



Solución Control 2

Lunes 13 de Octubre, 2003

Problema 1

1. Supuestos realizados en el modelo:

- Es posible hacer fracciones de producto, esto porque sobre la naturaleza de las variables solo se impone que sean ≥ 0
- Por la misma razón, es posible utilizar fracciones de insumo.
- Se dispone de todos los otros insumos extras necesarios para fabricar cada producto sin restricción. Por ejemplo se dispone de muchos marcos de bicicletas. En rigor hay que tener como mínimo 25 de cada insumo extra de bicicleta (por restricción 3) y 30 de cada insumo extra de triciclo (por restricción 2)
- Puede vender todo lo que produce.
- No hay costos fijos de producción. Para comenzar a producir cualquiera de los productos no es necesario incurrir en costos de inversión inicial.
- El productor es tomador de precios, es decir no influye en los precios de mercado. El precio no es función de la cantidad producida.
- Pueden existir otros supuestos debidamente fundamentados.

2. Un punto interior del espacio de soluciones factibles no puede ser solución óptima de un problema de programación lineal con función objetivo cuyos coeficientes no sean todos nulos es lo mismo que si el PL admite solución óptima finita, entonces el valor óptimo se alcanza en un punto extremo del espacio de soluciones factibles. Demostraremos entonces la segunda afirmación.

Es necesario que los coeficientes no sean todos nulos, porque en el caso que si lo sean cualquier punto del espacio factible es óptimo, ya que la solución óptima siempre es igual a 0.

Si el problema lineal tiene solución óptima finita, entonces $c^T y \geq 0, \forall y \in \text{car}(K) = \{y : \exists x \in K \text{ tal que } x + \lambda y \in K, \forall \lambda \geq 0\}$ (condición KKT).

Entonces sea $x^* \in K$ solución óptima del problema. Por lo tanto se tiene que:

$$x^* = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i + \sum_j \mu_j y^j \text{ con } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \mu_j \geq 0$$

para $x^i, i = 1, \dots, p$ puntos extremos de K e $y^j \in \text{car}(K)$

Supongamos que la afirmación no es cierta. Entonces $c^T x^i > c^T x^* = z^*, \forall i = 1, \dots, p$. Por lo tanto,

$$z^* = \sum_{i=1}^p \lambda_i c^T x^i + \sum_j \mu_j c^T y^j \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i c^T x^i > \sum_{i=1}^p \lambda_i z^* = z^*$$

Una contradicción. Se concluye que $c^T x^i = z^*$ para al menos un punto extremo x^i de K . Entonces un punto interior no puede ser solución de un PL.

3. El Algoritmo simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar cada iteración respetando el criterio de entrada a la base.

En efecto, si se tiene que la variable que entra a la base es x_s , para saber cual es la variable que sale de la base es necesario determinar cual es la variable que primero se anula cuando x_s crece, para no salirse del espacio factible. Esto es buscar la primera variable que se anula en cada una de las restricciones del problema en su forma canónica:

$$x_i + \bar{a}_{is}x_s = \bar{b}_i \quad i = 1, \dots, m$$

Tomando en consideración las m restricciones el máximo valor que puede tomar x_s es

$$\min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}$$

4. El criterio de entrada a la base indica que la variable no básica que entra es aquella que tiene el menor costo reducido, dentro de aquellos que son < 0 . Se ha adoptado esta convención porque trae el mayor mejoramiento local. Sin embargo al escoger esta variable de entrada se esta automáticamente determinando cual será la variable básica que saldrá de la base, y puede darse el caso que esta variable aportaba a la minimización de la función objetivo. Entonces para lograr la máxima variación habría que escoger como variable de entrada aquella que en conjunto con la variable que saldría impliquen la mayor variación en la función objetivo. Para esto es necesario probar todos los casos.

Problema 2

Es importante notar que cada alumno es libre de dar cualquier ejemplo. Los siguientes son un ejemplo del desarrollo esperado.

