



Pauta Control 1

Pregunta 1

1. a. Puede existir un algoritmo polinomial para un problema que está en NP? Justifique. (1 pto.)

R: Si, puede existir, ya que los problemas de que pueden ser resueltos con un algoritmo polinomial (P) están dentro del conjunto de problemas NP.

- b. Pueden existir dos problemas A y B pertenecientes a NP-completo, de modo que se encuentre un algoritmo polinomial para resolver A y se demuestre que no existe algoritmo polinomial para resolver B? Justifique. (1 pto.)

R: Falso, ya que si un problema Q pertenece a NP-completo y Q es reducible polinomialmente a R entonces R también pertenece a NP-completo, si encontramos un algoritmo polinomial para resolver un problema de NP-completo entonces todos los problemas pertenecientes a este conjunto pueden ser resueltos con dicho algoritmo.

2. a. Describa el método de Newton para optimización no lineal sin restricciones. (0,5 ptos.)

R: Iteración k:

- Calcular el gradiente de la función objetivo y verificar si $\nabla f(x^k) = 0$

- Si no, calcular el inverso del hessiano de la función objetivo para obtener el siguiente punto como se indica a continuación:

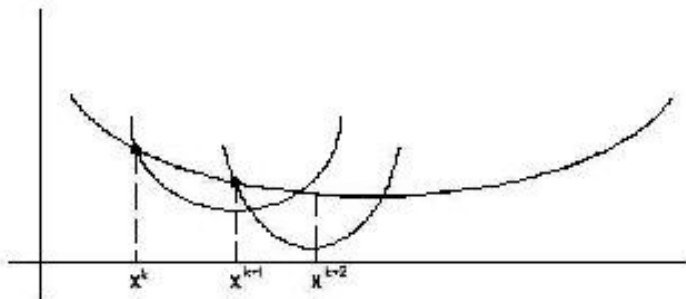
$$x^{k+1} = x^k - [Hf(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$$

- Si si entonces se acaba la iteración y el punto x^k es el óptimo

- b. Escriba una interpretación conceptual y una interpretación geométrica del funcionamiento del método. (1,5 ptos.)

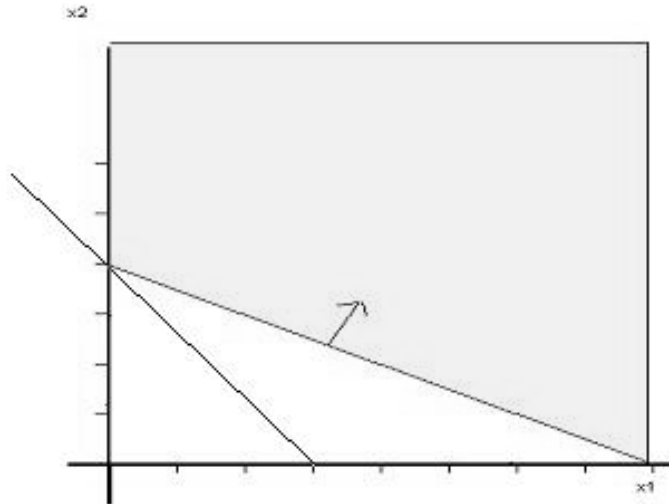
R: El método de Newton se basa en aproximar la función f por una función cuadrática (en cada punto x^k se aproxima por la expansión de Taylor de orden 2) y esta aproximación se minimiza exactamente, generando un nuevo punto x^{k+1} .

Se detiene la aproximación cuando se llega a un punto estacionario de la función aproximada lo que es condición necesaria y suficiente.



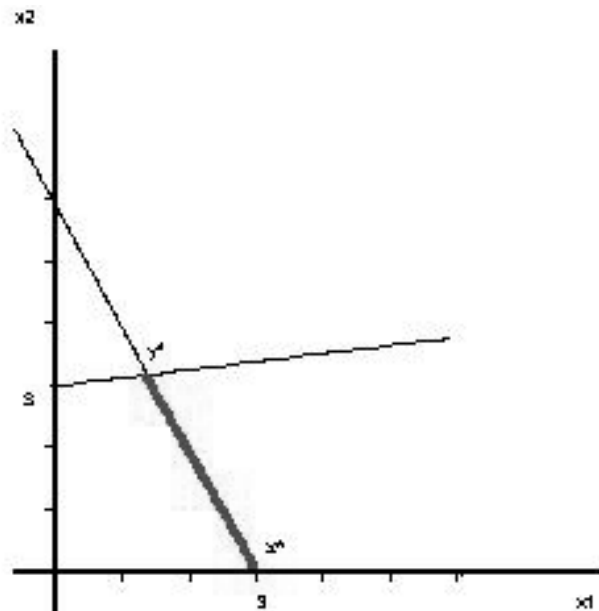
3. a. Dé un ejemplo de un problema de programación lineal no acotado. Grafique (1 pto.)

