



Universidad de Chile  
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa  
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey  
Aux: M. Guajardo, M. Pereira, D. Yung

Solución Clase Auxilliary 9, 30 de Agosto de 2005

## Repaso Control 1

### Problema 1, Control 1 Otoño 2003

- Supondremos que  $P_2 < C_1$  (si no la decisión es trivial), con lo que solo analizamos el caso  $X < D$ . Si la demanda  $t$  es menor a la cantidad ordenada  $X$ , las utilidades toman la siguiente forma:

$$Utilidad = t \cdot P_1 - X \cdot C_1 + (X - t) \cdot P_2$$

- Si la demanda  $t$  es mayor a la cantidad ordenada  $X$ , las utilidades toman la siguiente forma:

$$Ganancia = X \cdot P_1 - (t - X) \cdot C_2 - X \cdot C_1$$

- Para obtener la ganancia diaria esperada simplemente integramos la función de utilidad condicionada sobre todo el dominio de función la demanda ponderando por la densidad de probabilidad. Esto es:

$$\begin{aligned} E[Utilidad] &= \int_0^D E[Utilidad | t] \cdot \frac{dt}{D} \\ &= \int_0^X E[Utilidad | t] \cdot \frac{dt}{D} + \int_X^D E[Utilidad | t] \cdot \frac{dt}{D} \\ &= \int_0^X [t \cdot P_1 - C_1 \cdot X + (X - t) \cdot P_2] \cdot \frac{dt}{D} + \int_X^D [X \cdot P_1 - C_1 \cdot X - (t - X) \cdot C_2] \cdot \frac{dt}{D} \\ &= \frac{X^2}{2D} \cdot P_1 + \frac{X^2}{D} \cdot P_2 - \frac{X^2}{2D} \cdot P_2 + \frac{X \cdot (D - X)}{D} \cdot P_1 - \frac{D}{2} \cdot C_2 + \frac{X^2}{2D} \cdot C_2 \\ &\quad + \frac{X \cdot (D - X)}{D} \cdot C_2 - X \cdot C_1 \end{aligned}$$

- Derivamos e igualamos a 0.

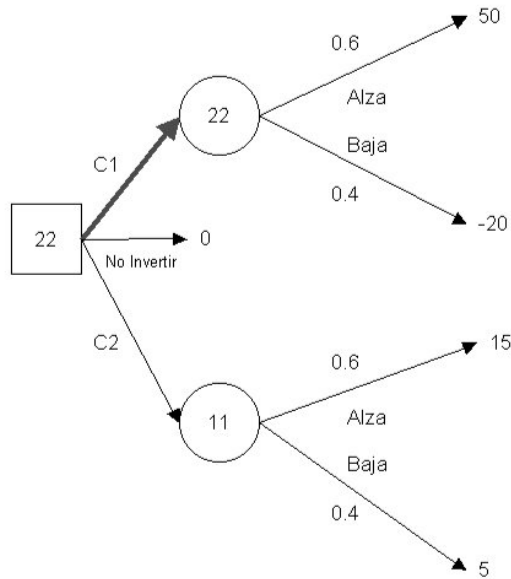
$$\frac{X}{D} \cdot P_1 + P_1 + \frac{X}{D} \cdot P_2 - \frac{2 \cdot X}{D} \cdot P_1 + \frac{X}{D} \cdot C_2 + C_2 - \frac{2X}{D} \cdot C_2 - C_1 = 0$$

Entonces, despejando:

$$X = D \cdot \left(1 + \frac{-C_1 + P_2}{P_1 - P_2 + C_2}\right)$$

## Problema 2, Control 1 Primavera 2003

1. Para determinar la política óptima de inversión se debe resolver el siguiente árbol:



Luego se obtiene que la política óptima es invertir en  $C_1$ , con un valor esperado de los beneficios de 22M\$.

