

## Solución CTP 1

### Martes 3 de Agosto de 2004

1. Se sabe que en cada ronda cada uno de los concursantes que participó en esa etapa es Jefe de Ronda de forma equiprobable. Así dedido a que en la ronda  $s$  participan  $(K + 1 - s)$  personas entonces:

$$J_{ks} = \frac{1}{K + 1 - s}$$

Notar que las probabilidades de jefe de ronda de todos los participantes suman 1 y que la probabilidad de que usted sea Jefe de Ronda es la misma que para el resto de los concursantes.

2. La probabilidad de irse en una ronda en que se está participando(  $s$  ) será:

$$P(\text{Irse}) = P(\text{Ser al que le tiene menos paciencia el jefe de ronda} | \text{No se es el jefe de ronda}) \\ \cdot P(\text{No ser el jefe de ronda})$$

Por lo tanto

$$I_{ks} = \frac{\mu}{\mu(K - s - 1) + \mu} \cdot (1 - J_{ks})$$

Notar que las letras  $\mu$  pueden ser simplificadas y que la competencia de paciencia no es más que una competencia de exponenciales

3. La probabilidad de que un individuo  $k$  llegue y participe en la ronda  $s$ , es equivalente a que no lo hayan echado en las  $s - 1$  rondas anteriores. De la parte anterior, sabemos que la probabilidad que lo echen en la ronda  $s$  es  $I_{ks}$ , por lo tanto la probabilidad que no lo echen en la ronda  $s$  es:

$$(1 - I_{ks})$$

Así:

$$P(\text{Individuo } K \text{ esté y participe en ronda } s) = \prod_{i=1}^{s-1} (1 - I_{ki})$$

lo que es equivalente a multiplicar las probabilidades de que no lo echen en ninguna de las rondas anteriores.

Asimismo, debido a que parten  $K$  jugadores y sólo 2 llegan a la final, habrá  $K-2$  rondas de preguntas en la fase inicial. Entonces, estar en la final significará participar en la ronda  $K-1$ , o bien que no te echen en ninguna de las  $K-2$  rondas anteriores. Así

$$P(\text{Llegar a la final}) = \prod_{i=1}^{K-2} (1 - I_{ki})$$

4. Sabemos que en la final se calcula todo con los datos de Usted y otro finalista que no importará quien sea debido a que todos lo demás concursantes tiene valores similares para la tasa de toque de chicharra y probabilidad de contestar de forma correcta. Es por lo anterior, que el ejercicio se puede resolver considerando un finalista cualquiera como caso general. Así, El tiempo que Usted demora en tocar la chicharra se distribuye según una tasa ( $\lambda_U$ ) y la probabilidad de que la pregunta sea respondida correctamente en caso que usted responda será  $R_U$ . Para el otro finalista estos valores sern  $\lambda_k$  y  $R_k$  respectivamente. Además Usted gana un punto en caso que responda primero (toca chicharra primero)y de forma correcta o bien si el otro finalista responde primero y se equivoca. Así:

$$G = P(\text{ganar el punto en la } i\text{-ésima pregunta}) \\ = P(\text{responder pregunta correctamente}|\text{tocó primero la chicharra}) \cdot P(\text{tocar primero la chicharra}) + \\ P(\text{otro responde mal}|\text{otro toca primero la chicharra}) \cdot P(\text{otro toque primero la chicharra})$$

Así

$$G = \frac{\lambda_U}{\lambda_U + \lambda_k} \cdot R_U + \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_M} \cdot (1 - R_k)$$

5. En la final gana primero el que obtiene M+1 puntos. Sin embargo los puntos que obtiene el perdedor pueden ir desde 0 hasta M. Así

$$P(\text{ganar la final}|\text{Usted llega a la final}) \\ = P(\text{Usted gane } M+1 \text{ puntos primero}) \\ = \sum_{j=0}^M \binom{M+j}{M} G^{M+1} (1-G)^j$$

Donde  $j$  son los posibles puntos que pudiese obtener el otro finalista. Notar además que sólo se combina hasta el valor  $M+j$  debido a que la último punto necesariamente debe ser para Usted.

Con lo anterior se llega a que:

$$P(\text{Ganar juego}) = P(\text{ganar la final}|\text{se llega a la final}) \cdot P(\text{llegar a la final}) \\ = P(\text{Usted gane } M+1 \text{ puntos primero}) \cdot P(\text{llegar a la final}) \\ = \sum_{j=0}^M \binom{M+j}{M} G^{M+1} (1-G)^j \cdot \prod_{i=1}^{K-2} (1 - I_{U_i})$$

Notar que se consideró que el otro finalista podía ser otro concursante cualquiera debido a que  $G$  considera los datos de Usted y otra persona cualquiera como finalistas.

