



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey
Aux: M. Guajardo, M. Pereira, D. Yung

Solución Clase Auxilliary 7, 23 de Agosto de 2005

Programación Dinámica Determinística y Estocástica

Problema 1

Para desarrollar este problema supondremos que los buses partirán al comienzo del minuto designado de partida, justo después de la llegada de la cantidad d_t de pasajeros. Además supondremos que los pasajeros abordan los buses de acuerdo a su orden de llegada. De acuerdo a esto podemos plantear el siguiente modelo de programación dinámica:

1. Etapas:

- $t = 1, \dots, T$ c/u de los minutos.

2. Variable de estado:

- S_i^t , número de personas que al comienzo del minuto t llevan esperando i minutos para abordar el bus. ($i > 0$, $t \in \{1, \dots, T\}$, $i < t$).
- B_t , el número de buses disponibles, al comienzo del minuto t (antes de la decisión).

3. Variable de decisión:

- N_t , número de buses a despachar al comienzo del minuto t .

4. Recursión:

$$S_i^{t+1} = S_{i-1}^t - \min \left\{ S_{i-1}^t, \max\{0, K \cdot N_t - \sum_{k=i}^{t-1} S_k^t\} \right\} \quad \forall i > 1$$

$$S_1^{t+1} = d_t - \min \left\{ d_t, \max\{0, K \cdot N_t - \sum_{k=1}^{t-1} S_k^t\} \right\}$$

$$B_{t+1} = B_t - N_t$$

- #### 5. Función objetivo:
- Minimizamos los costos acumulados hacia el futuro, asumiendo que tomaremos las decisiones óptimas desde el próximo período en adelante:

$$V_t^*(\vec{S}^t, B_t) = \max_{0 \leq N_t \leq B_t} \left[P \cdot \min\{N_t \cdot K, d_t + \sum_{k=1}^{t-1} S_k^t\} \right. \\ \left. - F \cdot N_t - \sum_{k=1}^{t-1} E_k \cdot \min \left\{ S_k^t, \max\{0, K \cdot N_t - \sum_{i=k+1}^{t-1} S_i^t\} \right\} \right. \\ \left. + V_{t+1}^*(\vec{S}^{t+1}, B_{t+1}) \right]$$

6. **Condiciones de Borde:**

- $\vec{S}^1 = \vec{0}$
- $V_{T+1}^* = -H \cdot \sum_{k=1}^T S_k^{T+1}$
- $B_1 = B$

Problema 2, Control 1 Otoño 2003

1. Consideremos un paradero genérico k . Si el chofer se detiene S se bajaran con seguridad, sin embargo cada una de las $R - S$ personas que están arriba del bus pueden decidir bajarse con probabilidad b_k . Entonces, identificando a cada una de estas personas como una moneda y la probabilidad b_k como la probabilidad de una cara vemos que:

$$P[\text{Se bajen } i + S \text{ personas}] = \binom{R-S}{i} b_k^i (1-b_k)^{R-S-i} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, R-S\}$$

2. Si i personas se bajan ($i \in \{0, 1, \dots, R\}$) entonces quedan $C - R + i$ asientos disponibles en el bus. En el paradero k hay d_k personas que desean subirse. Debido a la capacidad limitada del bus el número de pasajeros que sube es:

$$X(i)^* = \min\{d_k, C - R + i\}$$

Nuevamente, cada uno de estas personas (las que se suben) es escolar con probabilidad q_k . Entonces procediendo como en el punto anterior vemos que:

$$P[\text{Suben } j \text{ escolares} | \text{Bajan } i] = \binom{X(i)^*}{j} q_k^j (1-q_k)^{X(i)^*-j} \quad \forall j \in \{0, \dots, \min\{d_k, C - R + i\}\}$$

3. Bajo estas condiciones las ganancias por venta de pasajes en el paradero k serán:

$$\begin{aligned} E[\text{Ventas}] &= \sum_{i=0}^{R-S} E[\text{Ventas} | S + i] P[\text{Bajan } S + i] \\ &= \sum_{i=0}^{R-S} E[\text{Ventas} | \text{Bajan } S + i] \binom{R-S}{i} b_k^i (1-b_k)^{R-S-i} \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned} E[\text{Ventas} | \text{Bajan } S + i] &= \sum_{j=0}^{X(S+i)^*} E[\text{Ventas} | \text{Bajan } S + i | \text{Suben } j \text{ escolares}] P[\text{Suben } j \text{ escolares}] \\ &= \sum_{j=0}^{X(S+i)^*} E[\text{Ventas} | \text{Bajan } S + i | \text{Suben } j \text{ escolares}] \binom{X(S+i)^*}{j} q_k^j (1-q_k)^{X(S+i)^*-j} \\ &= \sum_{j=0}^{X(S+i)^*} [T_E \cdot j + T_A \cdot (X(S+i)^* - j)] \binom{X(S+i)^*}{j} q_k^j (1-q_k)^{X(S+i)^*-j} \\ &= X(S+i)^* [T_E \cdot q_k + T_A \cdot (1-q_k)] \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 E[\text{Ventas}] &= \sum_{i=0}^{R-S} X(S+i)^* [T_E \cdot q_k + T_A \cdot (1 - q_k)] \binom{R-S}{i} b_k^i (1 - b_k)^{R-S-i} \\
 &= \sum_{i=0}^{R-S} \min\{d_k, C - R + S + i\} [T_E \cdot q_k + T_A \cdot (1 - q_k)] \binom{R-S}{i} b_k^i (1 - b_k)^{R-S-i}
 \end{aligned}$$

4. Si no se detiene el único costo posible es el asociado a que un carabinero lo pare. Entonces, si supongo que las personas que deseaban bajarse por primera vez en ese paradero no están indignadas (y no reclaman una indemnización):

$$\begin{aligned}
 E[\text{Costos}] &= E[\text{Costos}|\text{lo detienen}] \cdot r + E[\text{Costos}|\text{no lo detienen}] \cdot (1 - r) \\
 &= -M \cdot r
 \end{aligned}$$

5. Seguiremos la metodología tradicional.

■ Etapas:

Cada uno de los paraderos, $k \in \{1, \dots, K\}$.

■ Estados:

R_k = Número de pasajeros en el bus antes de parar (o no) en el paradero k .

S_k = Número de pasajeros que deseaban bajarse en el paradero $k - 1$.

■ Decisión:

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si el chofer decide detenerse en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$$

■ Variables aleatorias:

i_k = Número de personas que desearán bajarse por primera vez en el paradero k .

j_k = Número de escolares que abordan el bus en el paradero k .

$$l_k = \begin{cases} 1 & \text{si le sacan una multa en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$$

■ Función de beneficio y recurrencias:

$$\begin{aligned}
 P_{k+1} &= X_k \cdot \min\{C, P_k - S_k - i_k + d_k\} + (1 - X_k) \cdot P_k(1 - l_k) \\
 S_{k+1} &= (S_k + i_k) \cdot (1 - l_k) \cdot (1 - X_k)
 \end{aligned}$$

■ Función de beneficios:

Para el último período ideo un paradero imaginario $K + 1$ donde la función de costos es el neutro aditivo.

$$V_{K+1}(P_{K+1}, S_{K+1}) = 0$$

Para el resto de los paraderos la función de beneficios es la siguiente.

$$V_k^*(P_k, S_k) = \max\{V_k(P_k, S_k, 1), V_k(P_k, S_k, 0)\}$$

Donde:

$$\begin{aligned} V_k((P_k, S_k, 1)) &= \sum_{i=0}^{P_k-S_k} [\min\{d_k, C - P_k + S_k + i\} [T_E \cdot q_k + T_A \cdot (1 - q_k)] \\ &+ V_{k+1}^*(\min\{C, P_k - S_k - i + d_k\}, 0)] \cdot \binom{P_k - S_k}{i} b_k^i (1 - b_k)^{P_k - S_k - i} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} V_k((P_k, S_k, 0)) &= \sum_{i=0}^{P_k-S_k} \left[r \cdot (-M + V_{k+1}^*(0, 0)) \right. \\ &\quad \left. + (1 - r) \cdot V_{k+1}^*(P_k, S_{k+1}) \right] \cdot \binom{P_k - S_k}{i} b_k^i (1 - b_k)^{P_k - S_k - i} \end{aligned}$$

con $S_{k+1} = S_k + i$

■ Condiciones de borde:

$S_1 = 0$ (al comienzo nadie quiere bajar, de hecho el bus es vacío)

$P_1 = 0$ (el bus parte vacío)

$X_K = 1$ (obligatoriamente paro en el último paradero)

Dudas y/o errores:
Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl