



Universidad de Chile  
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa  
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey  
Aux: M. Guajardo, D. Yung

Clase Auxilliary 2, 27 de Julio de 2005

## Repaso Probabilidades

### Problema 1

1. Suponga un banco con 2 cajas, con una fila única. La atención en cada una de ellas, se distribuye según distribuciones exponenciales de parámetro  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente. Si actualmente hay un cliente en cada caja, la cola está vacía y el banco ya cerró sus puertas, ¿Cuál es la distribución del tiempo transcurrido hasta que termina la atención del primer cliente que se va del banco?.
2. Considere una particular definición a penales de un partido de fútbol que terminó sin goles en su tiempo reglamentario. Al finalizar el partido se instala un gran biombo en la mitad de la cancha y cada equipo lanza los penales en arcos distintos sin saber qué pasa al otro lado. Cada jugador del equipo  $A$  convierte un penal con probabilidad  $p$ , independiente de todo lo demás. Por su parte un jugador del equipo  $B$  anota con probabilidad  $q$ , también independiente. Si cada equipo lanza 5 penales ¿Cuál es la probabilidad de que la serie termine con un triunfo para el equipo  $B$  por 4 goles a 3?.
3. En un estación del Metro, el tiempo entre las llegadas de los pasajeros se distribuye según una  $\exp(\mu)$ . Por otro lado el tiempo entre llegadas de los trenes, sigue una  $\exp(\lambda)$ . Suponga que en este momento, no hay ningún pasajero en la estación, dado que el último tren acaba de pasar ¿Cuál es la probabilidad de que en el próximo metro suban  $k$  personas?.  
Hint: Suponga que el tren llega vacío y su capacidad es tal, que todos los pasajeros esperando pueden abordarlo.
4. En una lejana Facultad de Ingeniería una fracción  $p$  de los alumnos son hombres, y el resto mujeres. Además una fracción  $t$  de los hombres ha reprobado a lo menos un ramo. Por su parte una fracción  $r$  de las mujeres también ha perdido el invicto. Si se escoge un estudiante al azar y resulta no estar invicto ¿Cuál es la probabilidad que sea hombre?.

### Problema 2, CTP 1 Primavera 2002

Considere una carrera de la Fórmula Pindy en la cual compiten  $C$  pilotos de diferentes escuderías. En cada una de las  $V$  vueltas de la carrera, un piloto independiente de todo lo demás, con probabilidad  $q = q_1$  puede tener un accidente y quedar fuera de competencia. Esta probabilidad es la misma para todos los pilotos, excepto para nuestro querido Feliceo Baltazar, para el cual  $q = q_2$ , con  $q_2 > q_1$ .

Si un piloto logra terminar la carrera, el tiempo que transcurre desde que parte, en la primera vuelta, hasta que cruza la meta, en la vuelta  $V$ , se distribuye según una  $\exp(\mu)$  para Feliceo, y  $\exp(\lambda)$  para el resto de los conductores.

Por el solo hecho de que Baltazar termine la carrera, la escudería recibe  $T$  u.m., y si gana recibe adicionalmente  $W$  u.m. Por otra parte si nuestro piloto no termina la carrera la escudería debe pagar a la organización  $R$  u.m.

La intención de esta pregunta es encontrar el valor esperado de los beneficios que reporta a la escudería A.J Floppy, contar con los servicios del experimentado Feliceo. Para ello responda las siguientes preguntas.

1. (1.0 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un piloto en particular logre dar más de  $k$  vueltas sin chocar ? ¿Cuál es la probabilidad de que termine la carrera? (trabaje en términos de un  $q$  genérico).
2. (1.5 puntos) Sin considerar a Feliceo, ¿Cuál es la probabilidad de que  $(M - 1)$  de los  $(C - 1)$  pilotos restantes, terminen la carrera?
3. (1.0 puntos) Dado que  $M$  pilotos terminan la carrera (incluido Feliceo) ¿Cuál es la probabilidad de que F. Baltazar sea el ganador?
4. (1.5 puntos) Usando los resultados de las partes 2 y 3, encuentre una expresión para la probabilidad de que Feliceo gane la carrera.
5. (1.0 punto) Finalmente, en función de los resultados de todas las partes anteriores, indique ¿Cuál es el valor esperado del beneficio que reporta a la escudería A.J Floppy contar con los servicios de Feliceo Baltazar?.

### Problema 3, Control 1 Otoño 2001

Suponga que el dueño de un centro de dental quiere definir la política de citaciones de pacientes. Cada dentista puede atender 2 pacientes en el período en estudio. El primer paciente se cita al comienzo de la sesión ( $t_1 = 0$ ) y el segundo se cita en el instante  $t_2 = x$ . Se ha observado que todos los pacientes son puntuales.

Los tiempos de cada atención son variables aleatorias iid con distribuciones Uniformes entre  $a$  y  $b$  [hrs]. Así, cuando el segundo paciente llega al centro dental existen dos posibilidades:

- El dentista está ocupado atendiendo al primer paciente. En este caso, el segundo cliente debe esperar hasta que termine la atención del primero para ser atendido.
- El dentista está ocioso, ya que terminó de atender al primer paciente. El segundo cliente se atiende de inmediato.

El dentista cobra  $M[\$/hr]$  independientemente si está trabajando o no, por lo que a Ud. le interesa que este se desocupe en el menor tiempo posible de la atención de los 2 pacientes. Sin embargo, si un paciente llega y su dentista está ocupado el centro percibe un costo de  $P[\$/hr]$  mientras éste espera.

Se quiere buscar cuál es el instante  $x$  óptimo para citar al 2° paciente si el tomador de decisiones es neutral al riesgo. Para ello conteste las siguientes preguntas.

- a) Si el segundo paciente es citado en el instante  $x$  y por lo tanto llega al sistema en el instante  $x$  (recuerde que es puntual), ¿Cuál es la probabilidad que encuentre al dentista ocupado atendiendo al primer paciente y por lo tanto tenga que esperar para recibir su atención?.
- b) Si al llegar a la consulta, el segundo cliente encuentra al dentista ocupado, ¿Cuál es la esperanza del tiempo que tendrá que esperar hasta comenzar a ser atendido?. ¿Cuál es la esperanza si lo encuentra desocupado?. Entonces, si el segundo cliente llega a la consulta en el instante  $x$ , ¿Cuál es la esperanza del tiempo de espera ?.
- c) ¿Cuál es la esperanza del tiempo que el dentista estará en el centro dental?.
- d) Utilizando las partes anteriores, defina el problema de optimización que debe resolver el dueño de la consulta. Encuentre el momento óptimo para citar al segundo paciente.