6. Se sabe que la esperanza puede ser condiconada. Además se sabe que las cantidades de dinero U y W se las lleva cualquier persona sin necesidad de que gane el juego por lo que en ese caso no debemos condicionar a que Usted gane el juego. Aplicando lo anterior se obtiene que :

$$E[\text{ingreso}] = E[\text{ingreso}|\text{gana el juego}]P[\text{ganar el juego}] \\ + \sum_{s=0}^{K-2} \sum_{n=0}^{N_s} E[\text{ingreso}|\text{se obtienen } n \text{ preguntas buenas en ronda } s] \cdot P[\text{Se obtienen } n \text{ preguntas buenas en ronda } s] \\ + \sum_{s=0}^{K-2} E[\text{ingreso}|\text{se es Jefe en ronda } s] \cdot P[\text{ser Jefe en ronda } s]$$

$$+ \sum_{j=0}^M E[\text{ingreso} | \text{se gana } M+1 \text{ contra } j \text{ en final} | \text{se llega a la final}] \\ \cdot P[\text{ganar } M+1 \text{ contra } j \text{ en final}] \cdot P[\text{llegar a la final}]$$

Así

$$E[\text{ingreso}] = W \cdot P[\text{ganar el juego}] \\ + \sum_{s=0}^{K-2} \sum_{n=0}^{N_s} \cdot n \cdot U \cdot P[\text{Se obtienen } n \text{ preguntas buenas en ronda } s] \\ + \sum_{s=0}^{K-2} \cdot X \cdot P[\text{ser Jefe en ronda } s] \\ + \sum_{j=0}^M E[\text{ingreso} | \text{se gana } M+1 \text{ contra } j \text{ en final} | \text{se llega a la final}] \\ \cdot \binom{M+1}{j} G^{M+1} (1-G)^j \cdot \prod_{i=1}^{K-2} (1-I_{ki})$$

Para calcular  $E[\text{ingreso} | \text{se gana } M+1 \text{ contra } j \text{ en final} | \text{se llega a la final}]$  se debe considerar el numero de preguntas buenas que responderá Usted y el número de respuestas malas considerando que el máximo de respuestas buenas es  $M+1$  y el máximo de respuestas malas es  $j$  debido a que estamos condicionados a que el resultado terminó  $M+1$  a  $j$ . Supongamos entonces que Usted responde  $\alpha$  preguntas buenas y  $\beta$  malas la probabilidad que usted responda bien una pregunta será:

$$A = \frac{\frac{\lambda_U}{(\lambda_U + \lambda_k)} \cdot R_U}{\frac{\lambda_U}{(\lambda_U + \lambda_k)} \cdot R_U + \frac{\lambda_k}{(\lambda_U + \lambda_k)} \cdot (1 - R_k)}$$

Lo anterior se debe a que Usted tiene  $M+1$  puntos por lo que puede haberlos logrado contestando primero y correctamente o bien, si el otro finalista contesta primero y se equivoca. Por lo tanto la probabilidad de que usted responda correctamente dado que se asume ganó el punto, es que toque primero y responda correcto dividido por la suma entre tocar primero y correctamente y no tocar y que el otro responda mal (osea la probabilidad de ganar el punto  $= G$ ). De forma similar escogemos  $B$  como la probabilidad de haber respondido mal dado que se perdió el punto. Esto será equivalente a tocar primero y responder mal dividido por la suma de tocar primero y responder mal y que el otro finalista toque primero y responda bien (es decir  $1 - G$ ). Así:

$$B = \frac{\frac{\lambda_U}{(\lambda_U + \lambda_k)} \cdot (1 - R_U)}{\frac{\lambda_U}{(\lambda_U + \lambda_k)} \cdot (1 - R_U) + \frac{\lambda_k}{(\lambda_U + \lambda_k)} \cdot R_k}$$

Por lo tanto no nos queda más que calcular la combinatorio sobre las  $\alpha$  preguntas correctas y  $\beta$  preguntas incorrectas. Así:

$$E[\text{ingreso} | \text{se gana } M+1 \text{ contra } j \text{ en final} | \text{se llega a la final}] = \\ \sum_{\alpha, \beta}^{M+1, j} \cdot \binom{M+1}{\alpha} A^\alpha (1-A)^{M+1-\alpha} \cdot \binom{j}{\beta} B^\beta (1-B)^{j-\beta} (\alpha V - \beta J)$$

Vale destacar que la sumatoria significa que  $\alpha$  corre hasta  $M+1$  y que  $\beta$  hasta  $j$

Así

$$\begin{aligned}
E[ingreso] &= W \cdot \sum_{j=0}^M \binom{M+j}{M} G^{M+1} (1-G)^J \cdot \prod_{i=1}^{K-2} (1-I_{Ui}) \\
&+ \sum_{s=0}^{K-2} \sum_{n=0}^{N_s} \cdot n \cdot U \cdot \binom{N_s}{n} (Q_{ks})^n (1-Q_{ks})_s^N - n + \sum_{s=0}^{K-2} \cdot X \cdot J_{Us} \\
&+ \sum_{j=0}^M \sum_{\alpha, \beta}^{M+1, j} \cdot \binom{M+1}{\alpha} A^\alpha (1-A)^{M+1-\alpha} \cdot \binom{j}{\beta} B^\beta (1-B)^{j-\beta} (\alpha V - \beta J) \cdot \binom{M+1}{j} G^{M+1} (1-G)^j \cdot \prod_{i=1}^{K-2} (1-I_{ki})
\end{aligned}$$

Pauta preparada por:  
Cristian Berner B.  
crberner@ing.uchile.cl