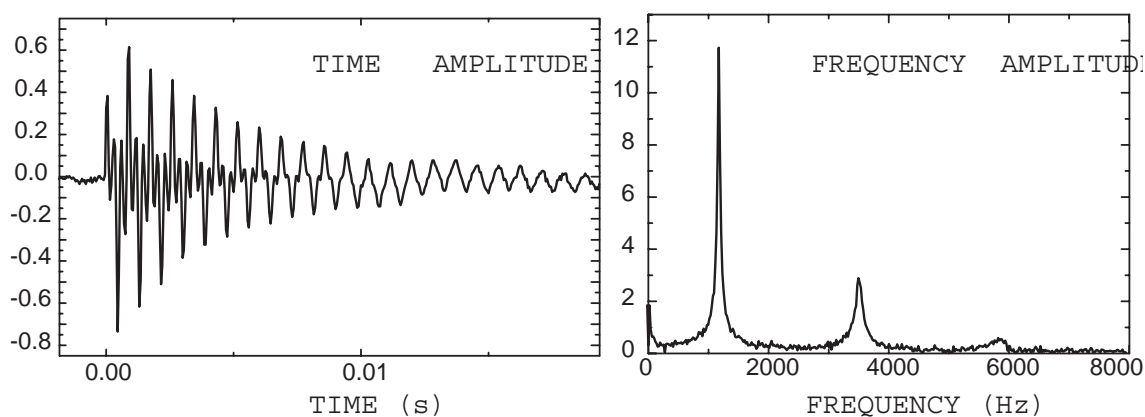
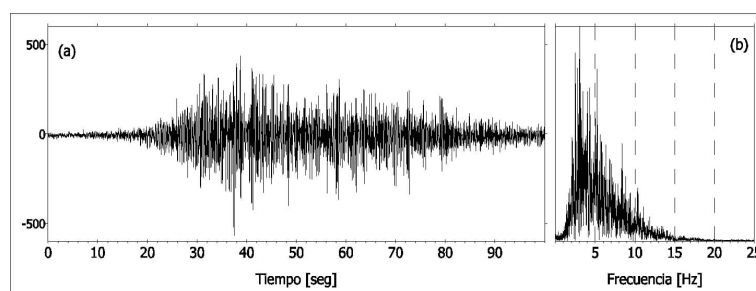




Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Geofísica

GF711

Series de tiempo Tratamiento de señales



Profesor : Denis Legrand

Versión del 19 de octubre de 2005

Índice

1. Introducción	1
1.1. ¿Que es una señal, el ruido y como separarlos?	1
1.2. Los espacios duales	2
1.3. Transformadas de Fourier, de Laplace, en z, de Hilbert, en wavelets, en fin ...	3
1.4. Uso de una transformada para resolver problemas matemáticos	4
1.5. Señales continuas (analógicas) y discretas (muestreadas)	5
2. Series de Fourier de señales continuas y periódicas	7
2.1. Series de Fourier para representar una función real continua y periódica	8
2.2. Otras formulaciones de series de Fourier	10
2.3. Series de Fourier para representar una función real continua y aperiódica sobre un intervalo fijo: series de Fourier en senos y cosenos	17
3. Transformadas de Fourier de señales continuas aperiódicas:	27
3.1. Transformada de Fourier continua directa TF de una señal aperiódica	27
3.1.1. Definición	28
3.1.2. Espectros de amplitud, de fase y de energía. Formula de Parseval	28
3.1.3. ¿Significado de una TF ?	30
3.2. Transformación de Fourier continua inversa TF^{-1}	32
3.3. Resumen ☺	35

3.4. Propiedades de la transformada de Fourier	36
3.4.1. Linealidad	36
3.4.2. Simetría y paridad	36
3.4.3. Similitud u homotecia	38
3.4.4. Translación (retraso o adelanto)	38
3.4.5. Derivación	38
3.4.6. TF de un producto simple y de un producto de convolución	38
3.5. Ejemplos de funciones o distribuciones con sus TF asociadas	39
3.5.1. Función step (escalera) o de Heaviside	39
3.5.2. Función puerta	41
3.5.3. Función triángulo	46
3.5.4. Función sine cardinal sinc	46
3.5.5. Funciones trigonométricas	47
3.5.6. Función de Hanning	47
3.5.7. Función signo	48
3.5.8. Función exponencial decreciente	48
3.5.9. Sinus o cosinus modulado	49
3.5.10. Dirac	49
3.5.11. Peineta de Dirac o Shah	54
3.5.12. Función par e impar	55
3.5.13. Resumen ☺	57
3.6. Convolución continua de dos señales	59
3.6.1. Definición	59
3.6.2. Propiedades del producto de convolución	60
3.6.3. Derivación de un producto de convolución	60

3.6.4.	Integración y producto de convolución	61
3.6.5.	Periodización de una función: convolución por una peineta de Dirac	61
3.6.6.	Repuesta de un sistema lineal: repuesta al impulso, función de Green, repuesta instrumental y producto de convolución	61
3.7.	El fenómeno de Gibbs y apodización	63
3.8.	Transformada de Fourier 2 D o transformada (f, k) o (k_1, k_2)	63
4.	Señales discretas: Muestreo temporal y frecuencial	65
4.1.	Muestreo temporal ideal perfecto de una función continua	65
4.1.1.	¿Como pasar de una función continua a una función muestreada?	66
4.1.2.	Transformada de Fourier de una función muestreada: Periodización del espectro:	68
4.1.3.	Buen muestreo temporal: conservación del espectro o condición de Shannon	69
4.1.4.	Mal muestreo temporal: No conservación del espectro i.e bajo-muestreo i.e fenómeno de aliasing	75
4.1.5.	Como pasar de una función muestreada a una función continua: Formula de interpolación de Shannon	79
4.2.	Muestreo temporal real imperfecto de una función continua: periodización con atenuación del espectro	83
4.3.	Muestreo frecuencial (de la TF): periodización de la función temporal	84
5.	Transformadas en z de una función muestreada: TZ	86
5.1.	Definiciones	86
5.1.1.	Transformada en z bilateral	87
5.1.2.	Transformada en z unilateral	87
5.2.	Transformada en z unilateral de una función muestreada definida en N puntos	88
5.3.	Ejemplo: salida de un instrumento de una señal en z^n	88
5.4.	Propiedades	90

5.4.1. Multiplicar por z : atraso en tiempo de Δt	90
5.4.2. Multiplicación de dos TZ: convolución discreta	90
5.4.3. División de una TZ por otra TZ: deconvolución discreta	92
5.4.4. Repuesta instrumental: Función de transferencia: los polos y ceros	93
6. Transformada de Fourier discreta: TFD	95
6.1. Transformada de Fourier discreta: TFD	95
6.1.1. Transformada de Fourier discreta directa: TFD	95
6.1.2. Transformada de Fourier discreta inversa: TFD^{-1}	99
6.1.3. Propiedades de la transformada de Fourier discreta	100
6.2. Transformada de Fourier Rápida FFT de la TFD	104
6.3. Padding effect o interpolación del espectro	106
6.4. Taper o Apodisación	107
7. Tratamientos	109
7.1. Convolución-Deconvolución	109
7.2. Inter-Correlación y auto-correlación	109
7.3. Filtros: ¿todo será un filtro?	112
7.3.1. Filtro anti-aliasing	114
7.3.2. Filtro puerta paso banda: Un filtro ideal en frecuencia que no es ideal en tiempo...	114
7.3.3. Filtro causal	115
7.3.4. Filtro anti-aliasing	115
8. Ejemplos	116
8.1. Las cuerdas de una guitarra o de un piano:	116
8.2. Los modos propios de resonancia de la Tierra:	117

