



Auxiliar 3

Problema 1

Sea (P) el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(x) \\ \text{s.a. } & \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \text{con } f, g_i \in C^1 \end{aligned}$$

Responde o comente según corresponda:

- ¿Puede existir x^* punto factible de (P) que cumpla las condiciones KKT y no sea mínimo local ni global? Justifique.
- ¿Puede existir y^* mínimo local de (P) que no cumpla las condiciones de KKT? Justifique.
- Un punto interior de espacio de soluciones factibles con gradiente nulo cumple las condiciones de KKT. Justifique.
- Nunca un punto factible que no sea local o global puede cumplir KKT. Justifique.

Solución

- Si, siempre que f o g_i no sean convexas.
- Sí, siempre que y^* no sea regular.
- Se trata de un punto factible. Luego:

$$g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Por lo tanto:

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Si

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Se cumple la relación:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

- Pueden existir puntos factibles que cumplan KKT. Estas condiciones son necesarias y no suficientes.

Problema 2

A) Dado el siguiente problema (P):

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a. Desarrolle las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema (P).

Solución

Las condiciones de KKT las podemos referir a lo siguiente.

- i. Poner el problema en forma estándar.
- ii. Ver relaciones de holgura.
- iii. Analizar regularidad del punto.

i. En este caso podemos ver que el problema no se encuentra en forma estándar por lo que debemos dejarlo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min \quad & -f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \\ \text{s.a} \quad & g_1(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 - 12 \leq 0 \\ & g_2(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 - 12 \leq 0 \\ & g_3(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0 \\ & g_4(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos analizar los otros puntos.

ii. Ver las relaciones de holgura. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mu_1 * (4x_1 + 3x_2 - 12) &= 0 \\ \mu_2 * (3x_1 + 4x_2 - 12) &= 0 \\ \mu_3 * (-x_1) &= 0 \\ \mu_4 * (-x_2) &= 0 \end{aligned}$$

iii. El análisis de regularidad del punto se refiere a:

$$\nabla f = (2(x_1 - 5), 2(x_2 - 5))$$

$$\nabla g_1 = (4, 3)$$

$$\nabla g_2 = (3, 4)$$

$$\nabla g_3 = (-1, 0)$$

$$\nabla g_4 = (0, -1)$$

$$(2(x_1 - 5), 2(x_2 - 5)) + \mu_1(4, 3) + \mu_2(3, 4) + \mu_3(-1, 0) + \mu_4(0, -1) = (0, 0)$$

**b. Revisa el cumplimiento de las condiciones KKT para los siguientes puntos:
(1,1); (1, 9/4); (12/7, 12/7).**

Solución

Analizaremos para cada uno de los siguientes puntos las condiciones ii y iii del punto anterior.

- A(1,1)

Analizamos la actividad de las restricciones:

$$g_1(1,1) = -5 \neq 0 \rightarrow \mu_1 \in \mathbb{R}$$

$$g_2(1,1) = -5 \neq 0 \rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$g_3(1,1) = -1 \neq 0 \rightarrow \mu_3 \in \mathbb{R}$$

$$g_4(1,1) = -1 \neq 0 \rightarrow \mu_4 \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto de esto concluimos que, en iii:

$$(-8, -8) = (0, 0) \rightarrow \leftarrow$$

Lo que claramente es una contradicción, por lo tanto el punto (1,1) no cumple con las condiciones de KKT.

- B(1, 9/4)

Analizamos la actividad de las restricciones:

$$g_1(1, 9/4) = -5/4 \neq 0 \rightarrow \mu_1 = 0$$

$$g_2(1, 9/4) = 0 \rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$g_3(1, 9/4) = -1 \neq 0 \rightarrow \mu_3 = 0$$

$$g_4(1, 9/4) = -9/4 \neq 0 \rightarrow \mu_4 = 0$$

Por lo tanto de esto concluimos que, en iii:

$$(-8, -11/2) + \mu_2(3, 4) = (0, 0)$$

De esto podemos ver que el sistema que debemos resolver es:

$$\begin{aligned} -8 + 3\mu_2 &= 0 \rightarrow \mu_2 = 8/3 \\ -11/2 + 4\mu_2 &= 0 \rightarrow \mu_2 = 11/8 \end{aligned}$$

Con lo cual es fácil concluir que no existe un μ_1 que cumpla con ese sistema.

Por lo tanto el punto $(1, 9/4)$ no cumple con las condiciones de KKT.

- $C(12/7, 12/7)$

Analizamos la actividad de las restricciones:

$$\begin{aligned} g_1(12/7, 12/7) &= 0 & \rightarrow \mu_1 \in \mathbb{R} \\ g_2(12/7, 12/7) &= 0 & \rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R} \\ g_3(12/7, 12/7) &= -12/7 \neq 0 & \rightarrow \mu_3 = 0 \\ g_4(12/7, 12/7) &= -12/7 \neq 0 & \rightarrow \mu_4 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto de esto concluimos que, en iii:

$$(-46/7, -46/7) + \mu_1(4, 3) + \mu_2(3, 4) = (0, 0)$$

De esto podemos ver que el sistema que debemos resolver es:

$$\begin{aligned} -46/7 + 4\mu_1 + 3\mu_2 &= 0 \\ -46/7 + 3\mu_1 + 4\mu_2 &= 0 \\ \rightarrow \mu_1 &= 46/84 \\ \rightarrow \mu_2 &= 46/84 \end{aligned}$$

Encontramos μ_i 's que fuesen positivos que cumplieran con el sistema de ecuaciones planteados.

Podemos decir que el punto $(12/7, 12/7)$ cumple con las condiciones de KKT.

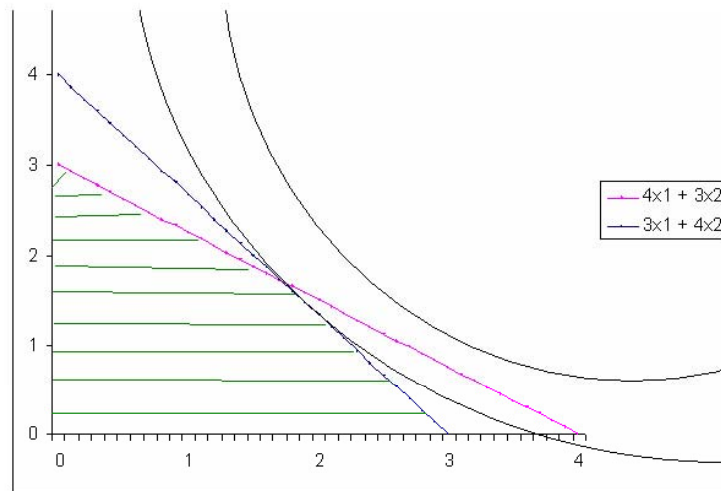
c. ¿Qué podemos concluir para cada uno de estos puntos? Justifique.

Solución

Punto	Condición KKT	Justificación
A(1,1)	No Cumple	Podemos ver que el punto en cuestión corresponde a un punto interior en el espacio de soluciones factibles. Dado que el gradiente de la función es no nulo, la condición de KKT no se cumple. Por lo tanto este punto interior no es candidato a óptimo.
B(1, 9/4)	No Cumple	Este punto hace activa la restricción 2. Por lo tanto podemos ver que no es óptimo porque existen direcciones factibles de mejoramiento, en particular en la dirección de la misma restricción.
C(12/7, 12/7)	Si Cumple	Este punto cumple con las condiciones de KKT, por lo tanto es candidato a óptimo. Este punto corresponde al punto de intersección de las dos restricciones. Por lo tanto es candidato a ser óptimo global, lo cual se asegura por la convexidad del problema.

d. Muestre las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo gráficamente.

Solución



e. De la solución óptima y el valor de la función objetivo asociado.