2. Definamos los siguiente eventos:

- OPT: Amigo optimista y opina que el mercado está al alza.
- PES: Amigo pesimista y opina que el mercado está a la baja.
- A: Mercado a la alza
- B: Mercado a la baja

Según los datos del enunciado sabemos que:

$$P(\text{OPT}/A) = 0,9$$

$$P(\text{OPT}/B) = 0,5$$

$$P(\text{PES}/A) = 0,1$$

$$P(\text{PES}/B) = 0,5$$

Se deben calcular las siguientes probabilidades:

$$P(\text{OPT}) = P(\text{OPT}/A)P(A) + P(\text{OPT}/B)P(B) = (0,9 \cdot 0,6) + (0,5 \cdot 0,4) = 0,74$$

$$P(\text{PES}) = P(\text{PES}/A)P(A) + P(\text{PES}/B)P(B) = (0,1 \cdot 0,6) + (0,5 \cdot 0,4) = 0,26$$

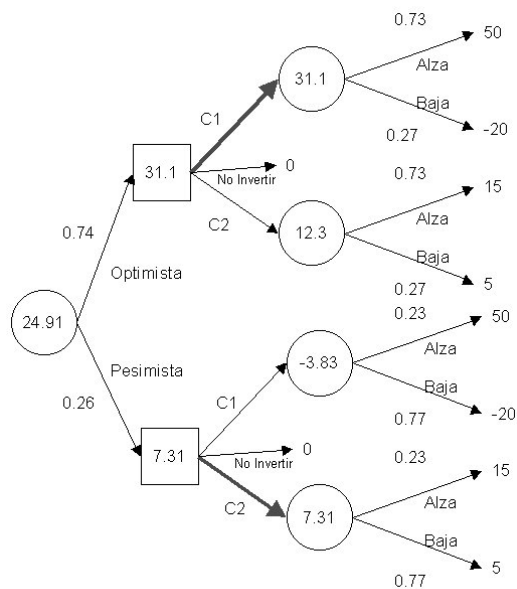
$$P(A/OPT) = \frac{P(OPT/A)P(A)}{P(OPT)} = \frac{0,54}{0,74} = 0,730$$

$$P(B/OPT) = \frac{P(OPT/B)P(B)}{P(OPT)} = \frac{0,20}{0,74} = 0,270$$

$$P(A/PES) = \frac{P(PES/A)P(A)}{P(PES)} = \frac{0,06}{0,26} = 0,231$$

$$P(B/PES) = \frac{P(PES/B)P(B)}{P(PES)} = \frac{0,20}{0,26} = 0,769$$

Luego, con la nueva información, la situación se resume en el siguiente árbol:



Luego lo máximo que estaría dispuesto a pagar por la información es :

$$VE(\text{Info}) = 24,91 - 22 = 2,91$$

3. Para el de un Test de Información Perfecta definamos la siguiente notación adicional:

- TA: Test predice alza.
- TB: Test predice baja.

Luego se tiene que:

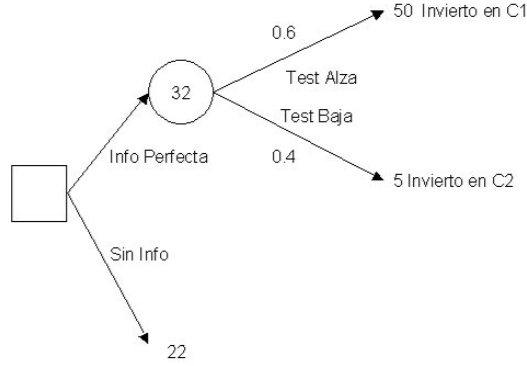
$$P(A/TA) = 1$$

$$P(B/TB) = 1$$

$$P(TA) = 0,6$$

$$P(TB) = 0,4$$

Y el árbol correspondiente queda como sigue:



Luego el Valor esperado de la Información Perfecta es:

$$VEIP = 32 - 22 = 10$$

### Problema 3, Otoño 2005

#### Parte 1

1. Esta pregunta tenía dos interpretaciones. Una era el valor esperado de la apuesta. Esto es:

$$E(apuesta) = 200 \cdot p_{ganar} + 0 \cdot p_{perder}$$

Sin embargo, también era posible considerar la utilidad esperada del jugador experto. Este caso sería:

$$E(U(x)) = U(200) \cdot p_{ganar} + U(0) \cdot p_{perder}$$

Ambas interpretaciones llevan a tener que obtener la probabilidad de ganar del jugador experto. Luego, la probabilidad de ganar,  $p_{ganar} = (1 - p_{perder})$  es:

$$p_{ganar} = P(X_4 > C / X_3 < C \wedge X_2 < C \wedge X_1 < C)$$

Donde,  $X_i$  es la v.a. que denota el número obtenido por el jugador i-ésimo y  $C$  es la v.a. que denota el número obtenido por el casino. Nótese que todas estas variables aleatorias se distribuyen  $U(0,100)$ .

De esta forma, aplicando la definición de probabilidades condicionales tendremos que:

$$\begin{aligned} p_{ganar} &= \frac{P(X_4 > C \wedge X_3 < C \wedge X_2 < C \wedge X_1 < C)}{P(X_3 < C \wedge X_2 < C \wedge X_1 < C)} \\ &= \frac{\int_0^{100} \left( \int_0^{X_4} \left( \int_0^C \int_0^C \int_0^C \left( \frac{1}{100} \right)^3 dX_1 dX_2 dX_3 \right) \frac{1}{100} dC \right) \frac{1}{100} dX_4}{\int_0^{100} \left( \int_0^C \int_0^C \int_0^C \left( \frac{1}{100} \right)^3 dX_1 dX_2 dX_3 \right) \frac{1}{100} dC} \\ &= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Resolviendo fácilmente la expresión anterior, nos queda que  $p_{ganar} = \frac{1}{5}$ . Este resultado es posible obtenerlo también con buenos argumentos. Así, la probabilidad del numerador es  $1/5 \cdot 1/4$ , que corresponde a la probabilidad que el experto gane sobre los 5 números y que el casino sea el segundo. De la misma forma, la probabilidad del denominador es  $1/4$ , que es la probabilidad que el casino sea quien gane de cuatro números.

De esta forma,

$$E(apuesta) = 200 \cdot \frac{1}{5} = 40$$

y,

$$E(U(x)) = 19600 \cdot \frac{1}{5} = 3920$$

Estos valores corresponden a la ganancia por apuesta esperada y a la utilidad esperada respectivamente.

2. Nuestro jugador experto tendrá como ingreso esperado \$40, que se traduce en una utilidad esperada de 3920. Luego, dado que si se retira se quedará con \$100, equivalente a una utilidad de  $U(100) = 9900$ , el si estaría dispuesto a pagar por retirarse. De esta forma, dependerá de su función de utilidad cuanto esta dispuesto a pagar. Así, lo primero que se debe hacer es obtener el equivalente cierto de la utilidad esperada para el jugador. Esto es,

$$p_{ganar} \cdot U(200) + p_{perder} \cdot U(0) = U(X^*)$$

Con esto obtenemos que  $U(X^*) = 3920$  (No era necesario conocer este valor). Luego, si queremos obtener el valor de  $X^*$ , debemos resolver la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} p_{ganar} \cdot U(200) &= 100 \cdot U(X^*) = -0,01 \cdot (X^*)^2 \\ 3920 &= 100 \cdot X^* - 0,01 \cdot (X^*)^2 \end{aligned}$$

Luego, conocido el valor de  $X^*$ , que corresponde al monto equivalente cierto que obtendrá el jugador en este juego. De esta forma, el estará dispuesto a pagar como máximo  $(100 - X^*)$  para retirarse.

En el caso de realizar los cálculos se tiene que  $X^* \sim 39,5$  y de esta forma, el jugador experto estaría dispuesto a pagar 60,5 o menos.

Dudas y/o errores:  
 Mario Guajardo  
 mguajard@ing.uchile.cl