8.2.1. Generados por un terremoto:	117
8.2.2. Generados de manera continua:	120
8.2.3. Los instrumentos para grabar los modos propios de la Tierra:	121
8.2.4. Analisis espectral para encontrar los modos propios de la Tierra: . .	123
8.2.5. Otra aplicación: Los modos propios de una camara magmatica: . . .	124
8.3. Sismología volcánica:	124
8.3.1. Señales volcanicas grabados en sismómetros banda ancha	124
8.3.2. Clasificación de eventos volcanicos grabados en sismometros cortos periodos	126
8.4. Sismología tectónica:	128
8.4.1. Espectros de señales en campo cernano	128
8.4.2. Ondas de volumen y de superficie	128
8.4.3. ejempl	129
8.4.4. El método de Nakamura	130
8.5. Señales de experimentos en laboratorios:	130
8.5.1. Señales acusticas	130
8.5.2. Señales símicas banda ancha	131
8.6. Proceso del sonido:	132
8.7. Proceso de imagenes:	132
9. Bibliografia	133

Índice de figuras

1.1. Muestreo de la función continua $\sin(x)$	5
2.1. Espectro discreto de una función continua y periódica	10
2.2. Series de Fourier de $\sum_n 1/n \sin(n\omega t)$	16
2.3. Series de Fourier en coseno de $f(t) = t$ en $[0, \pi]$	21
2.4. Zoom de la figura 2.3	21
2.5. Series de Fourier en seno de $f(t) = t$ en $[0, \pi]$	22
2.6. Zoom de la figura 2.5	22
2.7. Series de Fourier en seno de $f(t) = 1$ en $[0, \pi]$	23
2.8. Zoom de la figura 2.7	24
2.9. Series de Fourier en seno de $f(t) = \cos(t)$ en $[0, \pi]$	25
2.10. Zoom de la figura 2.9	26
3.1. Espectros de señales desfasadas	31
3.2. Espectro de la función puerta	33
3.3. Función Heaviside y su espectro	40
3.4. Fotos de Heaviside	41
3.5. Función Puerta y su espectro	43
3.6. Espectro de un sismograma no centrado y centrado	45
3.7. Función Puerta como diferencia de 2 Heaviside	46

3.8. Fotos de Dirac	50
3.9. Dirac como limite de una puerta	51
3.10. Parte par e impar de un sismograma	56
3.11. insertar figura	64
4.1. Muestreo de una función continua	67
4.2. Espectros discretos y continuos y periodicos	70
4.3. Espectros discretos de una función periódica	71
4.4. Espectros	71
4.5. Conservación del espectro: condición de Shannon	73
4.6. No conservación del espectro: fenómeno de aliasing	76
4.7. Espectros	77
4.8. Espectros	78
4.9. Espectros	79
4.10. Paso para la interpolación de Shannon	81
5.1. Convolución gráfica de 2 señales muestreadas	92
6.1. Circulo de los z-puntos de una TFD	98
8.1. Como generar los modos propios de la Tierra	118
8.2. Modos propios toroïdales y esferoïdales	119
8.3. Oscilaciones libres permanentes de la Tierra	120
8.4. Sismometro banda ancha STS-1	122
8.5. Gravimetro a supra-conductivida	123
8.6. Spectrogramas de datos volcanicos	125
8.7. Clasificación de señales volcanicos	129
8.8. Tornillo en el volcán Tungurahua	130

8.9. Ejemplo del metodo de Nakamura	131
8.10. Señales acusticas	132

Capítulo 1

Introducción

1.1. ¿Que es una señal, el ruido y como separarlos?

Desde mucho tiempo, el hombre observa el cielo y anota las diferentes posiciones de astros, las compara entre ellas a diferentes tiempos. Por ejemplo, los eclipses estaban repertoriados, y se constataba frecuentemente que 15 días antes o después de un eclipse de Sol había una de la Luna. Durante siglos, en Uruk (ciudad en Mesopotamia (Irak actual), en el quinto milenio antes de Cristo, que se llama ahora Warka en arabe) y Nippur (antigua ciudad de Babilonia, en el tercer milenio antes de Cristo) estas observaciones fueron anotadas en tabletas de arcilla. Algunas fueron encontradas por arqueólogos. Los Babilónicos empezaron a hacer predicciones de eventos como los eclipses. Poco a poco, se pudieron determinar también las trayectorias de algunos astros. Unas de las primeras series de tiempo habían nacido. Así Kepler (1571-1630) pudo determinar las leyes de movimiento de planetas (como Marte) en 1609 con las series de observaciones de su cuñado Tycho Brahé (quien murió en 1601), del cual fue asistente en 1600 en el observatorio de Tycho Brahé, cerca de Praga. Kepler hizo lo que ahora llamamos un tratamiento de señales de estas observaciones temporales.