- 1.

$$(P) \quad \text{máx } z = 2x_1 + x_2$$

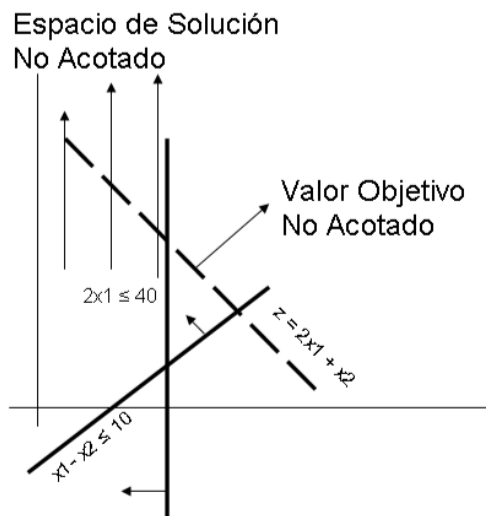
s.a.

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & \leq & 10 \\ 2x_1 & \leq & 40 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Iteración Inicial

<i>SolFactible</i>	x_1	x_2	x_3	x_4	<i>Sol</i>
z	-2	-1	0	0	0
x_3	1	-1	1	0	10
x_4	2	0	0	-1	40

La solución no acotada es descubierta por simplex observando los coeficientes en las restricciones de la variable que entra a la base, o eventualmente los coeficientes de alguna variable con costo reducido menor que cero pero que no entre a la base. Basta que estos coeficientes sean no positivos, lo que implica que la variable se puede incrementar (o disminuir) indefinidamente sin violar ninguna de las restricciones. En este caso, el valor de x_2 puede ser aumentado indefinidamente y así se incrementaría indefinidamente también el valor de z . Para ver que ello es así, basta chequear que los coeficientes asociados a x_2 en las restricciones son no positivos (negativos o cero).



2.

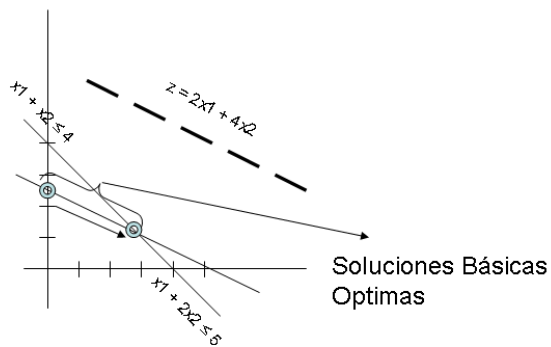
$$(P) \quad \text{máx } z = 2x_1 + 4x_2$$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Iteracion	SolBasFact	x_1	x_2	x_3	x_4	Sol
0	z	-2	-4	0	0	0
Entrar x_2	x_3	1	2	1	0	5
Salir x_3	x_4	1	1	0	1	4
1(optimo)	z	0	0	2	0	10
Entrar x_1	x_2	1/2	1	1/2	0	5/2
Salir x_4	x_4	1/2	0	-1/2	1	3/2
2	z	0	0	2	0	10
Optimos	x_2	0	1	1	-1	1
Alternativos	x_1	1	0	-1	2	3

Las soluciones alternativas son descubiertas por simplex si se observan los coeficientes de las variables no básicas en la ecuación $-z$ de alguna iteración. En este caso, en la iteración 1, el coeficiente de x_1 no básica es cero, indicando que x_1 puede entrar en la solución básica sin cambiar el valor de z , pero causando un cambio en los valores de las variables.

3.

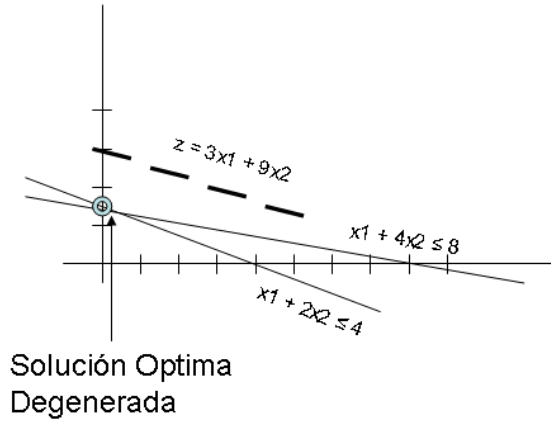
$$(P) \quad \text{máx } z = 3x_1 + 9x_2$$

s.a.