Solución

La solución óptima es el punto $(12/7, 12/7)$ y el valor de la función objetivo es $f(x_1=12/7, x_2=12/7) = (12/7 - 5)^2 + (12/7 - 5)^2 = 1058/49 = 21.59$

B) Supongamos que la función objetivo del problema (P) cambia como lo muestra el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

a. Revisa el cumplimiento de las condiciones KKT de (P1) para los siguientes puntos: $(1, 1)$; $(1, 9/4)$; $(12/7, 12/7)$.

Solución

$$\nabla f = (-4, -3)$$

$$\nabla g_1 = (4, 3)$$

$$\nabla g_2 = (3, 4)$$

$$\nabla g_3 = (-1, 0)$$

$$\nabla g_4 = (0, -1)$$

- A(1,1)

Analizamos la actividad de las restricciones:

$$g_1(1,1) = -5 \neq 0 \rightarrow \mu_1 \in \mathbb{R}$$

$$g_2(1,1) = -5 \neq 0 \rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$g_3(1,1) = -1 \neq 0 \rightarrow \mu_3 \in \mathbb{R}$$

$$g_4(1,1) = -1 \neq 0 \rightarrow \mu_4 \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto de esto concluimos que, en iii:

$$(-4, -3) = (0, 0)$$

Lo que claramente es una contradicción, por lo tanto el punto (1,1) no cumple con las condiciones de KKT.

Este punto no se ve afectado puesto que es un punto interior.

- B(1, 9/4)

Analizamos la actividad de las restricciones:

$$g_1(1, 9/4) = -5/4 \neq 0 \rightarrow \mu_1 = 0$$

$$g_2(1, 9/4) = 0 \rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$g_3(1, 9/4) = -1 \neq 0 \rightarrow \mu_3 = 0$$

$$g_4(1, 9/4) = -9/4 \neq 0 \rightarrow \mu_4 = 0$$

Por lo tanto de esto concluimos que, en iii:

$$(-4, -3) + \mu_2(3, 4) = (0, 0)$$

De esto podemos ver que el sistema que debemos resolver es:

$$-4 + 3\mu_2 = 0 \rightarrow \mu_2 = 4/3$$

$$-3 + 4\mu_2 = 0 \rightarrow \mu_2 = 3/4$$

Con lo cual es fácil concluir que no existe un μ_2 que cumpla con ese sistema.

Por lo tanto el punto (1, 9/4) no cumple con las condiciones de KKT.

- C(12/7, 12/7)

Analizamos la actividad de las restricciones:

$$g_1(12/7, 12/7) = 0 \rightarrow \mu_1 \in \mathbb{R}$$

$$g_2(12/7, 12/7) = 0 \rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$g_3(12/7, 12/7) = -12/7 \neq 0 \rightarrow \mu_3 = 0$$

$$g_4(12/7, 12/7) = -12/7 \neq 0 \rightarrow \mu_4 = 0$$

Por lo tanto de esto concluimos que, en iii:

$$(-4, -3) + \mu_1(4, 3) + \mu_2(3, 4) = (0, 0)$$

De esto podemos ver que el sistema que debemos resolver es:

$$\begin{aligned} -4 + 4\mu_1 + 3\mu_2 &= 0 \\ -3 + 3\mu_1 + 4\mu_2 &= 0 \end{aligned}$$