En este curso, vamos a estudiar señales temporales o espaciales. Puede ser una señal sonora (sonido), visual (imagen), ondas eléctricas, electromagnéticas, sísmicas... Puede ser una señal que depende de una sola variable como el tiempo: En este caso, se habla de tratamiento de una señal temporal o de series de tiempo. La señal puede depender de dos o más variables, como dos variables espaciales (como un imagen) o una mezcla de las dos (por ejemplo en el caso de un perfil sísmico vamos a tener el tiempo de propagación en función de la distancia). Uno de los propósitos del tratamiento de señales es 'extraer' (usando filtros) la información (que llamaremos señal) que nos interesa de un registro temporal o espacial y 'eliminar' o 'reducir' el ruido (lo que no nos interesa). El punto es que una señal puede ser ruido para algunos y señal para otros. Depende de lo que le interesa a uno. Eso supone que debemos tener una información *a priori* de lo que estamos buscando en base de un problema físico. Por ejemplo, en un sismograma, si una

primera persona quiere estudiar ondas de superficie (que son de baja frecuencia), va a buscar en la señal inicial información en las bajas frecuencias y eliminar las altas. En este mismo sismograma, si una segunda persona quiere estudiar ondas de volumen (que son de más alta frecuencia), va a buscar información en la señal inicial en las altas frecuencias y eliminar las bajas. En este caso, las bajas frecuencias serán una señal para la primera persona y será ruido para la segunda persona. Para hacer eso, se supone que uno conoce bien el problema físico de las ondas sísmicas de superficie y de volumen para poder interpretar los resultados de un filtro que selecciona solamente las altas frecuencias o las bajas frecuencias. O sea, el tratamiento de la señal no hace milagros: es una herramienta que sirve para gente que ya conoce el problema físico que se esconde detrás de una señal.

El tratamiento numérico de la señal consiste en un conjunto de teorías y métodos, independientes de las señales tratadas, permitiendo de crear, analizar, modificar, clasificar y reconocer las señales. Es una ciencia muy aplicada porque las señales numéricas casi no existen en la naturaleza. Fue inventado por el hombre. Todo el contenido de este curso se puede aplicar a cualquier señal, imagen... El impulso de estos tratamientos fue en los años 1960 con el descubrimiento de calculo rápido de transformadas de Fourier discreta por Cooley y Tukey en 1965. Los libros bases son de los años 1970.

John Tukey (1915-2000) era un estadístico americano. Hizo una licencia de química y dos en matemática. Fue investigador en los laboratorios Bell. James Cooley (1926-) es matemático americano. Trabajó en IBM e inventó con Tukey la FFT (Fast Fourier Transform) que fue publicada para todos por IBM, sin patente ('brevet').

1.2. Los espacios duales

Hay diferentes maneras de mirar una señal temporal: una en el **dominio del tiempo** y otra en el **dominio de la frecuencia** (inverso del tiempo), haciendo una transformada de Fourier temporal. De igual manera con una señal en el **dominio del espacio**: el otro dominio será en este caso el **dominio de número de onda** (inverso de la distancia) y se hará una transformada de Fourier espacial. Entonces, siempre tendremos **dos maneras de ver un problema o una señal**: una en el dominio inicial (tiempo o espacio) y otra en el dominio de Fourier asociado (que llamaremos **espacio dual**): el dominio de la frecuencia o de número de onda respectivamente. Vamos a pasar de un espacio a otro constantemente, y veremos que estos espacios están muy ligados y que **existe una dualidad entre estos dos dominios**, similar al principio de incertidumbre de Heisenberg. Es decir, **si conocemos una señal de manera muy puntual en el tiempo, tendremos una descripción muy vaga en el dominio de las frecuencias y vice versa**. Así tenemos cada vez una doble representación (e.g. tiempo/frecuencia o espacio/numero de onda) y se puede pasar de una representación a otra. Pero hay que ver que **estas dos representaciones conservan exactamente la misma información**: no va-

mos a tener más información mirando una señal en el dominio de las frecuencias que en el dominio del tiempo. Son solamente **dos maneras diferentes de representar la misma información.**

espacio temporal	espacio espacial
tiempo	distancia
período	longitud de onda
frecuencia	número de onda

