



Control N° 2
5 de octubre de 2005

Pregunta 1

- 1) a) Dado un problema lineal en forma estándar, con n variables y m restricciones ($n \geq m$), se sabe que el número de vértices del poliedro factible está acotado superiormente por el número combinatorio $\binom{n}{m}$. Muestre un ejemplo donde dicha cota no se alcance. Justifique. (1 punto)
- b) Si alguna/s de las m restricciones fueran redundantes, la cota enunciada en a) aumentaría o disminuiría? Justifique. (1 punto)
- 2) a) ¿Puede usar el algoritmo SIMPLEX para justificar que PL es un problema polinomial? (1 punto)
- b) ¿Qué algoritmos polinomiales se conocen para resolver PL's? Mencione al menos dos. (1 punto)
- 3) Demuestre que si el problema primal es no acotado entonces su correspondiente dual es infactible (explícite qué formulaciones está usando para primal y dual). Puede usar para hacer la demostración teoremas vistos en clase. (1 punto)
- 4) Suponga que en un problema lineal se modificó algún coeficiente de la función objetivo o algún elemento del vector b , y la base óptima del problema original ya no es óptima para el nuevo problema. Especifique en qué casos usted puede aplicar SIMPLEX desde el óptimo del problema primal original, si quiere hallar el óptimo del problema primal modificado. Justifique. (1 punto)

Pregunta 2

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \max \quad x_1 \\ & \text{s.a} \quad 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & \quad \quad 4x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- a) Lleve el problema (P) a la forma estándar y muéstrela gráficamente indicando la solución óptima y la base óptima (no es necesario aplicar el algoritmo SIMPLEX para determinar la solución óptima).

- b) En qué rango se puede variar el coeficiente de la función objetivo c_2 asociado a la variable x_2 manteniendo la solución óptima de (P)? Aplique los conceptos vistos en clase.
- c) Determine la nueva solución óptima aplicando el algoritmo SIMPLEX a partir de la solución óptima de (P) si c_2 cambiase su valor de 0 a 3.
- d) En qué rango se puede variar el coeficiente del lado derecho b_1 asociado a la primera restricción manteniendo la base óptima de (P)? Aplique los conceptos vistos en clase.

Pregunta 3

La peligrosa maleante Carmen SanDeGo, está suelta en la ciudad ScotlandYierd. La agencia Máxima S.A. ha mandado a su famosa detective Pulschuper para que la capture.

Se sabe que Carmen está escondida en la estación E de las P estaciones de la ciudad. Pero para tener suficientes motivos para capturarla Pulschuper debe encontrar exactamente D pistas. Hay una pista por estación y no hay pistas ni en la estación E ni en la estación 1, donde se encuentra la agencia Máxima S.A..

En cada estación i Pulschuper tiene la opción de buscar o no la pista, si la decide buscar demora h_i en encontrarla.

Pulschuper se demora un tiempo b_{ij} entre la estación i y la estación j si se va en bus, aunque puede optar tomar un taxi con el que se demora t_{ij} ($t_{ij} < b_{ij}$) o un metro el que demora m_{ij} ($m_{ij} < t_{ij}$). Sin embargo sólo cuenta con un determinado número de pasajes en taxi T y en metro M ($M+T < P$). Además, sólo se pueden tomar metros entre estaciones congruentes (una estación se dice **NO**-congruente con otra si ambas son impares)¹.

Considere que las estaciones están numeradas pero no es necesario recorrerlas en orden, ni visitar todas las estaciones.

Considere que no se puede volver a una estación que ya fue visitada. Y que no se puede ingresar a E con menos de D pistas.

Sabiendo que Pulschuper tiene que volver directamente a la agencia cuando encuentre la maleante (es decir debe viajar desde E a 1), plantee un PPLE (Problema de Programación Lineal Entera) que le permita a Pulschuper encontrar a Carmen SanDeGo en el menor tiempo posible.

¹ Asuma que P es par.

Pauta:

Pregunta 1

- 1) a) **1 punto:** Aquí se puede mostrar cualquier ejemplo en que la matriz A tenga columnas l.d. o en que la base formada sea infactible para un determinado \bar{b} . Ej:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En este ejemplo al existir columnas l.d. no se puede tener la

base $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, porque no es invertible y por lo tanto la cota no se alcanza.

El ejemplo puede ser gráfico, lo importante es que existan columnas l.d. o que quede infactible para el \bar{b} del problema.

- b) **1 punto:** Al tener una restricción redundante, se tiene fila menos, pero, adicionalmente, se tiene una columna menos pues se elimina una variable de holgura. Si bien, la cota es una cota, y por ende no cambia, puede mejorarse la

cota que es una cota superior, esto es pasa a ser $\binom{n-1}{m-1} = \frac{1}{n} \binom{n}{m} < \binom{n}{m}$.

- 2) a) **1 punto:** No, dado a que el algoritmo SIMPLEX es un algoritmo exponencial.

- b) **1 punto:** El modelo de Elipsoides (de Kachiyan) y el algoritmo del punto interior (de Karmarkar o el de Nesterov y Nemirovskii).

- 3) **1 punto:** Dado el problema primal:
- $$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \\ \text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad i=1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \end{aligned}$$

El dual queda:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i \leq c_j \quad j=1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \quad i=1, \dots, m \end{aligned}$$

Por el teorema débil de dualidad se tiene que: $\sum c_j \cdot x_j \leq \sum b_i y_i$

Por ende si el problema primal es no acotado, entonces $\sum b_i y_i$ el dual es infactible.

- 4) **1 punto:** Si se modifica algún coeficiente de la función objetivo, la base óptima no pierde factibilidad y por tanto se puede iterar a partir desde el óptimo del problema primal original. Sin embargo, si se cambia algún elemento del vector b , puede ocurrir que se pierda factibilidad (para ver cuando se pierde habría que realizar un análisis de sensibilidad). Si este es el caso se puede iterar con SIMPLEX en el problema dual, a partir del correspondiente óptimo del dual original (y no se puede iterar desde el óptimo del problema primal original, ya que perdió factibilidad).

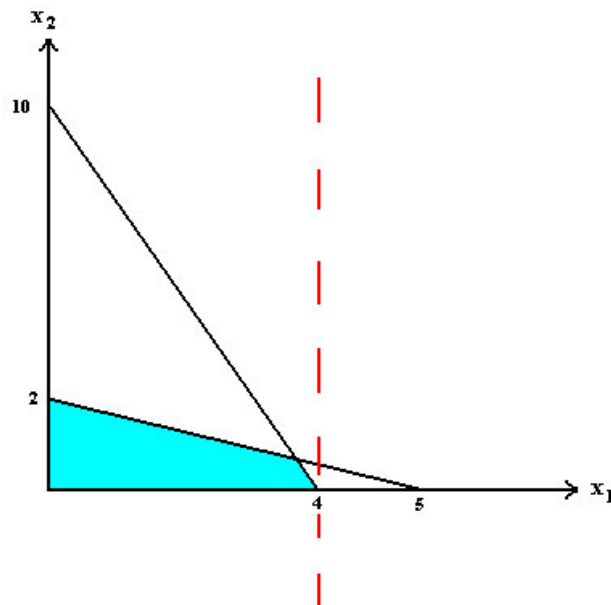
0,5 por cada caso.

Pregunta 2

a) **1,5 puntos:**

Forma estándar: **(0,5)**

$$\begin{array}{llll} \min & -x_1 & & \\ \text{s.a} & 5x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 20 \\ & 4x_1 + 10x_2 & + & x_4 = 20 \end{array}$$



La solución óptima es $(4,0)$. **(0,5)**

La base es $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. **(0,5 con justificación)**

Esto se puede ver porque en el punto (4,0) se tiene que la primera restricción es activa (esto es $x_3 = 0$ y $x_2 = 0$) por lo que la base la constituyen x_1 y x_4 , de donde sale la base. También se puede obtener resolviendo simplex.

b) **1,5 puntos:**

Usando Simplex:

Se tiene que cumplir que $\overline{C}_R = C_R - C_B \cdot B^{-1} \cdot R \geq \vec{0}$

donde $C_R = (0 \ -C_2)$, $C_B = (-1 \ 0)$

$$\begin{aligned} \text{y } B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -4/5 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \overline{C}_R &= (1/5 \ -C_2 + 2/5) \geq (0 \ 0) \\ &\Rightarrow C_2 \leq 2/5 \end{aligned}$$

Usando Análisis de Gráfico:

Se ve que el óptimo cambiará si la función objetivo iguala su pendiente con la primera restricción ($-5/2$), por un lado y con x_1 por el otro (pendiente = 0).

Esto es: $-1/C_2 \leq -5/2 \Rightarrow C_2 \leq 2/5$ **(1)**

y $C_2 \geq -\infty$ **(0,5)**

c) **1,5 puntos (0,75 por cada iteración):**

Se debe resolver:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ & 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 20 \end{aligned}$$

Partiendo de $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Primero se ve si es óptimo, es decir si se cumple: $\overline{C}_R = C_R - C_B \cdot B^{-1} \cdot R \geq \vec{0}$

$$\Rightarrow \overline{C_R} = (0 \quad -3) - (-1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -4/5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = (1/5 \quad -13/5)$$

\Rightarrow No estamos en el óptimo, x_2 entra a la base.

$$\text{Sale el con } \min \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{a_{i2}}} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{2/5}, \frac{4}{42/5} \right\} \Rightarrow \text{sale } x_4 \text{ de la base.}$$

$$\Rightarrow \text{Las nuevas variables básicas son } x_1 \text{ y } x_2, \text{ y la base es } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Se ve si es óptimo

$$\Rightarrow \overline{C_R} = (0 \quad 0) - (-1 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 10/42 & -2/42 \\ -4/42 & 5/42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-2/42 \quad 13/42)$$

\Rightarrow No estamos en el óptimo, x_3 entra a la base.

$$\text{Sale el con } \min \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{a_{i3}}} \right\} = \min \left\{ \frac{160}{10} \right\} \Rightarrow \text{sale } x_1 \text{ de la base.}$$

$$\Rightarrow \text{Las nuevas variables básicas son } x_3 \text{ y } x_2, \text{ y la base es } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Se ve si es óptimo

$$\Rightarrow \overline{C_R} = (-1 \quad 0) - (0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2/10 \\ 0 & 1/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = (2/10 \quad 3/10)$$

\Rightarrow Estamos en el óptimo

$$\Rightarrow B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & -2/10 \\ 0 & 1/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es decir, el óptimo es el (0,2).

d) **1,5 puntos:**

Usando Simplex:

Para que se mantenga la base óptima se debe cumplir: $B^{-1} \cdot b \geq 0$

$$\Rightarrow B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -4/5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ 20 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq b_1 \leq 25$$

Pregunta 3

Variables: **(0,75)**

$$X_{ij} \begin{cases} 1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases} \quad \textbf{(0,2)}$$

$$Y_{ij} \begin{cases} 1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j en bus.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases} \quad \textbf{(0,1)}$$

$$Z_{ij} \begin{cases} 1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j en taxi.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases} \quad \textbf{(0,1)}$$

$$R_{ij} \begin{cases} 1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j en metro.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases} \quad \textbf{(0,1)}$$

$$d_i \begin{cases} 1 & \text{Si busca la pista en la estación i.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases} \quad \textbf{(0,25)}$$

O bien

$$X_{ijk} \begin{cases} 1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j en el medio k.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases} \quad \textbf{(0,5)}$$

$$d_i \begin{cases} 1 & \text{Si busca la pista en la estación i.} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases} \quad \textbf{(0,25)}$$

Aquí, se especifica la naturaleza de las variables, si en alguna parte la contradicen (Por ejemplo hacerlas continuas en la naturaleza de las variables) se baja 0,1.

Restricciones:

$$\sum_{j=1}^P X_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 2, \dots, P \quad \circ \quad \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^3 X_{ijk} \leq 1 \quad \forall i = 2, \dots, P$$

Se sale a lo más una vez de cada estación (0,3).

$$\sum_{i=1}^P X_{ij} \leq 1 \quad \forall j = 2, \dots, P \quad \circ \quad \sum_{i=1}^P \sum_{k=1}^3 X_{ijk} \leq 1 \quad \forall i = 2, \dots, P$$

Se entra a lo más una vez a cada estación (0,3).

En las dos restricciones anteriores es de extrema importancia el \leq , ya que no es necesario recorrer todas las estaciones. Si lo ponen con igualdad está MALO.

$$\sum_{j=1}^P X_{1j} = 1 \quad \circ \quad \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^3 X_{1jk} = 1$$

De la estación 1 se sale exactamente una vez (0,3).

$$X_{E1} = 1 \quad \circ \quad \sum_{k=1}^3 X_{E1k} = 1$$

De la estación E se va directamente a la 1 (0,3).

$$\sum_{i=1}^P X_{iE} = 1 \quad \circ \quad \sum_{i=1}^P \sum_{k=1}^3 X_{iEk} = 1$$

A la estación E se llega exactamente 1 vez (0,3).

$$X_{ij} = 0 \quad \forall i = j \quad \circ \quad \sum_{k=1}^3 X_{ijk} = 0 \quad \forall i = j$$

Esta restricción puede reemplazarse especificando en las demás restricciones que las sumatorias son para $i \neq j$ (0,3).

$$Y_{ij} + Z_{ij} + R_{ij} = X_{ij} \quad \forall i, j \quad \circ \quad \sum_{k=1}^3 X_{ijk} \leq 1 \quad \forall i, j$$

Solamente se utiliza uno de los tres medios de viaje, si es que se viaja **(0,3)**.

$$\sum_{i,j}^P Z_{ij} \leq T \quad \text{o} \quad \sum_{i,j}^P X_{ij2} \leq T$$

No pueden usarse más de T taxis **(0,3)**.

$$\sum_{i,j}^P R_{ij} \leq M \quad \text{o} \quad \sum_{i,j}^P R_{ij3} \leq M$$

No pueden usarse más de M metros **(0,3)**.

$$\sum_i^P d_i = D \quad \sum_i^P d_i = D$$

Deben tenerse D pistas. Esta restricción podría ser mayor o igual a D, ya que el óptimo entregará la igualdad **(0,3)**.

$$d_1 = d_E = 0 \quad d_1 = d_E = 0$$

No se buscan pistas ni en 1 ni en E, ya que no hay **(0,2)**.

$$d_i \leq \sum_j^P X_{ij} \quad \forall i \quad \text{o} \quad d_i \leq \sum_j^P \sum_{k=1}^3 X_{ijk} \quad \forall i$$

No se pueden buscar pistas en estaciones que no se visitaron **(0,3)**.

$$\sum_{i \in S \neq E, j \in S \neq E} X_{ij} \leq \text{card}(S) - 1 \quad \text{o} \quad \sum_{i \in S \neq E, j \in S \neq E} \sum_{k=1}^3 X_{ijk} \leq \text{card}(S) - 1$$

con S todos los subconjuntos de la P estaciones.

No se pueden formar subciclos entre las estaciones **(0,5)**. **Ojo que si se forman subciclos con la estación E (de hecho el óptimo es un subciclo) por lo que es de suma importancia que lo excluyan, sino lo hacen poner la mitad del puntaje.**

$$R_{2i-1,2j-1}=0 \quad \forall i,j=1,...,P/2 \quad \text{o} \quad X_{2i-1,2j-1,3}=0 \quad \forall i,j=1,...,P/2$$

No se pueden tomar metros entre estaciones NO-congruentes. **(0,5)**.

Los \forall son muy importantes, descontar 0,1 en cada restricción que no se especifiquen.

Función Objetivo: **(0,75)**

$$\min z = \sum_{i,j}^P Y_{ij} \cdot b_{ij} + \sum_{i,j}^P Z_{ij} \cdot t_{ij} + \sum_{i,j}^P R_{ij} \cdot m_{ij} + \sum_i^P d_i \cdot h_i \quad \text{o}$$

$$\min z = \sum_{i,j}^P X_{ij1} \cdot b_{ij} + \sum_{i,j}^P X_{ij2} \cdot t_{ij} + \sum_{i,j}^P X_{ij3} \cdot m_{ij} + \sum_i^P d_i \cdot h_i$$

Dudas y Consultas
xschultz@ing.uchile.cl