



Universidad de Chile  
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa  
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey  
Aux: M. Guajardo, M. Pereira, D. Yung

Clase Auxilliary 8, 24 de Agosto de 2005

## Programación Dinámica Estocástica

### Problema 1

Suponga que a comienzos de la próxima semana usted tendrá a su disposición cierta cantidad de dinero  $M$  para sus gastos personales hasta fin de año. Usted desea gastar todo el dinero antes del próximo año, por lo tanto, el valor que para usted tiene un peso de los  $M$  es cero después del 31 de diciembre del presente, (suponga que el fin de año corresponde a un domingo).

Usted debe decidir cuánto gastar semana a semana de modo de maximizar su beneficio esperado. La decisión de cuánto gastar en una semana dada se toma a comienzos de esa semana y no se cambia (como buen ingeniero planificador y mal vividor). Si la semana  $k$ ,  $k = 0, \dots, T$  usted gasta  $G$  pesos, entonces el beneficio percibido puede ser representado por:

$$\sqrt{(a_k + b_k) \cdot G}$$

Donde  $a_k > 0$  es una constante y  $b_k$  es una variable aleatoria positiva con función de densidad  $f_{b_k}(x)$ . La variable aleatoria intenta modelar el hecho que usted no sabe todas las actividades que realizará en la semana y sus respectivos beneficios. Por ejemplo, si una semana decide gastar \$5.000 y el día miércoles se entera que hay un recital de su conjunto favorito por \$5.000 entonces su beneficio aumentará.

1. Determine el valor esperado de su beneficio en la semana  $k$  si decide gastar  $G$ .
2. Formule un modelo de programación dinámica que le permita resolver el problema. Entregue variable de estado, de decisión, aleatoria, función de beneficio acumulado, etc.

### Problema 2

El destacado dúo de humoristas universitarios J&M se encuentra semana a semana muy complicado al tener que elegir entre dos alternativas:

- Crear una nueva rutina para su show
- Repetir alguna de la temporada anterior

Crear una nueva rutina en la  $k$ -ésima semana de la presente temporada requiere un esfuerzo que ellos valoran en  $C(k)$ . Repetir una rutina antigua no requiere esfuerzo, pero si se usa una rutina antigua se corre el riesgo de que sus seguidores protesten. La probabilidad de que sus seguidores reclamen en caso de usar una rutina antigua es  $p_n$ , donde  $n$  es el número de períodos consecutivos en que se ha repetido la rutina. En estos casos, ambos integrantes del grupo ven su ánimo visiblemente afectado, malestar que puede ser cuantificado en una cantidad  $D(n)$ , (con  $n$  definido igual que antes).

Además, si a lo largo del semestre se ha repetido rutinas antiguas en  $r$  ocasiones existe una probabilidad  $q_r$  de que falten chistes para su gran Show de Fin de Temporada, donde no pueden repetir rutinas de temporadas anteriores. En este caso se verán obligados a crear  $m$  rutinas para presentarse a éste evento, con el consiguiente esfuerzo que esto implica (de lo contrario, siempre tienen chistes para armar ese último show sin esfuerzo adicional).

Cada temporada de “humor diferente” está compuesta por  $T$  shows, uno cada semana.

- (a) Describa las características que permiten modelar este problema utilizando programación dinámica estocástica.
- (b) Plantee un modelo de programación dinámica que le permita a nuestro estimado dúo decidir si debe crear o repetir rutinas cada semana.

### Problema 3, CTP 4 Otoño 2004

Una tienda ha importado  $S$  unidades de un exclusivo producto, las cuales espera vender durante la temporada de Invierno, que dura  $T$  semanas. Al comienzo de cada semana  $t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) del horizonte, la tienda mira el stock disponible, debiendo decidir el precio  $P_t$  al cual venderá los productos en esa semana. La tienda no tiene la posibilidad de reabastecerse durante la temporada, pero considere que  $S$  es tal que la tienda sabe con seguridad que puede cubrir la demanda de sus  $N$  clientes durante el horizonte de  $T$  semanas.

De acuerdo a la política comercial de la tienda, existen 3 precios posibles cada semana:  $P^a$  (precio alto),  $P^m$  (precio medio) y  $P^b$  (precio bajo).

La tienda enfrenta una demanda aleatoria que depende del precio fijado en la etapa anterior, esto es: si en la semana  $t - 1$  el precio fue  $P_{t-1}$ , entonces en la semana  $t$  la probabilidad que la demanda sea  $j$  unidades es  $D_j(P_{t-1})$ , con ( $j = 0, \dots, N$ ). Un cliente a lo más compra una unidad cada semana. La tienda mantiene convenios con otras compañías, mediante los cuales los clientes de la tienda pueden adquirir descuentos cada semana (un cupón de descuento es válido sólo por 1 semana). Se sabe que la probabilidad que un cliente cualquiera que llega a comprar a la tienda posea un cupón de descuento es  $q$ , independiente de la semana  $t$ . Tales clientes tienen un descuento del 10 por ciento, por lo que pagan  $0.9P_t$ . Al final de la temporada, la tienda venderá los productos sobrantes a un país sin mar (ni gas) a un precio unitario de  $\$V$ , con  $V < P^b$ .

La situación de la tienda no es trivial, debido a que la Comisión Antimonopolios vigila atentamente los precios fijados por la tienda. Así, si en una semana  $t - 1$  cualquiera la tienda fijó el precio en  $P^a$ , con probabilidad  $P_{multa}$  la Comisión Antimonopolios cursará una multa en la semana  $t$  consistente en el cierre de la tienda durante la semana  $t$  más una suma de  $\$M$ . En este caso, la tienda enfrenta un costo por demanda insatisfecha de los clientes que querían comprar en la semana  $t$  igual a  $\$C$  por cada cliente que no pudo comprar el producto en esa semana. Además, al final de la temporada, la tienda enfrentará un costo residual de  $\$K$  por cada vez que un cliente no haya podido comprar el producto (cualquiera haya sido la semana), asociado a una pérdida de credibilidad del mercado. Considere que en las semanas en que la tienda es cerrada por la Comisión Antimonopolios, la tienda igual fija un precio, ya que éste influirá en los beneficios de las siguientes etapas.

Considere que en el período 0 la tienda fijó un precio  $P^b$ , y que si en la última semana  $T$  la tienda fija un precio de  $P^a$ , la Comisión Antimonopolio no podrá ejercer ninguna acción contra la tienda en la etapa  $T + 1$ .

Formule un modelo de programación dinámica estocástica que permita a la tienda definir la política de precios que maximice sus utilidades durante la temporada de Invierno.