Veremos en este curso muchos ejemplos de dualidades. Aquí estan algunos:

espacio temporal	espacio dual frecuencial
Función temporal concentrada Función temporal dispersa $\delta(t)$ 1	Espectro disperso Espectro concentrada 1 $\delta(\nu)$
Función temporal continua Función temporal discreta periódica	Espectro discreto periódico Espectro continuo
Muestreo en tiempo Periodización de la función temporal	Periodización del espectro Muestreo en frecuencia
Interpolar Filtar	Filtrar Interpolar
Derivar Integrar	Multiplicar por $i\omega$ Dividir por $i\omega$
Producto simple Producto de convolución	Producto de convolución Producto simple

1.3. Transformadas de Fourier, de Laplace, en z, de Hilbert, en wavelets, en fin ...

A veces, es interesante pasar de un espacio a su espacio dual asociado para facilitar operaciones matemáticas o descripciones de una señal. Para pasar de un dominio a su

dominio dual, se puede usar cualquier transformada, y definir después una transformada inversa para regresar al espacio inicial. Puede ser una transformada de Fourier (decomponer una señal en una base de funciones trigonométricas), pero se podría usar otra base para descomponer la señal inicial, y definir otras transformadas (e.g. de Laplace, de Hilbert, en wavelets ...). Es importante saber que tipo de transformada usar. La de Fourier no es la única y no es siempre la más adecuada. A veces una transformada de Laplace es más conveniente. Por ejemplo si trabajamos en un espacio infinito, podemos usar una transformada de Fourier en la cual interviene una integral de menos infinito a más infinito. Pero si trabajamos con el tiempo positivo, podremos usar la transformada de Laplace porque en su definición la integral es de 0 a más infinito. O si trabajamos en una componente espacial que es siempre positiva (en el caso de un semi espacio por ejemplo), podremos usar ventajosamente una transformada de Laplace sobre esta componente. Claro no es falso resolver el problema con transformadas de Fourier, es solamente a veces más complicado.

1.4. Uso de una transformada para resolver problemas matemáticos

Veremos también que algunos problemas de física se resuelven más fácil o más rápido en el espacio dual (e.g. dominio de la frecuencia o de número de onda) que en el dominio inicial (del tiempo o del espacio): después de haber resuelto este problema en el espacio dual haciendo una transformada (de Fourier, de Hilbert, de Laplace), se vuelve en el espacio inicial, haciendo una transformada (de Fourier, de Hilbert, de Laplace) inversa. Por ejemplo, a veces es más fácil resolver ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales en el dominio de la frecuencia. Otro ejemplo: hacer la convolución de dos señales en el dominio del tiempo demora mucho más tiempo que hacerlo en el dominio de las frecuencias (porque en el dominio de las frecuencias la convolución se transforma en un producto simple). De igual manera, ciertas propiedades son más fáciles de resolver usando una transformada de Fourier que hacer una demostración directa (ver la demostración de la derivada de un producto de convolución en este curso). Entonces generalmente para hacer una convolución en el dominio del tiempo, se toma la transformada de Fourier de cada señal, se hace el producto simple de estas transformadas en el dominio de las frecuencias y después se regresa al dominio del tiempo haciendo una transformada de Fourier inversa. Así se pasa de un dominio a otro frecuentemente para hacer cálculos más fácilmente o más rápidamente. Cada persona debe saber cuando es más ventajoso usar uno o el otro: en algunos casos es evidente, pero en otros casos lo es menos. Hay diferentes escuelas... A veces un buen conocimiento del problema físico permite escoger cual de los dos tomar.

