

Problema 1

Sea (P) el siguiente problema:

$$\text{máx } z = 2x_1 + x_2$$

s.a.

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

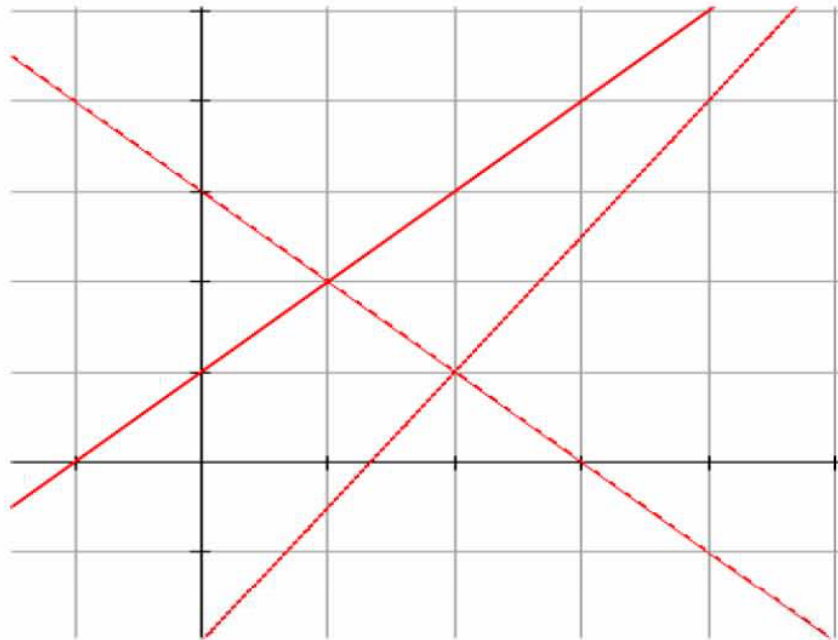
$$3x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Grafique el conjunto factible de (P) y determine la solución óptima gráficamente. ¿Cuál es el valor de z^* ?

SOLUCION

Gráficamente se observa:



El óptimo se encuentra donde las restricciones (1) y (3) son activas, luego:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

entonces, los valores en el óptimo son: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 1$ y $z^* = 5$.

2. Formule el dual del problema (P). Encuentre la solución óptima del dual usando el Teorema de Holgura Complementaria y verifique que el valor óptimo de la función objetivo de ambos problemas coinciden. ¿Cuánto vale

el costo reducido óptimo de la variable de holgura correspondiente a la primera restricción del problema (P)?

SOLUCION

Sea (D) el dual del problema (P), el cual queda:

$$\begin{aligned} \text{mín } w &= 3y_1 + y_2 + 4y_3 \\ \text{s.a.} \quad & y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ & y_1 + y_2 - 2y_3 \geq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Del Teorema de Holgura Complementaria se tiene la condición necesaria y suficiente para que x^* e y^* sean óptimos.

$$\begin{aligned} (A_{i\bullet}x^* - b_i)y_i^* &= 0 & i = 1, \dots, m \\ (c_j - y^*A_{\bullet j})x_j^* &= 0 & j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_1^* = 2 &\implies y_1^* - y_2^* + 3y_3^* = 2 \\ x_2^* = 1 &\implies y_1^* + y_2^* - 2y_3^* = 1 \end{aligned}$$

Como la restricción (2) no es activa, entonces $y_2^* = 0$. Entonces, resolviendo el sistema anterior se tiene que: $y_1^* = \frac{7}{5}$, $y_2^* = 0$ y $y_3^* = \frac{1}{5}$. Luego, el valor de la función objetivo del dual queda:

$$\text{máx } w = 3 \cdot \frac{7}{5} + 0 + 4 \cdot \frac{1}{5} = 5 = z^*$$

Ahora, sea x_3 la variable de holgura de la restricción (1) de (P).

$$\bar{c}_3 = c_3 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 3} = -\pi^* A_{\bullet 3}$$

donde $\pi^* = y^*$. Además, en este caso $A_{\bullet 3} = \hat{e}_1$, vector canónico.

