Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A Optimización
Profesor: Richard Weber
Guillermo Duran
Auxiliares: Marianela Pereira
Ximena Schultz
Matías Pulido

Clase Auxiliar Nº 4
29 de agosto de 2005

Pregunta 1 (Control 1 Otoño 1999)

a) Justifique o rechace la siguiente afirmación:
"Un modelo matemático debe tener la mayor fidelidad representativa posible".

b) Describa brevemente en qué consiste la validación de un modelo matemático. ¿Qué curso de acción debe tomarse si un modelo no cumple la validación?.

c) Justifique la denominación de "método" para los procedimientos de optimización llamados método del gradiente y método de Newton.

d) Indique una ventaja y una desventaja del método de Newton frente al método del gradiente.

e) Señale bajo qué condiciones un óptimo de un problema de programación no lineal no cumple las condiciones de Kuhn-Tucker.

f) Suponga un punto que cumple las condiciones de Kuhn-Tucker. ¿Puede afirmarse que es un óptimo?. Analice las posibles situaciones.

g)Explique qué es un problema de decisión y qué es un problema de optimización. Dé un ejemplo de cada uno. (1 punto)

h) i) Escriba y grafique un problema de programación lineal infactible. (1 punto)

ii) ¿Puede existir un óptimo de un problema de programación lineal que no sea un vértice del poliedro factible?
Si la respuesta es si, de un ejemplo y grafíquelo; si la respuesta es no, explique porque. (1 punto)

Pregunta 2 (Control 1 otoño 2004)

Se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & y - x \\ \text{s.a.} & x^2 - y \geq 0 \\ & x^2 + y^2 \leq 2 \end{array}$$

1. Buscar el (los) óptimo(s) global(es) del problema a través del análisis gráfico y verifique numéricamente que cumple las condiciones de KKT.

2. Encuentre al menos 2 puntos que verifiquen KKT y no sean óptimos globales del problema. Por qué puede darse esta situación? Justifique con detalle todas las afirmaciones que realice.

3. Suponga que la primera restricción es modificada a $x^2 + y \leq 0$. Encuentre todos los puntos que verifiquen KKT. Son óptimos globales del problema? Justifique con detalle todas las afirmaciones que realice.

Problema 3

La empresa GONZALITO Ltda., produce prendas de vestir de alto corte. Para esto, compra P tipos de telas diferenciadas por la calidad. A partir de estos insumos se pueden confeccionar K prendas distintas de cada una de los tipos de tela, o sea disponen de $P \times K$ tipos de prendas diferentes. Si se procesa 1 m^2 de tela p se obtienen A_{kp} unidades de prenda k.

Cada mes se compra una cierta cantidad de m^2 de cada tipo de tela. La capacidad de procesamiento de la máquina utilizada es de $CM m^2$ de insumo cada mes. Un estudio de predicción de la demanda indica que cada mes se pueden vender hasta D_{kt} prendas del tipo k, a un precio P_k cada una.

Por otro lado, la empresa arrienda una fabrica donde se puede almacenar stock de insumos y productos terminados, a un costo de CSI_p (\$ / m^2 por mes) para la tela de tipo p y CSP_k (\$ / prenda por mes) para el producto final k. Asuma stocks iniciales nulos.

El costo de compra de telas es de CI_p (\$ / m^2) para cada tela, y el costo de procesarlas es de CP_{pk} (\$ / m^2) para cada tela y cada prenda. Asuma que todos los movimientos y producción se hacen al principio de cada mes.

Formule un problema de programación lineal continua que determine la producción, los niveles de stock, las compras de insumos y las ventas de prendas en cada periodo, maximizando la utilidad. Preocúpese de detallar todas las variables de decisión que utiliza explicando qué significa cada una. Comente si está haciendo alguna simplificación para suponer que todas las variables son continuas.

Dudas y/o consultas:
mapereir@ing.uchile.cl
xschultz@ing.uchile.cl

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A Optimización
Profesor: Richard Weber
Guillermo Duran
Auxiliares: Marianela Pereira
Ximena Schultz
Matías Pulido

Clase Auxiliar Nº 4
29 de agosto de 2005

Pregunta 1

a) Se Rechaza la afirmación.
La mayor fidelidad representativa implica una gran complejidad de modelo. Esto atenta contra una solución medianamente viable.

b) La validación consiste en verificar que el modelo matemático construido represente adecuadamente el problema por resolver.
La validación se puede hacer con datos históricos. En este caso el modelo debe representar la situación del sistema en la época histórica de los datos.
También la validación puede hacerse mediante modificaciones sustanciales de uno o más parámetro, cuyo resultado en la solución es perfectamente predecible.
Si el modelo no cumple la validación debe volverse a la etapa de modelamiento y luego a la resolución nuevamente para volver a validar finalmente.

c) En ambos casos no hay seguridad de encontrar el óptimo en un número finito de pasos.

d) Ventaja del método de Newton frente al gradiente es su mejor convergencia.
La desventaja más importante del método de Newton es que dependiendo del punto de partida y la función a optimizar este procedimiento puede alejarse del óptimo y no encontrarlo.
Esto nunca ocurre con el método del gradiente.

e) Si el óptimo no es regular no cumplirá Kuhn- Tucker.

f) Si un punto cumple Kuhn – Tucker no pude afirmarse que se óptimo local o global. Las condiciones son solo necesarias.

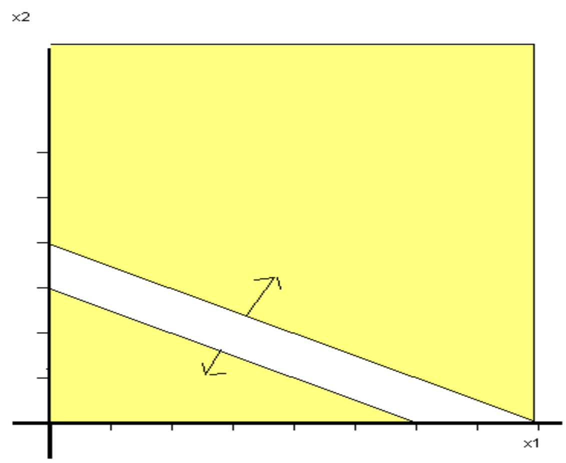
g) Un problema de decisión es un problema en el cual se debe seleccionar entre alternativas, no implica necesariamente la obligación de optimizar. Un ejemplo de un problema de decisión es aquel que se enfrenta al comprar un producto del cual no se tiene información.

Un problema de optimización en cambio, es un problema en el cual se debe tomar la decisión que permita obtener el mejor desempeño de un sistema, los problemas generales de optimización desean encontrar el mejor valor de una medida de desempeño (función objetivo) con la condición adicional que las variables de decisión cumplan ciertas limitaciones (restricciones). Un ejemplo de problema de optimización puede ser aquel en que se debe decidir la ruta óptima a utilizar por una empresa para minimizar los costos de transporte sujeto a la cantidad de vehículos que posee la empresa.

Los ejemplos son subjetivos, utilizar criterio.
Nota de corrección: 0,25 para cada explicación y 0,25 para cada ejemplo.

h) i)Un ejemplo puede ser: Problema infactible:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1+x_2 \\ \text{s.a } x_1+2x_2 &\leq 6 \\ x_1+2x_2 &\geq 8 \\ x_1,x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

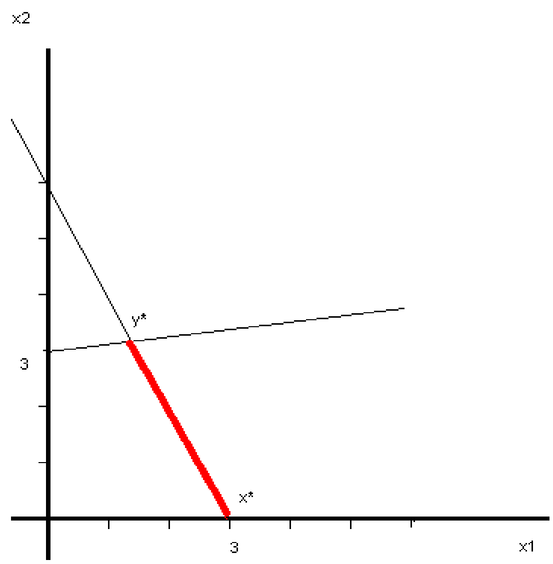


Nota de corrección 0,5 para el ejemplo y 0,5 para el grafico.

ii)) Si, esto sucede cuando la pendiente de la función objetivo tiene el mismo valor que la pendiente de una de las restricciones. (son paralelas)

Cualquier ejemplo que cumpla con la condición anterior estará bueno. Uno de estos pude ser:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1+x_2 \\ \text{s.a } -x_1+3x_2 &\leq 6 \\ 2x_1+x_2 &\leq 8 \\ x_1,x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

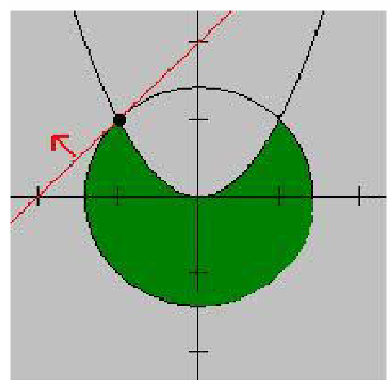


Nota de corrección 0,5 si responden que si y 0,5 si esta bien el ejemplo.

Pregunta 2

1. Veamos el análisis gráfico:

El punto óptimo es el (-1,1).



Verifiquemos las condiciones de KKT:

Llevemos al problema a la forma necesaria para aplicar KKT:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & x - y \\ \text{s.a.} & -x^2 + y \leq 0 \\ & x^2 + y^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

Ambas restricciones son activas en el óptimo, por lo tanto debe satisfacerse que

$$\nabla f(-1,1) + \mu_1 \nabla g_1(-1,1) + \mu_2 \nabla g_2(-1,1) = 0$$
$$\mu_1 g_1 = 0 \wedge \mu_2 g_2 = 0$$

$$\mu_1(-x^2 + y) = 0 \Rightarrow \mu_1 \in \Re$$
$$\mu_2(x^2 + y^2 - 2) = 0 \Rightarrow \mu_2 \in \Re$$

Así:

$$\nabla f(x,y) = (1,-1) \Rightarrow \nabla f(-1,1) = (1,-1)$$
$$\nabla g_1(x,y) = (-2x,1) \Rightarrow \nabla g_1(-1,1) = (2,1)$$
$$\nabla g_2(x,y) = (2x,2y) \Rightarrow \nabla g_2(-1,1) = (-2,2)$$

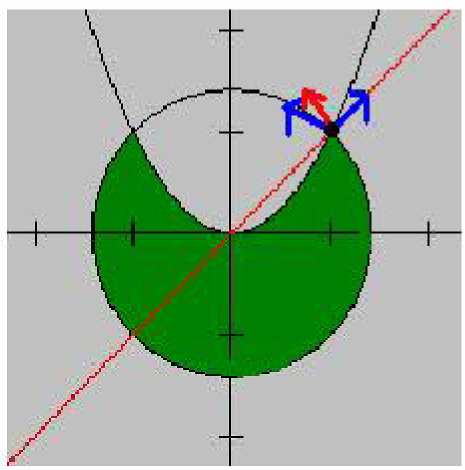
Luego tenemos: $$(1,-1) + \mu_1(2,1) + \mu_2(-2,2) = 0$$

El sistema queda:

$$2\mu_1 - 2\mu_2 = -1$$
$$\mu_1 + 2\mu_2 = 1$$
$$\mu_1 = 0, \mu_2 = \frac{1}{2}$$

Con esto el punto verifica KKT.

2. Existen solo 2 puntos, además del óptimo, que cumplen KKT, veámoslo gráficamente:



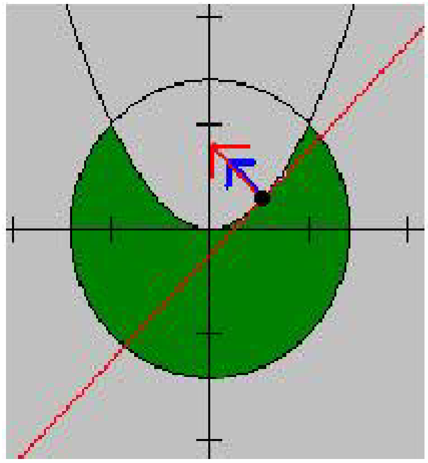
Vemos que el punto (1,1) cumple con KKT, verifiquémoslo numéricamente
En este punto ambas restricciones son activas, luego $\Rightarrow \mu_1 \wedge \mu_2 \in \Re$ (como en la parte 1). Se tiene también que:

$$\nabla f(1,1) = (1,-1)$$
$$\nabla g_1(1,1) = (-2,1)$$
$$\nabla g_2(1,1) = (2,2)$$

Así se tiene que:

$$-2\mu_1 + 2\mu_2 = -1$$
$$\mu_1 + 2\mu_2 = 1$$
$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{2}{3}, \mu_2 = \frac{1}{6}$$

Luego se verifica que el punto cumple KKT.



Para calcular el punto que lo cumple se pueden usar 2 formas:
-La primera dice que el punto viene dado por donde el gradiente de la función objetivo sea paralelo al de la primera restricción, o sea:

$$(1,-1) = \alpha(-2x, 1)$$
$$\Rightarrow \alpha = -1$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Y como además el punto pertenece a la parábola, ¼ - y = 0 =» *y* = ¼

Finalmente el punto buscado es el (½, ¼).
-La segunda opción es encontrar el punto donde la función objetivo intersecta en un solo punto a la parábola, o sea se busca que:

$$y - x = a$$
$$x^2 - y = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = y$$

Luego

$$x^2 - x - a = 0$$

As, para que la intersección sea un solo punto *a* debe ser tal que la expresión anterior sea un cuadrado perfecto, luego *a* = ¼ con lo que nos queda:

$$(x - \frac{1}{2})^2 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Con esto $y = (½)^2 = ¼$, luego el punto que se busca es el (½, ¼).

Luego vemos del gráfico que el punto (½, ¼). cumple con KKT, verifiquémoslo numéricamente

En este punto solo la primera restricción es activa y la segunda inactiva, luego

$$\mu_1(-x^2 + y) = 0 \Rightarrow \mu_1 \in \Re$$
$$\mu_2(x^2 + y^2 - 2) = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$$

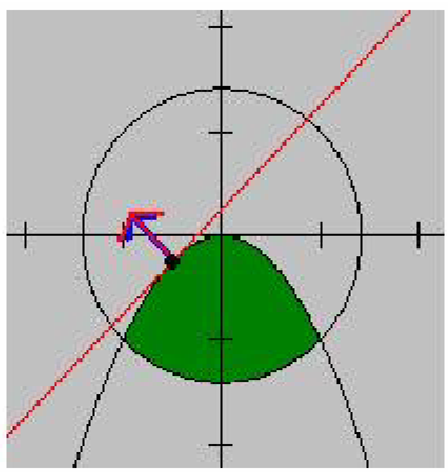
$$\nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = (1, -1)$$

$$\nabla g_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = (-1, 1)$$

Así se tiene que con $\mu_1 = 1$ se cumple la condición de KKT.

Esta situación puede darse ya que la región factible no es convexa, lo cual se prueba de la siguiente forma:
Sabemos que los puntos (-1,1) y (1,1) pertenecen a la región factible, luego si fuera convexo cualquier punto de la recta λ(-1 , 1)+(1-λ)(1,1) debiera pertenecer a la región factible, tomemos λ= ½, con esto resulta el punto (0,1) que claramente no pertenece a la región factible ya que 0^2-1 = -1 < 0 =» la región factible no es convexa.

3. En este caso tenemos solo un punto que cumple KKT, dado que la región factible y la función objetivo es convexa. El óptimo se muestra en la figura:



Para calcular el óptimo se pueden usar 2 formas:
- La primera dice que el óptimo viene dado por donde el gradiente de la función objetivo sea paralelo al de la primera restricción, o sea:

$$(1, -1) = \alpha(2x, 1)$$
$$\Rightarrow \alpha = -1$$
$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Y como además el punto pertenece a la parábola, ¼ + y = 0 =» *y* = -¼
Finalmente el punto buscado es el (-½, -¼).
-La segunda opción es encontrar el punto donde la función objetivo intersecta en un solo punto a la parábola, o sea se busca que:

$$y - x = a$$

$$x^2 + y = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = -y$$

Luego

$$x^2 + x + a = 0$$

As, para que la intersección sea un solo punto *a* debe ser tal que la expresión anterior sea un cuadrado perfecto, luego *a* = ¼ con lo que nos queda:

$$(x + \frac{1}{2})^2 = 0$$
$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Con esto $y = -(½)^2$ =- ¼ , luego el punto que se busca es el (-½, -¼).
Verifiquemos que cumple con KKT:

En este punto solo la primera restricción es activa y la segunda inactiva, por lo que directamente diremos que $\mu_1 \in \Re \wedge \mu_2 = 0$, luego tenemos:

$$\nabla g_1(x, y) = (2x, 1)$$

Luego

$$\nabla f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = (1, -1)$$
$$\nabla g_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = (-1, 1)$$

Así con $\mu_1 = 1$ se cumple la condición de KKT.

Como la región factible y la función objetivo son convexas, el punto encontrado es óptimo global.

Demostremos que la región factible y la función objetivo son convexas:

- Función Objetivo:

Calculemos el hessiano de la función objetivo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que es definido positivo (y negativo a la vez) por lo que la función es convexa.

- Región Factible:

Se puede usar cualquier método para demostrar la convexidad, por ejemplo se pueden tomar 2 puntos cualquiera de la región factible: (x, y) y (x', y'). Demostremos que cualquier punto de la recta $\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y') =$ con $\lambda \in [0, 1]$ pertenece a la región factible.

Problema 3

Variables de Decisión

$XP_{pkt} =$ M^2 del insumo p destinado a la fabricación del producto k en el mes t

$SP_{pt} =$ M^2 de stock del insumo p al comienzo del mes t

$Q_{kt} =$ Cantidad de prendas tipo k fabricadas en el mes t

$SK_{kt} =$ Stock de prendas tipo k al comienzo del mes t

$KV_{kt} =$ Cantidad de prendas de tipo k vendidas en el mes t

$I_{pt} =$ M^2 del insumo p comprados en el mes t

Restricciones

a. Capacidad de procesamiento de la máquina

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{k=1}^{K} XP_{pkt} \leq CM \qquad , \forall t$$

b. Ecuación de Inventario de Insumos

$$SP_{pt} + I_{pt} = \sum_{k=1}^{K} XP_{pkt} + SP_{pt+1} \qquad , \ \forall p, t$$

c. Relación entre los insumos usados y las prendas creadas

$$\sum_{p=1}^{P}(XP_{pkt}\cdot A_{kt})=Q_{kt} \qquad , \ \forall k,t$$

d. Ecuación de inventario de prendas

$$SK_{kt}+Q_{kt}=KV_{kt}+SK_{kt+1} \qquad , \ \forall k,t$$

e. Ventas de cada prenda por mes

$$D_{kt}\geq KV_{kt} \qquad , \ \forall k,t$$

f. Condición de Borde. (Stock Inicial nulo)

$$SP_{p0}=SK_{k0}=0 \qquad , \ \forall p,k$$

g. Naturaleza de las variables

$$\left.\begin{array}{l} XP_{pkt} \\ I_{pt} \\ SP_{pt} \end{array}\right\}\geq 0 \qquad \qquad \left.\begin{array}{l} Q_{kt} \\ SK_{kt} \\ KV_{kt} \end{array}\right\}\geq 0$$

$$\forall p,k,t$$

Función Objetivo

Máx $\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}KV_{kt}\cdot P_k-\sum_{p=1}^{P}\sum_{t=1}^{T}(SP_{pt}\cdot CSI_p+I_{pt}\cdot CI_p)-\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}SK_{kt}\cdot CSP_k-\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P}\sum_{t=1}^{T}XP_{kpt}\cdot CP_{pk}$

Dudas y/o consultas:
mapereir@ing.uchile.cl
xschultz@ing.uchile.cl