\Pr[X(n) = r | X(n-1) = k]$, con $X(n)$ = cantidad de personas en el centro en la semana n .

De esta manera, una máquina que falla un día t estará lista para su utilización en la mañana del día $t + 2$ independiente de lo que pase con las demás.

1. Justifique porqué es posible modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto el **Número de mini retro excavadoras buenas al inicio de cada día**. ¿Cuál es la probabilidad que un día fallen j máquinas si esa mañana había i buenas?. Llame a esta probabilidad $s(j, i)$.
2. Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo discreto. Encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición en función de $s(j, i)$, clasifique los estados en clases y caracterícelas. Argumente la existencia de una ley de probabilidades estacionarias.

Considere que esta unidad de la mina modifica su política de envío de máquinas a mantención de manera que las enviará al taller sólo en lotes de J máquinas que necesitan reparación. Todas las máquinas enviadas al taller serán reparadas el día siguiente y estarán disponibles en la mañana del día subsiguiente del que fueron enviadas a mantención. La probabilidad que una máquina que está en funcionamiento una mañana cualquiera falle ese día seguirá siendo q .

3. Modele esta nueva situación como una cadena de Markov en tiempo discreto. Encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición en función de $s(j, i)$.