



UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. DE CIENCIAS FÍS. Y MAT.
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: IN34A - Optimización
Semestre: Primavera 99
Profesores: A.Musalem/ R.Weber
Patricio Conca
A. Muñoz/D.Varela
Auxiliares: Felipe Caro
Walter Krefft, Andrés Pardo
Alvaro Alomar, Richard Vega

CONTROL 3

Miércoles 9 de Junio de 1999

Problema 1

El 1 de enero del año 2000 una reserva ecológica de 1.000.000 de Mts² está ocupada en par por una población de "I" familias donde cada familia posee T_i Mts².

Cada terreno ocupado por seres humanos se encuentra degradado por el uso, sin embargo, si las personas abandonan un terreno éste se recupera 50 años después de ser abandonado y la flora y fauna nativa vuelven a ocuparlo.

Una vez que un terreno es abandonado se puede acortar el proceso de recuperación a 25 años si se invierte en un "tratamiento" del terreno que cuesta R pesos por metro cuadrado. Este tratamiento debe hacerse justo en el momento en que el terreno es abandonado por los seres humanos, si el tratamiento se efectúa después, el proceso de recuperación no acorta y se mantiene en 50 años.

Si se decide tratar el terreno, no es obligatorio tratar la totalidad del terreno expropiado. No obstante, sólo los metros cuadrados tratados tendrán recuperación acelerada de 25 años.

El costo del tratamiento de terreno se paga al contado al momento de aplicarse sobre el terreno.

Cada familia paga a la reserva ecológica un arancel fijo de A pesos anuales, el cual es depositado en la cuenta corriente de la reserva. (Cuando una familia se va de la reserva inmediatamente deja de pagar este arancel).

Usted es nombrado administrador de la reserva ecológica y como tal, tiene la facultad de expropiar los terrenos de las familias que viven dentro de la reserva.

Si decide expropiar el terreno de una familia está obligado a expropiar la totalidad del terreno que posee dicha familia.

Para efectuar una expropiación, tiene que pagarle a cada familia una indemnización fija de Y pesos, más una indemnización de U pesos por metro cuadrado de terreno expropiado. Las indemnizaciones se pagan al contado al momento de la expropiación.

Cuando una familia es expropiada abandona el terreno inmediatamente y comienza el proceso de recuperación del terreno.

Los únicos fondos que usted dispone para pagar las indemnizaciones y para invertir en tratamiento de terreno provienen de la cuenta corriente que posee la reserva, la cual no paga intereses y no se puede sobregirar.

El 1 de enero del año 2000 a la cuenta corriente de la reserva ecológica tiene un saldo de C pesos.

Plantee un PPL que permita decidir qué familias expropiará cada año y cuánto invertirá en tratamiento de terreno cada año, de manera de obtener la mayor superficie de terreno recuperada para el año 2100.

“Observaciones recientes del telescopio espacial Hubble permitieron determinar que la edad del universo es de 13.500 millones de años, esto significa que por cada especie que se extinga estaremos perdiendo una historia de 13.500 millones de años que no volverán a repetirse”.

Problema 2

a) Sea X_1 la solución óptima para el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= c^T x \\ \text{s.a. } Ax &= b \\ x &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

El problema anterior se puede aproximar al siguiente problema relajado

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= c^T x \\ \text{s.a. } Ax &= b \\ 0 &\leq x \leq 1 \end{aligned}$$

donde X_r es la solución óptima del problema relajado.

¿Es posible asegurar que $X_r = X_1$? Fundamente su respuesta.

b) Resuelva los siguientes problemas utilizando el algoritmo de ramificación y acotamiento. Explique claramente cada una de las iteraciones y ramificaciones.

$$\begin{aligned} \text{(i) } \text{MAX } & 2X_1 - 3X_2 + X_3 \\ \text{s.a. } & 10X_1 + 6X_2 \geq 13 \\ & 10X_2 - 8X_3 \leq 11 \\ & 6X_2 + 5X_3 \leq 8 \\ & X_j \in \{0, 1\}; j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Donde el óptimo al resolver el problema relajado, es decir, $X_j \in [0,1]$ ($j = 1, 2, 3$), es el siguiente:

$$X_1=1, \quad X_2=\frac{1}{2}, \quad X_3=1$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \text{Max } & 3X_1 + 2X_2 + 4X_3 \\ \text{s.a. } & 2X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 5 \\ & X_j \in \{0, 1\}; j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Al resolver el problema relajado se tiene que la solución óptima es:

$$X_1 = 1 \quad X_2 = 2/3, \quad X_3 = 1$$

Problema 3

a) Dado el siguiente problema (P):

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \min \quad z = 3x_1 + 2x_2 \\ & \text{s.a} \quad x_1 + x_2 \leq 10 \\ & \quad -2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & \quad 4x_1 + x_2 = 8 \\ & \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

Determine el problema dual (DP) del problema (P).

b) El punto $A = (9/7, 20/7)$ es la solución óptima del siguiente problema (P1).

$$\begin{array}{ll} \text{(P1)} & \min \quad z = 3x_1 + 2x_2 \\ & \text{s.a} \quad x_1 + x_2 \leq 10 \\ & \quad -2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & \quad 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Sea el problema (DP1), el problema dual del problema (P1).

¿Cuál es el valor de la primera variable de decisión (y_1) del problema (DP1) en el óptimo? Fundamente su respuesta.

¿Cuál es la interpretación de este valor de y_1 para el problema (P1)?

c) Muestre las restricciones y la función objetivo del problema (P1) gráficamente. Explique la interpretación de la parte 3(b) en la figura.

Problema 4

Una determinada empresa produce 4 tipos de bloques de concreto. El proceso de fabricación de cada bloque consta de las siguientes etapas: mezclado, vibrado del moldaje e inspección.

En los próximos 30 días se dispone de 800 horas maquinaria para mezclado, 1000 horas de vibrado y 340 horas-hombre para inspección.

Para maximizar el beneficio del próximo mes se ha planteado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } z = & 8x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 50x_4 \\ \text{s.a.:} & x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 16x_4 \leq 800 \\ & 1,5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 1000 \\ & 0,5x_1 + 0,6x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 340 \\ & x_j \geq 0; j=1, 2, 3, 4 \end{array}$$

en donde x_1 , x_2 , x_3 y x_4 representan las cantidades a fabricar del bloque 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

El problema se ha resuelto como minimización obteniéndose la siguiente forma canónica:

$$\begin{aligned}\text{Min } z' &= 28x_3 + 40x_4 + 5x_5 + 2x_6 - 6000 \\ \text{s.a.:} \quad &x_2 + 11x_3 + 19x_4 + 1,5x_5 - x_6 = 200 \\ &x_1 - 12x_3 - 22x_4 - 2x_5 + 2x_6 = 400 \\ &0,4x_3 + 1,6x_4 + 0,1x_5 - 0,4x_6 + x_7 = 20\end{aligned}$$

Las variables de holgura para la primera, segunda y tercera restricción son x_5 , x_6 , y x_7 respectivamente.

Con estos antecedentes se pide:

- a) ¿Cuál es el beneficio unitario mínimo del bloque 3 para que convenga producirlo?
- b) ¿Cuál es el beneficio unitario mínimo del bloque 2 para que convenga producirlo?
- c) ¿Cuál es el precio sombra de 1 hora de mezclado?
Determine entre qué valores de b_1 es válido este precio sombra.

Nota: La matriz básica inversa en el óptimo es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & -1,0 & 0 \\ -2,0 & 2,0 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

PAUTA P1

• VARIABLES DE DECISION

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{SI SE EXPROPIA EL TERRENO DE LA} \\ & \text{FAMILIA } i \text{ EL AÑO } j \\ 0 & \text{SI NO} \end{cases} \quad (0,5 \text{ PLS})$$

$$i \in [1, I] \quad j \in [2000, 2100]$$

$$Y_j = \begin{cases} \text{MONTO TOTAL INVERTIDO ($) EN EL AÑO } j \\ \text{PARA EFECTUAR TRATAMIENTO DE TERRENOS} \\ \text{EXPROPIADOS} \end{cases} \quad (0,5 \text{ PLS})$$

$$FO = \text{MAX} \sum_{j=2000}^{2050} \left[\underbrace{\sum_{i=1}^I X_{ij} \cdot T_i}_{\text{TOTAL MTS EXPROPIADOS EL AÑO } j} - \underbrace{\frac{Y_j}{R}}_{\text{TOTAL MTS TRATADOS EL AÑO } j} \right] + \sum_{j=2000}^{2075} \underbrace{\frac{Y_j}{R}}_{\text{TOTAL MTS TRATADOS EL AÑO } j}$$

(2 PLS)

LOS TERRENOS NO TRATADOS
DETERAN 50 AÑOS EN RECUPERARSE
POR LO QUE UN TERRENO EXPROPIADO
Y NO TRATADO EL 2051 NO ALCANZA

LOS TERRENOS
TRATADOS NO DEBEN
SER MÁS QUE LOS
TERRENOS EXPROPIADOS
*RESTRICCIÓN PLANTEAMOS
MÁS ADELANTE

LOS TERRENOS TRATADOS
DETERAN 25 AÑOS EN
RECUPERARSE, UN TERRENO
TRATADO EL 2076 NO

$$(1) \frac{Y_j}{R} \leq \sum_{l=1}^{2100} X_{lj} T_l \quad \forall j \in [2000, 2100]$$

(0,5) PTS

EL TOTAL DE
LOS PTS DE
LOS TERRENDOS
PROTADOS NO
DEBE SER SUPERIOR
AL TOTAL DE
TERRENDOS EXPROPIADOS
EN CADA AÑO

$$(2) \sum_{j=2000}^{2100} X_{lj} \leq 1$$

UNA FAMILIA PUEDE SER
EXPROPIADA UNA SOLA VEZ

(0,5) PTS

SEA FC_j = SALDO DE LA CUENTA CORRIENTE DE LA RESERVA AL
INICIO DEL AÑO j

PARA CADA AÑO SE TIENE QUE CUMPLIR LO SIGUIENTE
(AÑO j)

$$\sum_{k=1}^1 \cdot \left[\underbrace{\left(1 - \sum_{k=2000}^j X_{k,j}\right) \cdot A}_{(1)} \right] + \underbrace{FC_j}_{(2)} = \underbrace{Y_j + \left(\sum_{l=1}^I X_{lj} \cdot Y \right)}_{(3)} + \underbrace{U \sum_{l=1}^I X_{lj} T_l}_{(4)} + \underbrace{FC_{j+1}}_{(5)}$$

ESTA EXPRESION DHA
VALOR 1 SI LA FAMILIA NO
HA SIDO EXPROPIADA
HASTA EL AÑO j

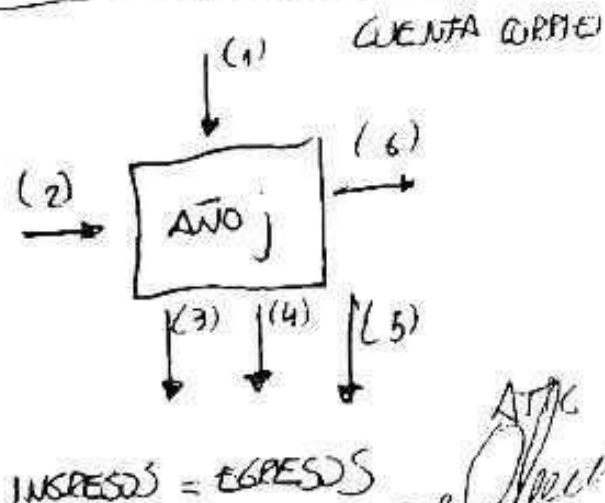
SALDO AL
INICIO DEL
AÑO j

SALDO A INICIO
DEL AÑO $j+1$

TOMO TOTAL DE ABONOS
RECAUDADOS POR LAS FAMILIAS
QUE QUEDAN EN EL AÑO j

$$FC_{2000} = C / \text{SALDO INICIAL CUENTA CORRIENTE}$$

$$FC_{2100} / \text{LA CUENTA CORRIENTE NO SE PUEDE DEBEJIRAR}$$



FAUTA P.2 CONTROL 3

a.) Si x_i es la solución óptima del problema

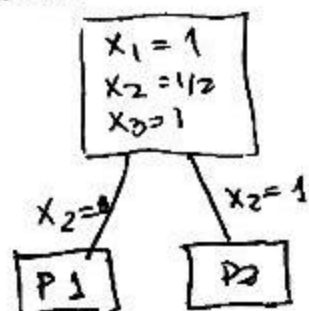
$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \text{Min } z &= c^t x \\ \text{s.a.} \quad Ax &= b \\ x &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

y x_r es la solución óptima del problema relajado

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \text{Min } z &= c^t x \\ \text{s.a.} \quad Ax &= b \\ 0 &\leq x \leq 1 \end{aligned}$$

LO QUE ES POSIBLE AFIRMAR ES QUE EL ESPACIO DE SOLUCIONES FACTIBLES DE $\textcircled{1}$ ES SUBCONJUNTO DE EL ESPACIO DE SOLUCIONES FACTIBLES DE $\textcircled{2}$, POR LO QUE SI x_r ES ÓPTIMO EN $\textcircled{2}$ Y ES ENTERO ENTONCES x_r ES ÓPTIMO $\textcircled{1}$; SIN EMBARGO NO ES POSIBLE ASEGURAR QUE $x_r = x_i$ YA QUE $\textcircled{1}$ PUEDE TENER OTROS ÓPTIMOS

b) i) OPTIMO PROBLEMA RELAJADO $x_1=1$, $x_2=1/2$ y $x_3=1$
 PARA RESOLVER CUANDO A ITERAR CON x_2 , MANTENIENDO CONSTANTE Y DESO LIBRE LAS OTRAS VARIABLES



Genero dos problemas a resolver

P1) Max $2x_1 + x_3$

s.a.

i) $10x_1 \geq 13$

ii) $-8x_3 \leq 11$

iii) $5x_3 \leq 8$

PROBLEMA INFACIBLE YA QUE i) NO SE CUMPLE NUNCA
 ES DECIR SI $x_1=1$ o $10 \neq 13$

P2) $\text{MAX } 2x_1 + x_3$

s.a.

i) $10x_1 \geq 13 - 6 = 7$

ii) $x_1 - 8x_3 \leq 11 - 10 = 1$

ESTA DESCRIPCIÓN NO APORTA Y, QUE SIEMPRE SE CUMPLE

iii) $5x_3 \leq 8 - 6 = 2$

de i) $x_1 \geq 0,7$

iii) $x_3 \leq 0,4$

como me interesa maximizar entonces debo tomar los valores que sean máximos

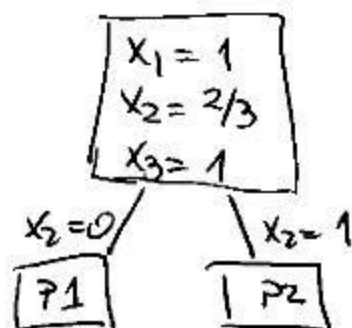
entonces escogo $x_1 = 1$ y $x_3 = 0,4$

también se puede escoger $x_3 = 0$ y dejar $x_1 = 0,7$
y se llega a la misma solución

POR LO TANTO LA SOLUCIÓN ÓPTIMA ENTERA

$$\begin{aligned} \text{ES } x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

② SOLUCIÓN ÓPTIMA $x_1 = 1, x_2 = 2/3$ y $x_3 =$
COMIENZO A ITERAR CON x_2



P1) $\text{MAX } 3x_1 + 4x_3$

i) $2x_1 + x_3 \leq 5$
como no interesa
maximizar x_3 no.

$x_3 = 1$ y luego
variar $x_1 \leq \frac{5-1}{2} \leq 2$

72 | $\text{MAX } 3x_1 + 4x_3$

i) $2x_1 + x_3 \leq 5-3$

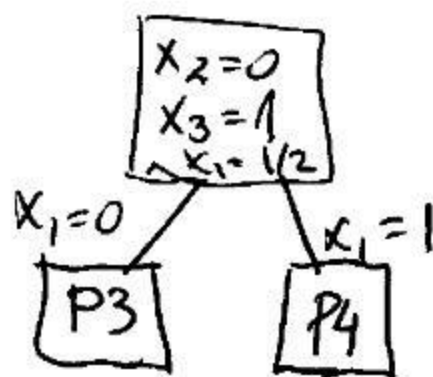
$2x_1 + x_3 \leq 2$

idem al anterior

$x_3 = 1$ y

hago variar $x_1 \leq \frac{2 - x_3}{2} \leq \frac{1}{2}$

\therefore de P1 tendré lo siguiente



P3 | $\text{MAX } 3x_1$

i) $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \leq 5$ siempre se cumple
y todas las variables son enteras
 \therefore Termina.

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 1$$

$$Z = 4$$

P4 | $\text{MAX } 3x_1$

i) $2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \leq 5$ ídem a P3

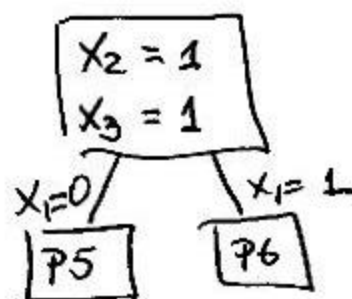
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 1$$

$$Z = 7$$

\therefore De P2 tengo los siguientes problemas



P5] Max. $3x_1$

s.a

i) $2x_0 + 3x_1 + x_2 \leq 5$ sempre se cumple

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_1 = 0$$

$$Z = 6$$

P6] Max $3x_1$

i) $2x_1 + 3x_1 + x_2 \leq 5$ in-factible

\therefore A SOLUTION OPTIMA ES AQUELLA QUE ES ENLUSTE
Y TRONTE MAYOR Z ES DESURE

$x_1 = 1$	$Z = 7$
$x_2 = 0$	
$x_3 = 1$	

Atte 

Punto de Pregunta 3

3a) (DP) $\max 10y_1 + 6y_2 + 8y_3$
 $y_1 - 2y_2 + 4y_3 = 3$
 $y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 2$
 $y_1 \leq 0$
 $y_2 \geq 0$
 y_3 irrestricta

3b) $y_1 = 0$ en el óptimo.

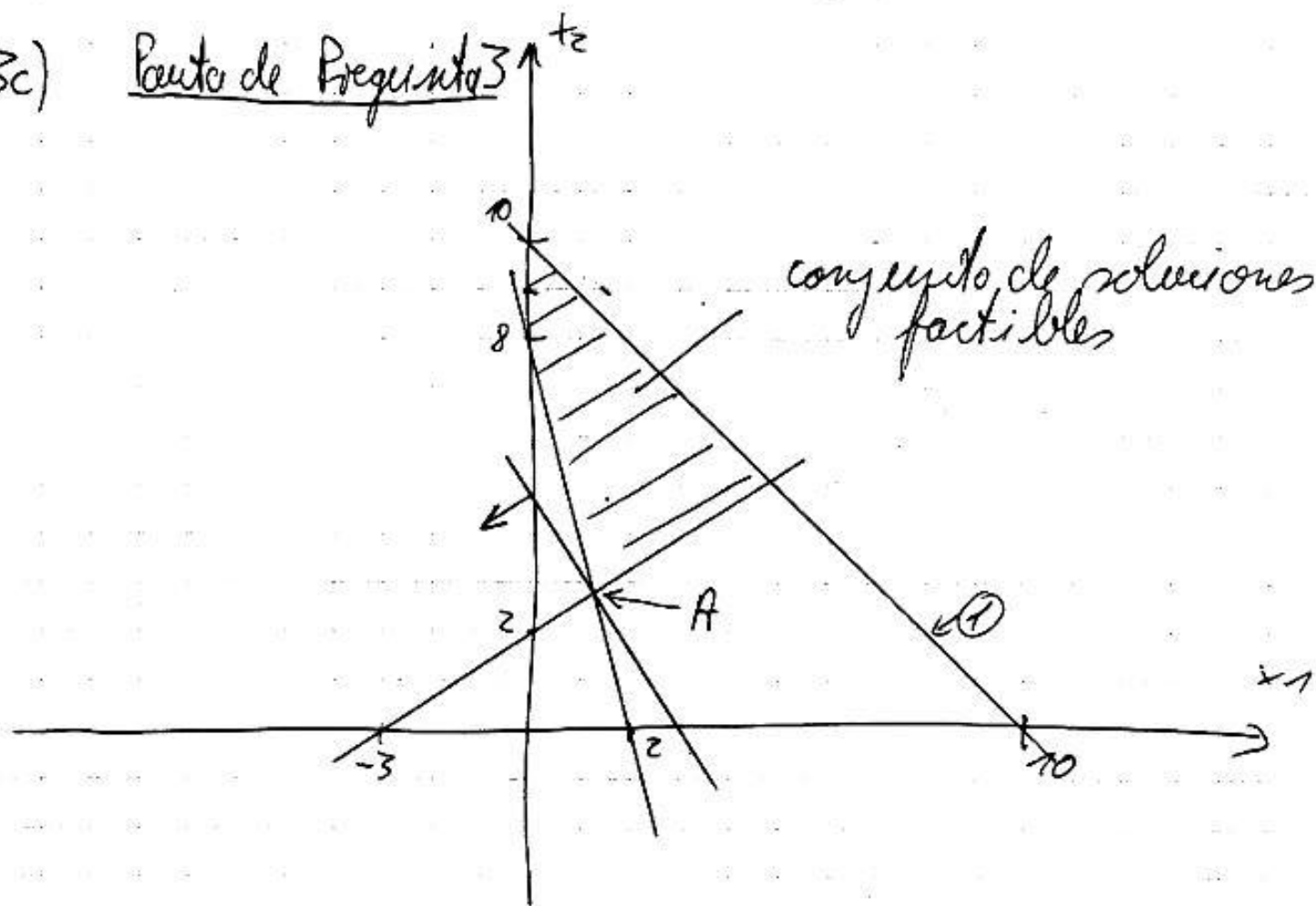
holgura complementaria: $x^T y_4 + x_4^T y = 0$

x_{4_1} : variable de holgura de la 1ª rest. de (P)

$$x_{4_1} = 10 - \frac{29}{7} - \frac{41}{7} \geq 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

* Interpretación: Un aumento de $b_1 = 10$ no cambia el valor de la función objetivo en el óptimo.

3c) Punto de Pregunt



Una "modificación pequeña" de la 1ª restricción (1) no influye la solución óptima.

SOLUCIÓN PREGUNTA 4

$$a) \quad \bar{c}_3 = c_3 - C_B^T B^{-1} \bar{c}_3 \leq 0$$

$$c_3 - (-14, -8, 0) \begin{pmatrix} 11 \\ -12 \\ 0,4 \end{pmatrix} \leq 0$$

$$c_3 - (-154 + 96) \leq 0$$

$$c_3 \leq -58 \quad (\text{Minimizar})$$

Para la función objetivo original $c_3 \geq 58$.

El beneficio unitario mínimo para fabricar el bloque $\rightarrow 58$.

$$b) \quad \bar{c}_3 = c_3 - (c_2, -8, 0) \begin{pmatrix} 11 \\ -12 \\ 0,4 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$-30 - (11c_2 + 96) \geq 0$$

$$-30 - 11c_2 - 96 \geq 0$$

$$-11c_2 \geq 126$$

$$c_2 \leq -126/11 \approx -11,455$$

$$\bar{c}_4 = -50 - (c_2, -8, 0) \begin{pmatrix} 19 \\ -22 \\ 1,6 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$-50 - (19c_2 + 128) \geq 0$$

$$-19c_2 \geq 226$$

$$c_2 \leq -226/19 \approx -11,895$$

$$\bar{c}_5 = 0 - (c_2, -8, 0) \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2 \\ 0,1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$-1,5c_2 - 16 \geq 0$$

$$-1,5c_2 \geq 16$$

$$c_2 \leq -16/1,5 \approx -10,667$$

$$\bar{c}_c = 0 - (c_2, -8, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -0,4 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$+ c_2 + 16 \geq 0.$$

$$c_2 \geq -16.$$

Luego: $-16 \leq c_2 \leq -11,895$ (Minimización)

$11,895 \leq c_2 \leq 16$ (Maximización)

El beneficio unitario mínimo del bloque para que converja producido es 16.

c) El precio sombra de 1 hora de congelado es 5.

$$\vec{\bar{b}} = B^{-1} \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1,5 & -1,0 & 0 \\ -2,0 & 2,0 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 1000 \\ 340 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} 1,5b_1 - 1000 & \geq 0 & \rightarrow & b_1 \geq 666,67 \\ -2,0b_1 + 2000 & \geq 0 & \rightarrow & b_1 \leq 1000 \\ 0,1b_1 - 400 + 340 & \geq 0 & & b_1 \leq 600 \end{array}$$

Para que el precio sombra continúe manteniéndose b_1 puede variar en el rango:

$$666,67 \leq b_1 \leq 1000$$