Entonces se tiene que:

$$\bar{c}_3 = -\pi_1^* = -y_1^* = -\frac{7}{5}$$

3. a) Explique cuál es la interpretación económica de la solución dual.
- b) Suponga que x_1 y x_2 representan la cantidad a producir de 2 productos, y que las restricciones 1, 2 y 3 representan la utilización de 3 insumos diferentes A, B y C. Si a Ud. le dan dinero para invertir en insumos. ¿en cuál invertiría?. Justifique.

SOLUCION

Dado que $y_1^* > y_3^* > y_2^*$, conviene invertir en el insumo A pues al aumentar en una unidad su cantidad, aumenta en $\frac{7}{5}$ el valor de la función objetivo, que corresponde al valor de la producción de los productos.

Pregunta 2.

Sea el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= 8x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 50x_4 \\ \text{s.a :} \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 16x_4 &\leq 800 \\ \frac{3}{2}x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 &\leq 1000 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{5}x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 340 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Se sabe que la matriz óptima es $B^* = [a_2, a_1, a_7]$, luego de agregar las variables x_5, x_6 y x_7 . La inversa de esta matriz es:

$$B^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Con esta información responda:

1. Suponga que $c_1 = 8$ se cambia por $c_1 = 9$. Analice si cambia o no en la solución óptima :

Sabemos que al cambiar el costo de una variable básica en la solución óptima solo cambian los costos modificados (reducidos) de las variables no básicas en la última forma canónica (iteración en la cual se cumple optimalidad) y el valor de la función objetivo, el cual se mantendrá en caso de que nos sigamos manteniendo en la misma solución óptima.

Los nuevos costos modificados serán (sobre las variables no básicas, y entonces x_3, x_4, x_5 y x_6):

$$\bar{c}_j = c_j - c_B B^{*-1} A_{\bullet j}$$

$$\bar{c}_3 = c_3 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 3} = -30 - \begin{pmatrix} -14 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 16 \geq 0$$

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 4} = -50 - \begin{pmatrix} -14 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 18 \geq 0$$

$$\bar{c}_5 = c_5 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 5} = 0 - \begin{pmatrix} -14 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \geq 0$$

$$\bar{c}_6 = c_6 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 6} = 0 - \begin{pmatrix} -14 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \geq 0$$

Luego, se cumple el criterio de optimalidad para un problema de minimización, por lo cual:

- El grupo de variables básicas o base óptima no cambia.
- El valor de las variables básicas no sufre ninguna alteración puesto que nos mantenemos en el mismo óptimo.
- El valor de la función objetivo cambia dado que uno de los coeficientes asociados cambia.

2. Al cambiar $c_1 = 8$ por $c_1 = 9$ analice si cambian o no los precios sombra del problema. En caso afirmativo determine para cada precio sombra el valor antiguo y el valor nuevo.

El teorema fundamental de dualidad indica que $c_B B^{*-1} = y^*$. Luego, cualquier cambio en c_B produce un cambio en y^* .

Los valores antiguos son:

$$(y_1^* \ y_2^* \ y_3^*) = (14 \ 8 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} = (5 \ 2 \ 0)$$

Los valores nuevos son:

$$(y_1^* \ y_2^* \ y_3^*) = (14 \ 9 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} = (3 \ 4 \ 0)$$

3. Suponga que $b_2 = 1000$ se cambia por $b_2 = 900$. Analice si cambia o no en la solución óptima:

Como $\bar{b} = B^{-1}b$, si se cambia el lado derecho necesariamente deberá cambiar el lado derecho de la última forma canónica. Ahora, si el nuevo lado derecho es no negativo se cumplirá con la condición de no negatividad del problema y se mantendrá la base óptima, pero puede cambiar el valor de las variables básicas y el valor de la función objetivo.

El nuevo lado derecho queda:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} = (5 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} 800 \\ 900 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Dado que se cumple la no negatividad podemos responder las preguntas:

- El grupo de variables básicas o base óptima no cambian.
 - El valor de las variables básicas cambia a $x_1^* = 300$, $x_2^* = 200$ y $x_7^* = 60$.
 - El valor de la función objetivo cambia a $z^* = 5200$
4. Si $b_2 = 1000$ se cambia por $b_2 = 900$ analice si cambian o no los precios sombra del problema. En caso afirmativo determine para cada precio sombra el valor antiguo y el valor nuevo.

Como $y^* = c_B B^{*-1}$ y c_b no ha cambiado y la base óptima tampoco, entonces los valores de y^* no cambian.

Dudas y consultas
mpulido@dii.uchile.cl