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Iteraci'on	SolBasFact	x_1	x_2	x_3	x_4	Sol
	0	z	-3	-9	0	0
Entrax ₂	x_3	1	4	1	0	8
Salex ₃	x_4	1	2	0	1	4
1	z	-3/4	0	9/4	0	18
Entrax ₁	x_2	1/4	1	1/4	0	2
Salex ₄	x_4	1/2	0	-1/2	1	0
2	z	0	0	3/2	3/2	18
Optimo	x_2	0	1	1/2	-1/2	2
	x_1	1	0	-1	2	0

La situación de degeneramiento es descubierta por simplex en el criterio de salida de la base. Hay variables que empatan en el criterio de salida de la base. En este caso, en la iteración inicial, x_3 y x_4 empatan para la variable de salida. Por esta razón, la variable básica x_4 tiene un valor 0 en la iteración 1 y, por lo tanto, da por resultado una solución básica degenerada.

Problema 3

- Variables de decisión:

$$\begin{aligned} Z_{im} &= \begin{cases} 1 & \text{si la persona } i \text{ es invitada al matrimonio cuando se escoge el menu } m \\ 0 & \sim \end{cases} \\ W_m &= \begin{cases} 1 & \text{si se escoge el menu } m \\ 0 & \sim \end{cases} \\ XT &= \text{Litros de vino tinto a comprar} \\ XB &= \text{Litros de vino blanco a comprar} \end{aligned}$$

- Parámetros

$$\begin{aligned} PM_m &: \text{Precio unitario de la cena menu } m \\ VB_{im} &: \text{Cantidad de vino blanco que consume el invitado } i \text{ con el menu } m \\ VT_{im} &: \text{Cantidad de vino tinto que consume el invitado } i \text{ con el menu } m \\ RVB &: \text{Disponibilidad inicial de vino blanco} \\ RVT &: \text{Disponibilidad inicial de vino tinto} \\ PVB &: \text{Precio litro de vino blanco} \\ PVT &: \text{Precio litro de vino tinto} \\ PPto &: \text{Presupuesto de la fiesta} \\ E_i &: \text{Conjunto de ex-parejas de } i \\ A_i &: \text{Conjunto de amigos de } i \\ (h_1, h_2) &: \text{Personas del matrimonio } h \end{aligned}$$

- Restricciones

1. Solo se escoge un menu

$$\sum_{m=1}^M W_m = 1$$

2. Solo invito bajo el menu escogido

$$Z_{im} \leq W_m \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

3. Compro vino solo si me falta

$$\begin{aligned} XT &\geq \left[\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M Z_{im} \cdot VT_{im} \right] - RVT \\ XB &\geq \left[\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M Z_{im} \cdot VB_{im} \right] - RVB \end{aligned}$$

4. No sobrepasar el presupuesto

$$\left[\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M Z_{im} \cdot PM_m \right] + XT \cdot PVT + XB \cdot PVB \leq PPto$$

5. Si invito a persona i no invito a sus ex-parejas

$$Z_{jm} \leq (1 - Z_{im}) \quad \forall j \in E_i \quad \forall m \quad \forall i$$

6. Si invito a persona i debo invitar a sus amigos

$$Z_{im} \leq Z_{jm} \quad \forall j \in A_i \quad \forall m \quad \forall i$$

7. Si va un casado, va su pareja

$$Z_{h_1m} = Z_{h_2m} \quad \forall h \in \{1, \dots, H\} \quad \forall m$$

8. Naturaleza de las variables

$$Z_{im}, W_m \in \{0, 1\}$$

$$XT, XB \geq 0$$

- Función objetivo

$$\text{máx } z = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M Z_{im}$$