



Clase Auxilliary 12, 07 de Septiembre de 2005

Procesos de Poisson

Problema 1

1. Debemos recordar que la unidad de tiempo en esta pregunta son los partidos. Consideremos los siguientes procesos de conteo:

$N_A(t)$ Número de goles anotados por el equipo A hasta t

$N_B(t)$ Número de goles anotados por el equipo B hasta t

Entonces:

$$\begin{aligned} P[\text{A Gane } 2 \times 1 \text{ a B}] &= P[N_A(1) = 2 \wedge N_B(t) = 1] \\ &= P[N_A(1) = 2] \cdot P[N_B(t) = 1] \\ &= \frac{\lambda_A^2 e^{-\lambda_A}}{2!} \cdot \frac{\lambda_B e^{-\lambda_B}}{1!} \end{aligned}$$

Hemos utilizado la independencia de los procesos de conteo y la distribución de Poisson de estos.

2. De acuerdo a lo hecho en clases reinterpretemos esta probabilidad como sigue:

Sea: T_x el tiempo de llegada de uno de los goles y T_y el tiempo de llegada del otro gol. Sabemos que la distribución de estos tiempos es Uniforme entre 0 y $\frac{1}{2}$ (revisar materia del curso). De esta forma la probabilidad que debemos calcular es (de acuerdo a la interpretación que acordamos en la clase auxiliar):

$$\begin{aligned} P[\text{Primer gol antes de 15 minutos y el segundo entre los 15 y los 30}] &= 2 \cdot P\left[T_X < \frac{1}{6} \wedge \frac{2}{6} > T_Y > \frac{1}{6}\right] \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

El 2 que antepone la probabilidad es porque debemos considerar en caso en que T_Y es menor que T_X .

3. Dado que los procesos de A y B son independientes, la probabilidad a calcular no es afectada por lo que pasa con B. Entonces:

$$\begin{aligned} P[\text{A hace 3 goles en los 30 primeros minutos del segundo tiempo}] &= P\left[N_A\left(\frac{5}{6}\right) - N_A\left(\frac{3}{6}\right) = 3\right] \\ &= P\left[N_A\left(\frac{3}{6}\right) = 3\right] \\ &= \frac{(\lambda_A \cdot \frac{1}{3})^3 \cdot e^{-\lambda_A \cdot \frac{1}{3}}}{3!} \end{aligned}$$

4. Consideramos el inicio del tiempo de alarge como un nuevo origen(incrementos estacionarios). Así, la probabilidad requerida es:

$$\begin{aligned}
 P[\text{Alarge dure más de 45 minutos}] &= P[N_A(\frac{1}{2}) = 0 \wedge N_B(\frac{1}{2}) = 0] \\
 &= \frac{e^{-\lambda_A \frac{1}{2}}}{0!} \cdot \frac{e^{-\lambda_B \frac{1}{2}}}{0!} \\
 &= e^{-(\lambda_A + \lambda_B) \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Notamos que esta probabilidad podría haber sido calculada de la siguiente forma: Si estamos al principio del alarge sabemos que el tiempo de llegada del primer gol sigue una distribución $exp(\lambda_A + \lambda_B)$ (debido a que se trata de la distribución del mínimo de 2 exponenciales). Entonces solo debemos calcular la probabilidad que este tiempo sea mayor a $\frac{1}{2}$, que es el resultado obtenido.

5. Para calcular esta probabilidad debemos condicionar un par de veces. Sean:

BG = B gana.

1A = Primer gol es anotado por A.

1B = Primer gol es anotado por B.

2A = segundo gol es anotado por A.

2B = segundo gol es anotado por B.

