



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial  
IN34A Optimización  
Semestre Primavera 2005

Profesor: Guillermo Duran  
Richard Weber

Auxiliares: Marianela Pereira  
Ximena Schultz  
Matías Pulido  
Sebastián Guzmán

**Auxiliar N° 1**  
**Pauta**  
**16 de Marzo de 2005**

**Pregunta 1**

Un comerciante compra azúcar a granel y vende al detalle. Para venderla tiene dos alternativas: envases de 1 kg y envases de 5 kg. El precio de venta es \$300 y \$250 por kg respectivamente, y en el mercado del azúcar al detalle se pueden vender 20.000 kg en envases de 1 kg y 17.000 en envases de 5 kg.

Debido a un contrato anterior se deben entregar 5.000 kg en envases de 5 kg a un determinado cliente.

El comerciante se puede abastecer de azúcar desde dos proveedores. El primero le puede vender hasta 15.000 kg a un precio de \$90 por kg, y el segundo le ofrece la cantidad de azúcar que el comerciante desee, pero a un precio de \$110 por kg y debido a requerimientos de sus distribuidores el comerciante debe vender menos del tercio del azúcar en envases de 1 kg.

Además, suponga que el precio de los envases y el proceso de envasado son nulos, y que el comerciante no tiene azúcar almacenada y vende todo el azúcar que compra.

Formule un problema de programación lineal que permita al comerciante decidir cual es el plan de abastecimiento y ventas de modo de obtener el mayor beneficio en su negocio.

**Pauta Problema 1**

**Variables de Decisión**

- $X_1$  = Cantidad de envases de un 1 kg que vende el comerciante.
- $X_2$  = Cantidad de envases de un 5 kg que vende el comerciante.
- $Y_1$  = Cantidad de azúcar que compra el comerciante al proveedor 1.
- $Y_2$  = Cantidad de azúcar que compra el comerciante al proveedor 2.

**Restricciones**

1. Limite superior de la demanda

$$\text{Azúcar en envases de 1 kg: } X_1 \leq 20.000$$

Azúcar en envases de 5 kg:  $X_2 \leq \frac{22.000}{5}$

2. Satisfacer compromisos previos

$$X_2 \geq \frac{5.000}{5}$$

3. Venta máxima del proveedor 1

$$Y_1 \leq 15.000$$

4. Requerimientos de los distribuidores

$$X_1 \leq \frac{Y_1 + Y_2}{3}$$

5. No existe almacenamiento (o todo lo que se envasa se vende)

$$X_1 + 5X_2 = Y_1 + Y_2$$

6. No negatividad

$$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \geq 0$$

### **Función Objetivo**

$$\max z = 300X_1 + 250X_2 - 90Y_1 - 110Y_2$$

### **Pregunta 2**

Los auxiliares de un curso de optimización de una universidad de gran prestigio han decidido, para hacer un bien a los alumnos de su facultad, abrir una agencia de citas.

La cantidad de inscritos en la agencia es de  $M+N$  siendo  $M$  la cantidad de mujeres y  $N$  la cantidad de hombres. Se tiene, dadas las características demográficas de la facultad, que  $N > M$ .

Todos los inscritos se "ubican" entre ellos (solo de vista) y han informado confidencialmente a la agencia que la preferencia de una mujer  $m$  por emparejarse con un hombre  $n$  es de  $PM_{mn}$  y la preferencia de un hombre  $n$  por emparejarse con una mujer  $m$  es de  $PH_{nm}$ .

Adicionalmente a cada inscrito se le hace un test de personalidad y mediante un estudio, profundo y 100% certero, se determina si existirá compatibilidad entre cada combinación de parejas, obteniendo valores  $C_{mn}$  que serán 1 si la pareja del hombre  $n$  con la mujer  $m$  es compatible y 0 si la pareja no es compatible. Cada persona es compatible con al menos una pareja.

La agencia debe decidir a qué actividades enviar a cada pareja durante su cita (ej: ir al cine, a comer, etc) para esto la agencia cuenta con una variedad de A actividades y con un presupuesto fijo dado por PSPTO y se sabe que en cada actividad a la mujer m gastará  $G_{ma}$  dependiendo del nivel de gasto al que esté habituado la mujer y se sabe que un hombre gasta  $K_a$  si realiza la actividad a, este gasto es igual para todos los hombres. Se tiene además que cada pareja no puede realizar más de tres actividades en su cita.

La preferencia de un hombre n por hacer la actividad a está dada por  $SH_{na}$  y la preferencia de una mujer m por hacer la actividad a está dada por  $SM_{ma}$ .

Se sabe que una persona solo puede ser asignada una sola vez y que todas las mujeres deben tener pareja

Los auxiliares del curso han decidido solicitar ayuda a sus alumnos pidiéndole a cada uno que formule un modelo de programación lineal entera para la primera ronda de citas, que maximice el nivel de satisfacción de preferencias.

### **Solución:**

#### Variables:

$X_{mn}$     1 si se asigna la pareja del hombre n y la mujer m  
            0 si no

$Y_{mn}$     1 se asigna la actividad a a la pareja formada por el hombre n y la mujer m  
            0 si no

#### Restricciones

1.- A cada hombre se le asigna a lo más una mujer.

$$\sum_{m=1}^M X_{mn} \leq 1 \quad \forall n = 1, \dots, N$$

2.- A cada mujer se le asigna exactamente un hombre.

$$\sum_{n=1}^N X_{mn} = 1 \quad \forall m = 1, \dots, M$$

3.- No se asigna si no hay compatibilidad.

$$X_{mn} \leq C_{mn} \quad \forall n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M$$

4.- Solo se puede tener actividades si se sale en la cita y las actividades no son más de tres.

$$\sum_{a=1}^A Y_{mna} \leq 3 \cdot X_{mn} \quad \forall n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M$$

Esta restricción también se puede separa en estas dos restricciones:

$$Y_{mna} \leq X_{mn} \quad \forall n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M, a = 1, \dots, A$$

$$\sum_{a=1}^A Y_{mna} \leq 3 \quad \forall n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M$$

5.- No se pueden pasar del presupuesto para citas

$$\sum_{a=1}^A \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M [(G_{ma} + K_a) \cdot Y_{mna}] \leq PSPTO$$

6.- Naturaleza de las variables.

$$X_{mn}, Y_{mna} \in \{0,1\} \quad \forall n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M, a = 1, \dots, A$$

Función Objetivo:

$$\max z = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [(PM_{mn} + PH_{nm}) \cdot X_{mn}] + \sum_{a=1}^A \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [(SH_{na} + SM_{ma}) \cdot Y_{mna}]$$

Nota de corrección:

0.8 por cada variable

1.2 por la función objetivo

0.5 por las restricciones 1, 2, 3, 6

0.6 por las restricciones 4,5

## Problema 2

### Pregunta 3

La empresa de productos GOLO S.A desea determinar su plan de producción y distribución para los próximos T días. Esta empresa posee K plantas productoras, en cada una de las cuales puede producirse N tipos de productos distintos. Una vez producidos, estos productos deben ser despachados inmediatamente a las bodegas de almacenamiento que se encuentran exactamente en el mismo lugar de la planta (en cada planta hay una bodega adyacente). Los productos son mantenidos en bodega hasta que son enviados a alguno de los I supermercados (centros de venta) disponibles y para ello tienen 2 posibilidades de vías de transporte las cuales difieren en costo y rapidez.

Para el desarrollo del modelo considere los siguientes elementos:

|          |   |
|----------|---|
| $K_{kn}$ | Capacidad diaria (kg) de producción del producto n en la planta k.      |
| $F_n$    | Volumen ( $m^3$ ) ocupado por 1 kg. de producto n.                      |
| $M_k$    | Costo diario de mantención (en \$/u.d.p.) de inventario en la bodega k. |

|            |  |
|------------|--|
| $B_n$      | Costo unitario (\$) de elaboración del producto n.   |
| $D_{ni}$   | Demanda diaria (kg) del producto n en el supermercado i.   |
| $H_k$      | Capacidad ( $m^3$ ) de la bodega asociada a la planta k.   |
| $C_{ijkt}$ | Costo unitario de transporte (\$/ $m^3$ ) desde bodega k hacia el supermercado i por la vía de transporte j en el día t. |

Para efectos del modelo, considere que el tiempo de transporte desde cualquier supermercado es de 1 día si se elige la vía de transporte 1 ( $j=1$ ) y de 2 días si se elige la vía de transporte 2 ( $j=2$ ). Además, suponga que cada bodega tiene un inventario inicial nulo para todos sus productos.

1. Formule un modelo de programación lineal que le permita a GOLO S.A encontrar su plan de producción y distribución a mínimo costo satisfaciendo los requerimientos descritos.

2. Suponga que los productos son perecibles y que el tiempo máximo que puede pasar entre la producción y la llegada al supermercado para un producto son 5 días. Reformule el problema internalizando esta nueva restricción.

## Solución

### Variables de Decisión

$x_n^{tk}$  = Cantidad (kg) del producto n, que se produce en la planta k en el día t

$y_{nj}^{tik}$  = Cantidad (kg) del producto n, que se envía desde la bodega k hacia el supermercado i por la vía j en el día t.

$z_n^{tk}$  = Inventario (kg) del producto n en la bodega k, al final del día t

Conjunto de índices:

$n=1,2,\dots,N$

$j=1,2$

$t=1,2,\dots,T$

$i=1,2,\dots,I$

$k=1,2,\dots,K$

En un problema de optimización pueden existir varias formas alternativas de definir las variables de decisión. Así por ejemplo, en este problema, podría haberse omitido la variable de inventario pues queda determinada implícitamente por la producción y los despachos. Sin embargo, se incluye por claridad de resolución. Notar que al incluir esta variable, debemos agregar una restricción que una lógicamente las variables en cuestión. Lo relevante son los *grados de libertad del problema*.

En general, la forma en que escojamos nuestras variables hará que sea más fácil o más difícil el planteamiento de las restricciones y función objetivo.

## Restricciones

1. Capacidad productiva de la planta.

$$x_n^{tk} \leq K_{kn} \quad \forall t, k, n$$

2. Capacidad de Almacenaje en Bodega.

$$\sum_{n=1}^N F_n z_n^{tk} \leq H_k \quad \forall t, k$$

3. Satisfacción de Demanda de Supermercados.

$$\sum_{k=1}^K y_{n1}^{tik} + \sum_{k=1}^K y_{n2}^{t-1ik} \geq D_{ni} \quad \forall n, i, t$$

4. Balance de Flujos de Inventario.

$$z_n^{t-1k} + x_n^{tk} - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^I y_{nj}^{tik} = z_n^{tk} \quad \forall t, k, n$$

5. Factibilidad de los despachos.

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^I y_{jn}^{tik} \leq z_n^{t-1k} + x_n^{tk} \quad \forall n, i, t$$

6. Condición de Borde.

$$z_n^{0k} = 0 \quad \forall k, n$$

7. Naturaleza de las variables.

$$\begin{aligned} x_n^{tk} &\geq 0 \\ y_{nj}^{tik} &\geq 0 \\ z_n^{tk} &\geq 0 \end{aligned} \quad \forall i, j, n, k, t$$

## Función Objetivo

$$\min F = \sum_{n,t,k} B_n x_n^{tk} + \sum_{i,j,n,t,k} C_{ijtk} F_n y_{nj}^{tik} + \sum_{n,t,k} M_k z_n^{tk}$$

**Dudas y Comentarios a:**  
**mapereir@ing.uchile.cl**