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & z & = x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & g_1(x_1, x_2) & = x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 & \geq 0 \\ & x_2 & \geq 0 \end{array}$$



- b. Dé un ejemplo de un problema de programación lineal con infinitas soluciones óptimas. Grafique. (1 pto.)

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & z & = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & g_1(x_1, x_2) & = 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & g_2(x_1, x_2) & = -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 & \geq 0 \\ & x_2 & \geq 0 \end{array}$$



Pregunta 2

$$\begin{aligned} (P) \quad \min \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \\ \text{s.a} \quad & g_1(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

1. Desarrolle las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema (P).

Primero se lleva el problema a la forma estándar

$$\begin{aligned} (P) \quad \min \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \\ \text{s.a} \quad & g_1(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ & g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Se calculan los gradientes:

$$\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 4) \\ 2(x_2 - 4) \end{pmatrix} \quad \nabla g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2x_2 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2(x_2 - 1) \end{pmatrix}$$

De esta forma se tienen las condiciones de Kuhn Tucker:

$$\begin{aligned} \mu_1(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 &= 0 \\ \mu_2(x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1) &= 0 \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \\ \begin{pmatrix} 2x_1 - 8 \\ 2x_2 - 8 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

2. Revise el cumplimiento de las condiciones KKT para los siguientes puntos: (0,0); (2, 0); (0, 2).

- En (0,0) se tiene:

$$\begin{aligned} \mu_1((1)^2 - 1) &= 0 \\ \mu_2((1)^2 - 1) &= 0 \\ \Rightarrow \mu_1, \mu_2 &\in \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \mu_1 = -4, \mu_2 = -4 &\Rightarrow \text{No cumple KKT} \end{aligned}$$

- En (2,0) se tiene:

$$\begin{aligned} \mu_1((1)^2 - 1) &= 0 \\ \mu_2((2)^2 + 1^2 - 1) &= 0 \\ \Rightarrow \mu_1, \mu_2 &\in \mathbb{R}, \mu_2 = 0 \\ \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \mu_1 = 2 \text{ Pero queda } -8 &= 0, \Rightarrow \text{Punto Crítico, que no cumple KKT.} \end{aligned}$$

- En (0,2) se tiene:

$$\mu_1((1)^2 + 2^2 - 1) = 0$$

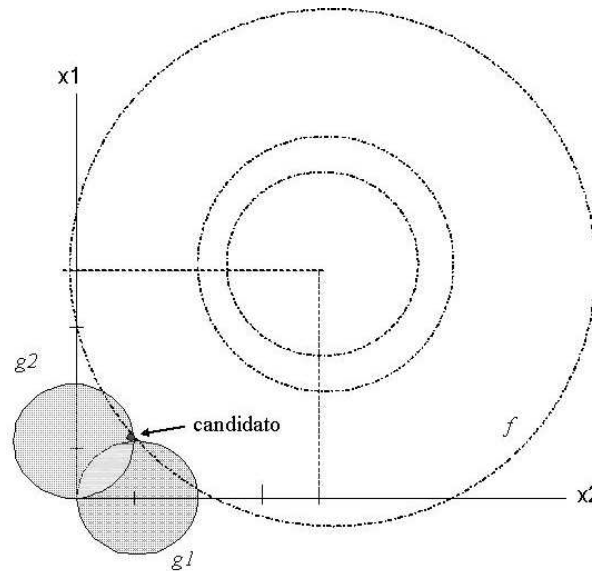
$$\mu_2((2)^2 + 1^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \mu_1 = 0, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \mu_2 = 2$, Pero queda $-8 = 0, \Rightarrow$ Punto Crítico, que no cumple KKT.

3. Qué podemos concluir para cada uno de estos puntos? Justifique.
 - (0,0) Es un punto en el extremo del poliedro factible que no cumple KKT, como la región es convexa, quiere decir que (0,0) no es óptimo del problema. Se puede observar que, moviéndose en cualquier punto al interior de la región factible, la función objetivo mejora.
 - (2,0) Es un punto que no cumple KKT pues el sistema presenta una contradicción lo que indica que este punto tiene alguna característica particular, en este caso, esto sucede porque no se encuentra dentro del poliedro factible.
 - (0,2) Es un punto que no cumple KKT pues el sistema presenta una contradicción lo que indica que este punto tiene alguna característica particular, en este caso, esto sucede porque no se encuentra dentro del poliedro factible.
4. Muestre las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo gráficamente.



5. Determine un candidato para ser solución óptima analizando el gráfico. Verifique si este candidato cumple con las condiciones de KKT.