Entonces:

$$\begin{aligned}
 P[BG] &= P[BG|1A] \cdot P[1A] + P[BG|1B] \cdot P[1B] \\
 &= P[BG|1A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + P[BG|1B] \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}
 \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned}
 P[BG|1A] &= P[BG|1A|2A] \cdot P[2A] + P[BG|1A|2B] \cdot P[2B] \\
 &= P[BG|1A|2A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + P[BG|1A|2B] \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \\
 &= 0 \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + P[BG|1B] \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 P[BG|1B] &= P[BG|1B|2A] \cdot P[2A] + P[BG|1B|2B] \cdot P[2B] \\
 &= P[BG|1B|2A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + P[BG|1B|2B] \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \\
 &= P[BG|1A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + 1 \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}
 \end{aligned}$$

Utilizando las relaciones encontradas vemos que:

$$\begin{aligned}
 P[BG|1A] &= \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \cdot [P[BG|1A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + 1 \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}] \\
 &= \frac{\lambda_B^2}{\lambda_A^2 + \lambda_B^2 + \lambda_A \cdot \lambda_B}
 \end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de más arriba obtenemos:

$$P[BG] = \frac{\lambda_B^2}{\lambda_A^2 + \lambda_B^2 + \lambda_A \cdot \lambda_B} \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + \left[\frac{\lambda_B^2}{\lambda_A^2 + \lambda_B^2 + \lambda_A \cdot \lambda_B} \right] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + 1 \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}$$

Problema 2

1. Sea N_m = Número de personas que se suben al m-esimo bus. Sea x_m = tiempo entre llegada del bus m-1 y el m-esimo.

$$P(N_m = j | x_m = t) = \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^j}{j!}$$

2. Tenemos que descondicionar el resultado de la parte anterior:

$$P(N_m = j) = \int_0^{\infty} P(N_m = j | x_m = t) \cdot f_{x_m}(t) \partial t$$

donde $f_{x_m}(t)$ es la densidad del tiempo entre el bus m-1 y el m-esimo. Sin embargo sabemos que $f_{x_m}(t) \rightarrow \exp(\lambda)$. Entonces:

$$P(N_m = j) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^j}{j!} \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t$$

$$P(N_m = j) = \frac{\lambda \mu^j}{(\lambda + \mu)^{j+1}} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda + \mu)^{j+1} t^j e^{-(\lambda + \mu)t} \partial t}{j!}$$

Dado que lo que queda dentro de la integral es la densidad de probabilidad de una *Gamma*($j + 1, \lambda + \mu$) se tiene que:

$$P(N_m = j) = \frac{\lambda \mu^j}{(\lambda + \mu)^{j+1}}$$

3. Si un bus llega a las 10:30 y no llegan buses entre 10:30 y 11:00 el número de pasajeros que se subira al proximo bus será $N_1 + N_2$ donde:
 - N_1 = Número de personas que se sube entre 10:00 y 11:00.
 - N_2 = Número de personas que se sube a partir de las 11:00.

Entonces:

$$P(N_m = n) = \sum_{j=0}^n P(N_1 = j \wedge N_2 = n - j)$$

$$P(N_m = n) = \sum_{j=0}^n P(N_1 = j) \cdot P(N_2 = n - j)$$

$$P(N_m = n) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^n \frac{\mu^j}{j!} \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-j}$$

$$P(N_m = n) = \frac{\lambda \mu^n}{(\lambda + \mu)^{n+1}} e^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^n \left[\frac{\lambda + \mu}{2} \right]^j \cdot \frac{1}{j!}$$

4. El número de pasajeros esperando en cualquier instante se el proceso comenzo hace "mucho tiempo" \Rightarrow independiente del instante, la distribución de prob. de la gente esperando sigue la misma dsitr. de probabilidad de la parte 2.

5. Sean:

- N_1 = Número de personas que esta esperando
- N_2 = Número de personas que se sube a partir del instante escogido.

Entonces:

$$P(N_1 = j) = \frac{\lambda \mu^j}{(\lambda + \mu)^{j+1}}$$

$$P(N_2 = j) = \frac{\lambda \mu^j}{(\lambda + \mu)^{j+1}}$$

De esta forma se tiene que:

$$P(N_m = n) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda \mu^k}{(\lambda + \mu)^k} \cdot \frac{\lambda \mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^{n-k}}$$

$$P(N_m = n) = (n + 1) \frac{\lambda^2 \mu^n}{(\lambda + \mu)^{n+2}}$$

6. Denotando por q_n a la probabilidad calculada en la parte 5, la respuesta a esta parte 6 es q_{n-1} (esto es, se suben $n-1$ más *yo*).

Dudas y/o errores:
Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl