



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey
Aux: M. Guajardo, M. Pereira, D. Yung

Solución Clase Auxilliary 6, 16 de Agosto, 2005
Programación Dinámica Determinística

Problema 1

1. En este punto se deben incluir argumentos como: Existe un conjunto de decisiones interrelacionadas, si se modelan adecuadamente las etapas se tendrá que la decisión para una de ellas es independiente de decisiones pasadas y sólo dependerá de variables de estado, etc.
2. De acuerdo al procedimiento usual para definir un modelo de programación dinámica se tendrá:

- **Etapas:**

Cada uno de los barrios, $m : 1, \dots, M$.

- **Variables de estado:**

S_m , el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).

- **Variables de decisión:**

X_m , el número de botones asignados al barrio m .

- **Recurrencia de estados:**

$$S_{m+1} = S_m - X_m$$

- **Función de beneficios:**

$$V_m(S_m, X_m) = P(X_m) + V_{m+1}^*(S_m - X_m)$$

Donde:

$$V_m^*(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

- **Condiciones de borde:**

$$V_{M+1}^*(\%) = 0$$
$$S_1 = K$$

3. Al igual que en el punto anterior se tendrá que:

- **Etapas:**

Cada uno de los barrios, $m : 1, \dots, M$.

- **Variables de estado:**

S_m , el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).

- **Variables de decisión:**

X_m , el número de botones asignados al barrio m .

- **Recurrencia de estados:**

$$S_{m+1} = S_m - X_m$$

■ **Función de beneficios:**

$$V_m(S_m, X_m) = P(X_m) - r_m \cdot \max\{0, X_m - U_m\} - t_m \cdot \max\{0, L_m - X_m\} + V_{m+1}^*(S_m - X_m)$$

Donde:

$$V_m^*(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

■ **Condiciones de borde:**

$$\begin{aligned} V_{M+1}^*(\%) &= 0 \\ S_1 &= K \end{aligned}$$

4. De acuerdo al punto anterior y a los datos provistos en el enunciado tendremos que:

Para **m=3**:

S_3	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$x_3 = 5$	V_3^*	x_3^*
0	-40	-	-	-	-	-	-40	0
1	-40	30	-	-	-	-	30	1
2	-40	30	70	-	-	-	70	2
3	-40	30	70	80	-	-	80	3
4	-40	30	70	80	80	-	80	4
5	-40	30	70	80	80	90	90	5

Para **m=2**:

S_2	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$x_2 = 5$	V_2^*	x_2^*
0	-70	-	-	-	-	-	-70	0
1	0	-35	-	-	-	-	0	0
2	40	35	5	-	-	-	40	0
3	50	75	75	35	-	-	75	1,2
4	50	85	115	105	55	-	115	2
5	60	85	135	145	125	80	145	3

Para **m=1**:

S_1	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$x_1 = 5$	V_1^*	x_1^*
5	125	150	145	130	95	30	150	1

Entonces la estrategia es la siguiente:

- Barrio 1: 1 Botones
- Barrio 2: 2 Botones
- Barrio 3: 2 Botones

Esta estrategia consigue un total de 150 votos.

Problema 2, CTP 2 Otoño 2005

Parte 1

1. Falsa. La relación de recursividad es al revés: permite obtener política óptima para n cuando conoce la de $(n + 1)$.
2. Falsa. Se conoce “el óptimo” desde $(n + 1)$ en adelante, para todos los estados posibles en que se puede entrar a esa etapa, por lo que no es necesario resolver nuevamente para las etapas $(n + 1)$ y sgts.
3. Falsa. Nos basta conocer el estado de la etapa en cuestión.

Parte 2

■ **Etapas:** c/u de las 3 regiones.

■ **Variable de estado:**

E_k : número de vendedores que quedan por asignar al comienzo de etapa k .

■ **Variable de decisión:**

e_k : número de vendedores asignados a región k .

■ **Recursión:**

$$E_{k+1} = E_k - e_k$$

■ **Función objetivo:** Minimizamos los costos acumulados hacia el futuro, asumiendo que tomaremos las decisiones óptimas desde el próximo período en adelante:

$$V_k(e_k, E_k) = U_k + V_{k+1}^*(E_{k+1})$$

donde: $V_k^*(E_k) = \max_{1 \leq e_k \leq 4} \{V_k(e_k, E_k)\}$

■ **Condiciones de Borde:**

- $V_4^* = 0$
- $E_1 = 6$

De acuerdo al punto anterior y a los datos provistos en el enunciado tendremos que:

Para **k=3**:

E_3	$e_3 = 1$	$e_3 = 2$	$e_3 = 3$	$e_3 = 4$	V_3^*	e_3^*
1	28	-	-	-	28	1
2	28	41	-	-	41	2
3	28	41	63	-	63	3
4	28	41	63	75	75	4

Para **k=2**:

E_2	$e_2 = 1$	$e_2 = 2$	$e_2 = 3$	$e_2 = 4$	V_2^*	e_2^*
2	21+28=49	-	-	-	49	1
3	21+41=84	42+38=70	-	-	70	2
4	21+63=84	42+41=83	56+28=84	-	84	1,3
5	21+75=96	42+63=105	56+41=97	70+28=98	105	2

Para **k=1**:

E_1	$e_1 = 1$	$e_1 = 2$	$e_1 = 3$	$e_1 = 4$	V_1^*	e_1^*
6	35+105=140	48+84=132	70+70=140	89+49=138	140	1,3

Hay dos posibles política de decisiones que nos llevan al valor óptimo:

1. 1 en región 1, 2 en R.2 y 3 en R.3.
2. 3 en región 1, 2 en R.2 y 1 en R.3

Problema 3

1. MODELO DETERMINÍSTICO

Etapas:

Cada uno de los períodos t ($t \in 1, \dots, T$)

Variable de estado:

S_t = años de uso de la máquina disponible al inicio del período t .

Variables de decisión:

$$X_t = \begin{cases} - & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ n & \text{Reemplazo por máquina de n años,} \end{cases}$$

Función de beneficio (incluye recursión):

$$f_t(S_t, X_t) = \begin{cases} C_{S_t} + f_{t+1}^*(S_t + 1) & \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + f_{t+1}^*(X_t + 1) & \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_t^*(S_t) = \min_{X_t} f_t(S_t, X_t)$$

Donde $f_t^*(S_t)$ = costo mínimo de la operación de la máquina desde el inicio del período t hasta el final, es decir, hasta T si la antigüedad del equipo es S_t .

Condiciones de borde y función objetivo para la primera etapa:

$$\begin{aligned}f_{T+1}(S_{T+1}) &= -V_{S_{T+1}} \\ f_1^* &= \min_{X_1=0, 1, 2, \dots} \left\{ I_{X_1} + C_{X_1} + f_2^*(X_1 + 1) \right\}\end{aligned}$$

Dudas y/o errores:
Mario Guajardo
mgujard@ing.uchile.cl