El candidato para ser solución óptima se encuentra en la intersección entre ambas restricciones más cercana al (4,4), de esta forma la solución está dada por:

$$x_1^2 = 1 - (x_2 - 1)^2$$

$$1 - \sqrt{1 - (x_2 - 1)^2} = 0$$

Una solución activa para ambas curvas es (1,1) De forma que es este punto el candidato a óptimo. Verifiquemos que (1,1) cumpla KKT:

$$\begin{aligned}
\mu_1(1^2 + -1) &= 0 \\
\mu_2(1^2 - 1) &= 0 \\
\Rightarrow \mu_1, \mu_2 &\in \Re \\
\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\
\Rightarrow \mu_1 = 3, \mu_2 = 3 &\implies \text{Cumple KKT}
\end{aligned}$$

6. Dé la solución óptima y el valor de la función objetivo asociado.

La solución óptima es el valor encontrado en la parte 5 ya que, como se observa gráficamente, la región es convexa, pues los puntos que conforman la línea que une a cualquier par de puntos dentro de la región pertenecen a ella.

As como la región es conveza (también lo son las restricciones asociadas y función objetivo asociadas) la solución óptima es:

De forma que el valor de la función objetivo queda como:

$$f(x_1, x_2) = 9 + 9 = 18$$

Pregunta 3

MXM, una empresa muy conocida a nivel mundial debe decidir su plan de producción y trasbordo para los próximos T períodos.

La empresa tiene una gama de N productos que son fabricados en K diferentes plantas y luego llevados a I diferentes bodegas para ser enviados a J clientes distintos.

El proceso productivo del producto n se divide en p_n etapas donde cada etapa tiene duración de un período. Además se sabe que la capacidad de producción asociada a cada etapa para dicho producto en la planta k es de s_{nk} . Por su parte, cada cliente j demanda d_{jnt} unidades del producto n en el período t que debe ser satisfecha de forma exacta. Debido a la perecibilidad de los productos, un producto n no puede pasar ms de g_n períodos en bodega.

Se ha estimado la capacidad de cada bodega, de forma tal que se cree que caben f_i productos en la bodega i (suponemos que todos los productos ocupan el mismo espacio). Además, por lo inventariado en el período anterior se sabe que al inicio del primer período hay I_{ni1} unidades del producto n en la bodega i . Suponga que solo se hace un envío en al final de cada período desde la planta a la bodega.

El traslado entre la fábrica k y la bodega i cuesta c_{ik} por unidad en cada período y el traslado de la bodega i hasta el cliente j tiene un costo unitario asociado de e_{ij} por período. Existen además costos de producción dados por v_{ktn} por cada unidad de producto n hecho en la planta k en el período t y costos de almacenaje del producto n guardado en la bodega i durante e período t representado por r_{itn} .

Se le solicita a usted que modele el problema de MXM mediante programación lineal minimizando los costos asociados al proceso.

■ Variables

x_{nkt} = cantidad del producto n que se empieza a producir en la planta k en el período t .

z_{nkit} = flujo del producto n desde la planta k a la bodega i en el período t .

y_{nijt} = flujo del producto n desde la bodega i al cliente j en el período t .

I_{nit} = inventario del producto n en la bodega i almacenado desde el período $t - 1$ al t .

- Restricciones

$$x_{nkt} = \sum_i z_{nki(t+P_n)} \quad \forall n, k, t.$$

$$x_{nkt} \leq s_{nk} \quad \forall n, k, t.$$

$$I_{ni(t+1)} = I_{nit} + \sum_k z_{nkit} - \sum_j y_{nijt} \quad \forall n, i, t.$$

$$\sum_n I_{nit} + \sum_k z_{nkit} \leq f_i \quad \forall i, t.$$

$$\sum_{ik} z_{nkit} \leq \sum_{\theta=t}^{t+g_n} \sum_{ij} y_{nij\theta} \quad \forall n, t.$$

$$\sum_i y_{nijt} = d_{jnt} \quad \forall j, n, t.$$

$$x_{nkt}, y_{nijt}, z_{nkit}, I_{nit} \geq 0 \quad \forall n, k, i, j, t.$$

- Función Objetivo

$$\text{Min } z = \sum_{nkt} v_{ktn} x_{nkt} + \sum_{nit} r_{itn} I_{nit} + \sum_{nkit} c_{ki} z_{nkit} + \sum_{nkjt} e_{ij} y_{nijt}$$

Notas de corrección:

- Pregunta 1.c: 0.5 por el ejemplo y 0.5 por el gráfico.
- Pregunta 2: Cada parte 1 pto. Se podía hacer con las restricciones de no negatividad, solo que expliquen bien el problema en (0,0)

Consultas a:
mapereir@ing.uchile.cl