1.5. Señales continuas (analógicas) y discretas (muestreadas)

Muchas señales dependen solamente de una variable, como el tiempo: se trata entonces de señales mono-dimensionales y se denominan a veces como series de tiempo, pero vamos a ver también otras señales, por ejemplo una imagen o perfiles sísmicos que son señales bi-dimensionales. Una gran parte de las señales son **analógicas**: pueden ser descritas por una función continua de la variable temporal t , y en teoría pueden tomar cualquier valor real. Es el caso de los teléfonos o de los primeros sismógrafos (se usaba el sufijo '-grafo' porque el soporte era generalmente un soporte gráfico como el papel). Desde algunas décadas, existen sistemas eléctricos (con convertidores analógico-numérico) que permiten muestrear y cuantificar las señales analógicas, transformándolas en señales **numéricas**. Estas señales están definidas solamente para tiempos discretos t_n , que corresponden a tiempos de muestreo en los cuales se mide la señal. Estas señales numéricas pueden tomar un número finito de valores discretos. Existen también convertidores numérico-analógicos permitiendo hacer el proceso inverso: convertir una señal numérica en una señal analógica.

Entonces, una señal puede ser **continua** (i.e. **analógica**) o **discreta** (**muestreada**, por ejemplo **numérica**).

La figura 4.1 muestra un ejemplo de una función continua (arriba) que fue muestreada (abajo).

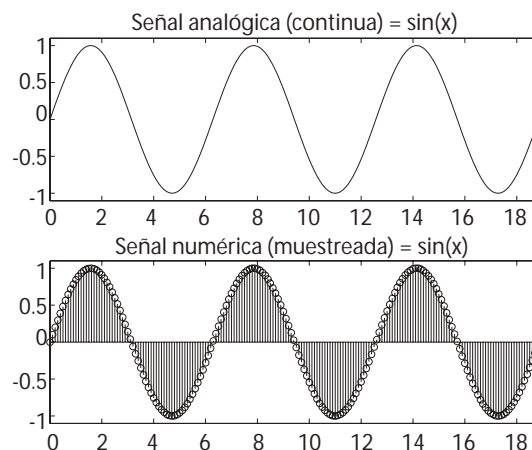


Figura 1.1: Muestreo de la función continua $\sin(x)$, tasa de muestro $=0.1$

Vamos a dar algunas aplicaciones en este curso en computadora (usando Matlab o cualquier otro programa). Siempre hay que tomar en cuenta que hay varias definiciones de las transformadas (transformada de Fourier, transformada de Fourier inversa, transformada de Hilbert, transformada de Laplace ...). Entonces siempre deben chequear qué definición está usando un programa. Igual hay que ver como normaliza los resultados. No deben pensar que una transformada de Fourier es una transformada de Fourier y punto. Deben saber muy bien que definición está usando un programa, como normaliza etc... y por eso

es súper importante conocer la teoría. Nunca deben usar un programa ciegamente, como una caja negra. Siempre deben preguntarse qué está haciendo exactamente un programa, que definición usa ... Para hacer eso, pueden hacer unas pruebas básicas que vamos a presentar en este curso.

Lo difícil en el tratamiento de la señal es que nunca podemos hacer lo que queremos: apenas intentemos de hacer algo que surgen problemas. Apenas resolvemos estos problemas que nuevos problemas aparecen, tratando de eliminar los primeros. Generalmente por razones de la dualidad tiempo/frecuencia. En tratamiento de señales, los problemas son sin fin ... En fin ...

Capítulo 2

Series de Fourier de señales continuas y periódicas



Jean-Baptiste Joseph Fourier nació en Auxerre (Francia) en 1768, y murió en París en 1830. Desde muy joven fue interesado por las matemáticas y envió en 1789 a la Academia de Ciencias de París un trabajo sobre la aproximación de las raíces de ecuaciones polinomiales. Fue profesor en la Escuela Politécnica. En 1807, presenta a la Academia de Ciencias de París un trabajo sobre las ecuaciones que describen la propagación del calor en un cuerpo sólido. En 1822 publica su teoría analítica del calor, con el método de análisis que se llama ahora análisis de Fourier. Ya algunas sumas de series trigonométricas habían sido calculadas por Euler (1707-1783) o Bernoulli (1700-1782) o d'Alembert (1717-1783) pero es Fourier quien estableció las bases rigurosas de la teoría. Sus primeros trabajos de 1807 solamente trataban con series trigonométricas, y es en 1812 que pasa al límite.

