



Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Civil Industrial.

IN34A Optimización
Profesores: Guillermo Durán.
Richard Weber.
Auxiliares: S. Guzmán. M. Pereira.
M. Pulido. X. Schultz.

Auxiliar N°2
10 de agosto de 2005

Problema 1

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Resolver con el método del Gradiente y el de Newton. Tome como punto de partida el punto (2,4).

Problema 2

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

Resolver con el método del Gradiente y el de Newton. Tome como punto de partida el punto (2,4).

¿Qué puede observarse de ambos métodos?

Problema 3

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\min f(x) = x^4 - 24x^2$$

Resolver con el método de Newton. Tome como punto de partida el punto $x = 1$.

¿Qué puede observarse?

Problema 4

Nombre las principales ventajas y desventajas de ambos métodos.

Pauta:

Problema 1

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Resolver con el método del Gradiente y el de Newton. Tome como punto de partida el punto (2,4).

Solución:

Método del Gradiente:

Iteración 1:

Primero calculamos el gradiente: $\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

El punto de partida es: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Evaluamos el gradiente en el punto: $\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo que implica que no

estamos en el óptimo.

Calculamos un segundo punto a partir del método:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda_0 \nabla f \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_k \rightarrow \min_{\lambda} f(x^k - \lambda \nabla f(x^k))$

$$f(x^0 - \lambda_0 \nabla f(x^0)) = f \begin{pmatrix} 2 - \lambda_0 4 \\ 4 - \lambda_0 8 \end{pmatrix} = (2 - \lambda_0 4)^2 + (4 - \lambda_0 8)^2$$

$$\lambda_0 \rightarrow \min (2 - \lambda_0 4)^2 + (4 - \lambda_0 8)^2$$

$$\frac{\partial ((2 - \lambda_0 4)^2 + (4 - \lambda_0 8)^2)}{\partial \lambda_0} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{2}$$

El siguiente punto es:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iteración 2:

Evaluamos el gradiente en el punto: $\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{FIN.}$

El óptimo es: $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Método de Newton:

Iteración 1:

Primero calculamos el gradiente: $\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

Luego el Hessiano: $Hf \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

El punto de partida es: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Evaluamos el gradiente en el punto: $\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo que implica que no

estamos en el óptimo.

Calculamos un segundo punto a partir del método:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto es:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iteración 2:

Evaluamos el gradiente en el punto: $\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{FIN.}$

El óptimo es: $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Problema 2

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

Resolver con el método del Gradiente y el de Newton. Tome como punto de partida el punto (2,4).

¿Qué puede observarse de ambos métodos?

Solución:

Método de Newton:

Iteración 1:

Primero calculamos el gradiente: $\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Luego el Hessiano: $Hf \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

El punto de partida es: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Evaluamos el gradiente en el punto: $\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo que implica que no

estamos en el óptimo.

Calculamos un segundo punto a partir del método:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

El siguiente punto es:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iteración 2:

Evaluamos el gradiente en el punto: $\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{FIN.}$

El óptimo es: $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Método del Gradiente:

Iteración 1:

Primero calculamos el gradiente: $\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

El punto de partida es: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Evaluamos el gradiente en el punto: $\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo que implica que no

estamos en el óptimo.

Calculamos un segundo punto a partir del método:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda_0 \nabla f \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_k \rightarrow \min_{\lambda} f(x^k - \lambda \nabla f(x^k))$

$$f(x^0 - \lambda_0 \nabla f(x^0)) = f \begin{pmatrix} 2 - \lambda_0 4 \\ 4 - \lambda_0 4 \end{pmatrix} = (2 - \lambda_0 4)^2 + (4 - \lambda_0 4)^2$$

$$\lambda_0 \rightarrow \min (2 - \lambda_0 4)^2 + \frac{1}{2} (4 - \lambda_0 4)^2$$

$$\frac{\partial ((2 - \lambda_0 4)^2 + \frac{1}{2} (4 - \lambda_0 4)^2)}{\partial \lambda_0} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{2}{3}$$

El siguiente punto es:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Iteración 2:

etc....

Vemos que la convergencia del método de Newton es mejor que la del método del Gradiente. Esto es, con el método de Newton se converge más rápido al punto.

Problema 3

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\min f(x) = x^4 - 24x^2$$

Resolver con el método de Newton. Tome como punto de partida el punto $x = 1$.

¿Qué puede observarse?

Solución:

Método de Newton:

Iteración 1:

Primero calculamos el gradiente: $\nabla f(x) = 4x^3 - 48x$

Luego el Hessiano: $Hf(x) = 12x^2 - 48 \Rightarrow Hf^{-1}(x) = \frac{1}{12x^2 - 48}$

El punto de partida es: $x = 1$

Evaluamos el gradiente en el punto: $\nabla f(x) = 4 - 48 = -44$, lo que implica que no estamos en el óptimo.

Calculamos un segundo punto a partir del método:

$$x^1 = 1 - \frac{1}{-36} \cdot (-44)$$

El siguiente punto es:

$$x^1 = -\frac{2}{9}$$

Con las siguientes iteraciones tenemos...

x	f'(x)	f''(x)	F.O.
- 2/9	7744/729	-1280/27	-1042/881
1/540	-4/45	-48	0
0	0	-48	0

Vemos que el valor de la F.O. va creciendo, convergiendo a un máximo. Esto se da porque se escogió mal el punto de partida, ya que el Hessiano es definido negativo en ese punto (de hecho es definido negativo para cualquier punto en el intervalo $(-2,2)$).

Problema 4

Nombre las principales ventajas y desventajas de ambos métodos.

Solución:

El método de Newton converge más rápido que el del gradiente.

El método del Gradiente siempre irá orientándose hacia el punto buscado, lo que no necesariamente ocurre en el método de Newton.

=> Puede ser una buena estrategia partir con el método del Gradiente, y seguir con el método de Newton.

Además en el método de Newton es necesario calcular el Hessiano e invertirlo, lo que puede ser engorroso.