



Clase Auxilliary 13, 20 de Septiembre de 2005

## Procesos de Poisson

### Problema 1

Suponga que la intersección de dos calles unidireccionales, que llamaremos  $a$  y  $b$ , está regulado por un semáforo, tal como se ilustra en la figura. El semáforo funciona en un ciclo de  $C$  unidades de tiempo, de las cuales un tiempo  $A$  corresponde a luz verde para la calle  $a$  y un tiempo  $B$  verde para la calle  $b$  (sólo hay luces verdes y rojas).

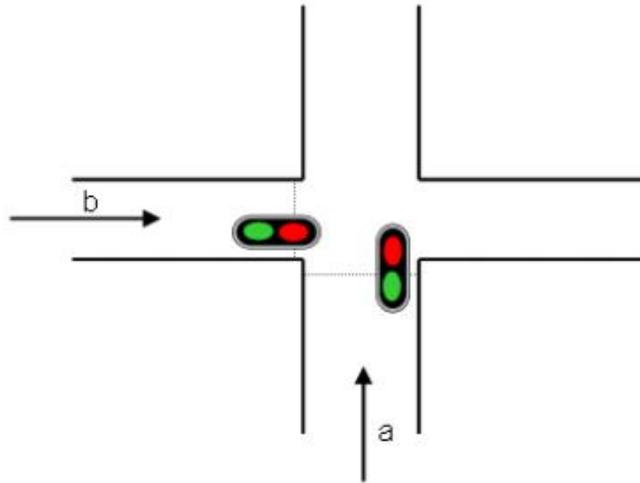
Por la calle  $a$  llegan autos según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda_a[\frac{\text{autos}}{\text{u.t.}}]$ , mientras que por la calle  $b$  llegan autos según un Proceso de Poisson de tasa  $\lambda_b[\frac{\text{autos}}{\text{u.t.}}]$ . Los autos que llegan a la intersección y encuentran la luz en verde cruzan inmediatamente, pero si encuentran el semáforo en rojo deben esperar hasta el próximo cambio de luz, momento en que cruzan instantáneamente la intersección (el tiempo que demoran en cruzar es despreciable).

Si ambas calles son lo suficientemente anchas como para que no se formen colas y no está permitido que los vehículos doblen en este cruce, conteste las siguientes preguntas:

1. (1,0 pts) Realice un diagrama que muestre el número de automóviles esperando cruzar la intersección en una de las dos calles (por ejemplo la calle  $a$ ) en función del tiempo y otro que muestre el número total de automóviles que han cruzado la intersección en función del tiempo. ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que cruzan la intersección en 1 ciclo del semáforo? HINT: Considere que un ciclo comienza cuando da la luz roja para alguna calle y termina cuando termina la luz verde inmediatamente posterior para esa misma calle, considerando en “algún momento” la entrada de los vehículos que han tenido que esperar por luz roja (para ambas calles).
2. (1,0 pts) Si en un ciclo cruzaron en total  $N$  autos por la intersección, ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que cruzaron por la calle  $a$ ?
3. (1,0 pts) Si en un ciclo cruzaron la intersección  $N_a$  autos por la calle  $a$ , ¿Cuál es la distribución de probabilidad del número de autos que tuvo que esperar por cruzar (por la calle  $a$ )?
4. (1,0 pts) Si en un ciclo cruzaron en total  $n$  autos por la intersección, ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que NO tuvo que esperar por cruzar?

Suponga ahora que los automovilistas que circulan por la calle  $a$  perciben un costo igual a  $\$M \cdot t$ , donde  $t$  es el tiempo que deben esperar antes de poder cruzar, mientras que para los automovilistas que circulan por la calle  $b$  este costo queda bien modelado por la expresión  $\$M \cdot t^2$

5. (2,0 pts) Calcule el costo esperado incurrido por los automovilistas que esperan en un ciclo del semáforo. HINT: Puede ser útil calcular la esperanza del tiempo que debe permanecer un automovilista frente a la luz roja, condicional a que llega cuando la luz está roja.



## Problema 2, CTP 3 Otoño 2005

Como es sabido, el país se encuentra pasando por la peor crisis energética de los últimos años. Esto se debe, principalmente, a los recortes en el suministro de gas natural que los proveedores argentinos han debido realizar para garantizar su consumo interno. En el marco de esta situación, estudiosos del tema han predicho que los recortes de gas natural siguen un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  [recortes/mes].

Además, se sabe que dichos recortes pueden ser de diferentes magnitudes. De esta forma, los recortes se han agrupado en dos clases. Los recortes Clase A corresponden a un corte total del suministro de gas natural desde Argentina, lo que significa un costo estimado de  $C$  para el país. En tanto, los recortes Clase B, corresponden a un corte parcial del suministro normal y el  $i$ -ésimo recorte le significará al país un costo  $D_i$  ( $D_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, \infty$ ). De manera adicional, se sabe que cada clase de recorte tiene cierta probabilidad de ocurrencia. En particular, los recortes Clase A ocurrirán con probabilidad  $p$ , mientras que el resto de los recortes serán Clase B.

1. Se sabe que desde Enero hasta Marzo de este año han ocurrido en total 21 recortes. Los expertos predicen que a futuro la situación será aún más crítica debido al gran número de recortes en el primer trimestre. En base a lo expuesto en el enunciado argumente sobre la veracidad o falsedad de esta predicción.
2. Si sabe que hasta el primer trimestre de este año han ocurrido  $M$  recortes en total, ¿Cuál es la probabilidad que este año ocurran un total de  $N$  recortes?
3. Si este mes han ocurrido 12 recortes en total. ¿Cuál es la probabilidad que  $k$  de ellos hayan sido recortes Clase A?
4. ¿Cual es el costo esperado de los posibles recortes en un mes (Clase A y B)?
5. ¿Cual es la probabilidad de que el séptimo recorte Clase A ocurra antes de dos meses?

Adicionalmente, se sabe que cada 3 recortes el presidente convoca a su gabinete de ministros a una reunión a puertas cerradas para analizar posibles soluciones al conflicto del gas. Cada reunión tiene una duración de 1 semana, y mientras se encuentran reunidos no se enteran de los posibles recortes que pueden ocurrir. Transcurrida esa semana, el presidente anuncia las medidas adoptadas y comienza a contar nuevamente los recortes que determinarán una futura reunión.

6. Para  $t \geq \frac{n-1}{4}$  y  $n \geq 1$ , calcule la probabilidad de que en un tiempo de  $t$  meses el presidente haya convocado *al menos* a  $n$  reuniones (considere que un mes tiene 4 semanas).