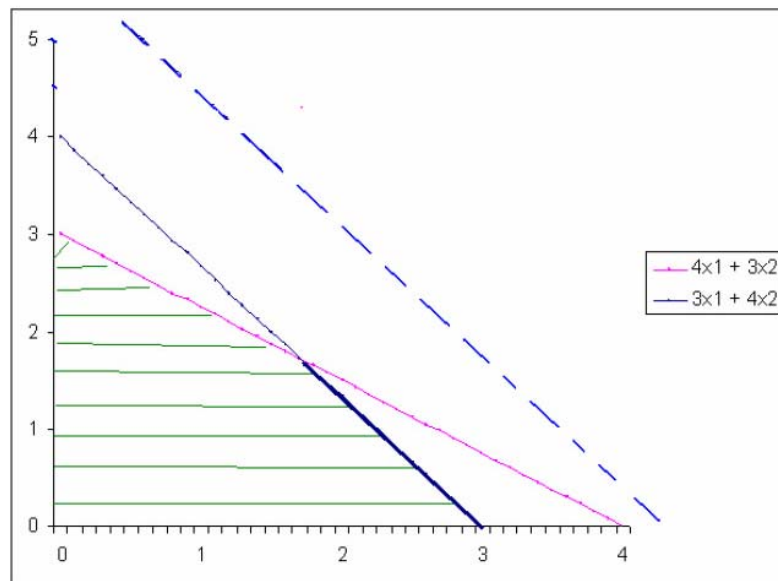
$$\begin{aligned} \rightarrow \mu_1 &= 1 \\ \rightarrow \mu_2 &= 0 \end{aligned}$$

Encontramos μ_i 's que fuesen positivos que cumplieran con el sistema de ecuaciones planteados.

Podemos decir que el punto $(12/7, 12/7)$ cumple con las condiciones de KKT.

b. Muestre las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo gráficamente.

Solución



Problema 3

Sea el siguiente problema de maximización:

$$\text{Max } x_1 - 2x_2$$

s.a.

$$5x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$-3x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 - 2x_2 \geq -3$$

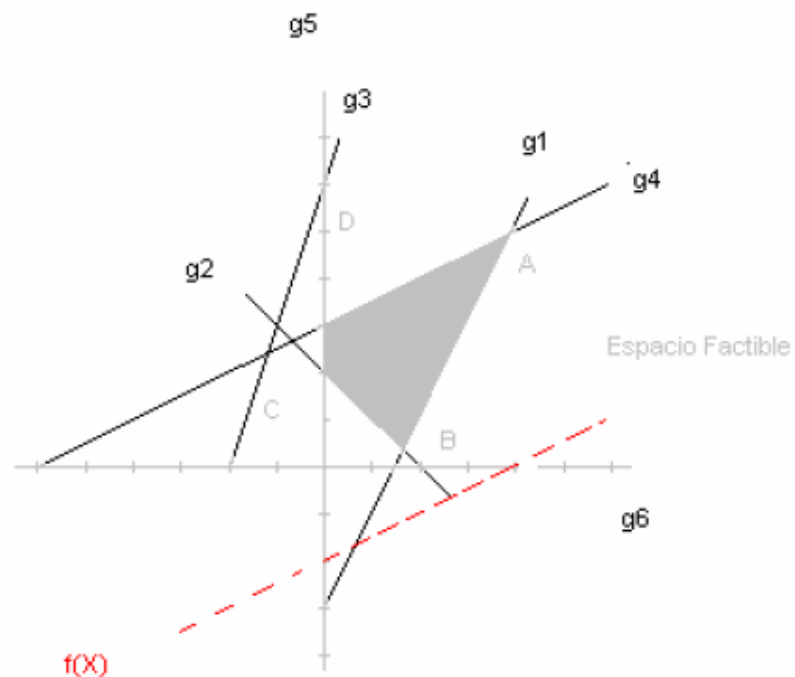
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

- Grafique el problema y postule 4 puntos como posibles óptimos del problema.
- Pruebe las condiciones necesarias y suficientes de KKT en los puntos escogidos y concluya acerca de los resultados obtenidos.
- ¿Deberían existir direcciones de descenso para los puntos no óptimos? Muestre gráficamente.
- Muestre para el punto óptimo, el cono formado por los gradientes de las restricciones activas. ¿Qué condición debe cumplir el gradiente de la función objetivo?

Solución

a)



Elegiremos probar los puntos denotados por A, B, C y D.

Punto A:

Se activan las restricciones g_1 y g_4

$$5x_1 - 2x_2 = 3$$

$$x_1 - 2x_2 = -3$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

Punto B:

Se activan las restricciones g_1 y g_2

$$5x_1 - 2x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

Punto C:

Se activan las restricciones g_2 y g_5

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 = 0$$

$$\Rightarrow C = (0,1)$$

Punto D:

Se activan las restricciones g_4 y g_5

$$x_1 - 2x_2 = -3$$

$$x_1 = 0$$

$$\Rightarrow A = \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

b) Primero pasemos el problema a su forma estándar del tipo:

$$\text{Min } f(x)$$

s.a.

$$g_1(x) \leq 0$$

$$g_2(x) \leq 0$$

....

$$g_m(x) \leq 0$$

Luego tenemos que el problema se reduce a:

$$\begin{aligned}
& \text{Min} \quad -x_1 + 2x_2 \\
& \text{s.a.} \\
& 5x_1 - 2x_2 - 3 \leq 0 \\
& -x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \\
& -3x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\
& -x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0 \\
& -x_1 \leq 0 \\
& -x_2 \leq 0
\end{aligned}$$

Luego se tiene que:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x_1, x_2) &= (-1, 2), \nabla g_1(x_1, x_2) = (5, -2), \nabla g_2(x_1, x_2) = (-1, -1), \nabla g_3(x_1, x_2) = (-3, 1) \\
\nabla g_4(x_1, x_2) &= (-1, 2), \nabla g_5(x_1, x_2) = (-1, 0), \nabla g_6(x_1, x_2) = (0, -1)
\end{aligned}$$

Ahora probemos las condiciones de suficiencia sobre los puntos propuestos:

Punto A:

$$\begin{aligned}
(-1, 2) + \mu_1(5, -2) + \mu_4(-1, 2) &= (0, 0) \\
\Rightarrow \mu_1 = 0, \mu_4 = -1 < 0
\end{aligned}$$

Luego el punto A no puede ser óptimo.

Punto B:

$$\begin{aligned}
(-1, 2) + \mu_1(5, -2) + \mu_2(-1, -1) &= (0, 0) \\
\Rightarrow \mu_1 = 3/7, \mu_2 = 8/7 < 0
\end{aligned}$$

Luego el punto B podría ser óptimo (por lo menos cumple la condición necesaria). Pero antes de ver si cumple la condición suficiente analicemos los otros 2 puntos.

Punto C:

$$\begin{aligned}
(-1, 2) + \mu_2(-1, -1) + \mu_5(-1, 0) &= (0, 0) \\
\Rightarrow \mu_2 = 2, \mu_5 = -3 < 0
\end{aligned}$$

Luego el punto C no puede ser óptimo.

Punto D:

$$\begin{aligned}
(-1, 2) + \mu_4(-1, 2) + \mu_5(-1, 0) &= (0, 0) \\
\Rightarrow \mu_4 = -1 < 0, \mu_5 = 0
\end{aligned}$$

Luego el punto D no puede ser óptimo.

Luego de los 4 puntos propuestos sólo B podría ser óptimo. Para ello debiera cumplir la condición suficiente de KKT.:

- i) f convexa
- ii) Restricciones convexas
- iii) El punto debe cumplir la condición necesaria de KKT

En efecto vemos que todo esto se cumple, por lo cual el punto B es óptimo global del problema.

c) Evidentemente debieran existir direcciones factibles las cuales permitan mejorar la función objetivo. Estas direcciones debieran formar un ángulo agudo con $-\nabla f$ y no debieran pertenecer al cono formado por las restricciones activas en dichos puntos (es recomendable que grafiquen dichos vectores para poder ver esto más claramente).

d) Gráficamente, el cono corresponde a todos los vectores que están entre ∇g_1 y ∇g_2 para el punto B. Si graficamos $-\nabla f$ en el mismo punto, podemos ver que a diferencia de los puntos A, C y D, ahora $-\nabla f$ sí pertenece al cono mencionado (la interpretación es que para disminuir la función objetivo en dicho punto, la única forma es ir en contra de las restricciones y como esto no se puede, estamos en el óptimo).

**Dudas y comentarios a:
mpulido@dii.uchile.cl**