Suponemos que queremos conocer que tipo de frecuencias contiene un trozo de música (o un sismograma). Para conocer eso, se hace una transformada de Fourier, y se puede dibujar dos gráficos que van a indicar la amplitud y la fase de cada frecuencia. Veremos que esta transformada sirve a muchas otras cosas también.

En esta parte, vamos a estudiar funciones continuas (analógicas) del tiempo t , y sus transformadas de Fourier asociadas. Veremos después el caso de señales numéricas, muestreadas.

2.1. Series de Fourier para representar una función real continua y periódica

Una función $f(t)$ es periódica de periodo T (con $T > 0$) si para todo tiempo t :

$$\forall t \quad f(t) = f(t + T) \quad (2.1)$$

Se llama periodo fundamental T_1 el valor mínimo de T que verifica la ecuación anterior, y la frecuencia fundamental es:

$$\nu_1 = 1/T_1.$$

Notamos la frecuencia fundamental ν_1 y no ν_0 como es común, porque vamos a ver que el fundamental corresponde a un armónico de orden $n=1$.

La pulsación angular fundamental es: $\omega_1 = 2\pi\nu_1 = 2\pi/T_1$.

Una función continua $f(t)$ real y periódica de periodo T (con $T > 0$) puede escribirse como una serie de Fourier es decir de la manera siguiente:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{2i\pi n t/T_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_1 t} \quad (2.2)$$

con

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) e^{-2i\pi n t/T_1} dt = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt \quad (2.3)$$

\int_{T_1} significa una integral sobre cualquier intervalo de longitud T_1 .

Notar que n puede ser negativo.

F_n es un complejo y se puede escribir: $F_n = |F_n| e^{i\Phi_n}$.

$|F_n|$ se llama el **espectro de amplitud**, y Φ_n el **espectro de fase**.

La función $f(t)$ es periódica, es decir que tiene energía de menos infinito a más infinito, es por eso que se expresa con una base también infinita (una base de senos y cosenos de soporte infinito).

Como cada exponencial compleja es una función periódica, verificamos que la suma $f(t)$ es bien periódica, de mismo período T_1 . El término para $n = 0$ es constante, y da el nivel promedio de la función f . Los dos términos para $n = -1$ y $n = +1$ tiene como período T_1 , y se refieren como las componentes fundamentales, los dos términos con $n = -2$ y $n = +2$ son periódicos con un período $T_1/2$ (una frecuencia doble) y se llaman las componentes de armónico 2 etc..

$n = 0$: constante
 $n = \pm 1$: fundamental (armónico 1)
 $n = \pm 2$: armónico 2
 $n = \pm N$: armónico N
 n verifica $T = nT_1$ y se llama el **armónico de orden n**

Los armónicos se llaman en inglés a veces **overtone**, porque el tono fundamental tiene una frecuencia, y las frecuencias más altas (número entero del armónico) son más agudas.

Una señal real y periódica se puede representar como una combinación lineal de una suma infinita de exponenciales complejas relacionadas **armonicamente** (es decir la sumatoria de **frecuencias de forma n/T_1 con n entero**) y ponderadas por una amplitud. O de manera inversa, si hacemos una sumatoria de *sin* y *cos* con diferentes amplitudes y fases, tenemos como resultado una función periódica, a la condición que esa sumatoria sea una sumatoria infinita de una frecuencia fundamental y de todos sus armónicos, o sea sumando funciones trigonométricas de números **enteros** de la frecuencia fundamental.

El espectro de amplitud $|F_n|$ de una función continua y periódica $f(t)$ es discreto (definido solamente en un número infinito pero discreto (n/T_1) con n entero) de valores de la frecuencia fundamental $1/T_1$.

Ejemplo: ¿Cuál es el espectro de la serie de Fourier de la función periódica puerta y continua?

Repuesta: Calcular 'a mano' los coeficientes. Son $F_n = Ad \sin(n\pi d)/(n\pi d)$ con A la amplitud de las puertas, y $d = \tau/T$ con τ la longitud de las puertas y T el período de la señal (τ más el número de ceros entre 2 puertas). La figura 2.1 es para $d=0.1538$.

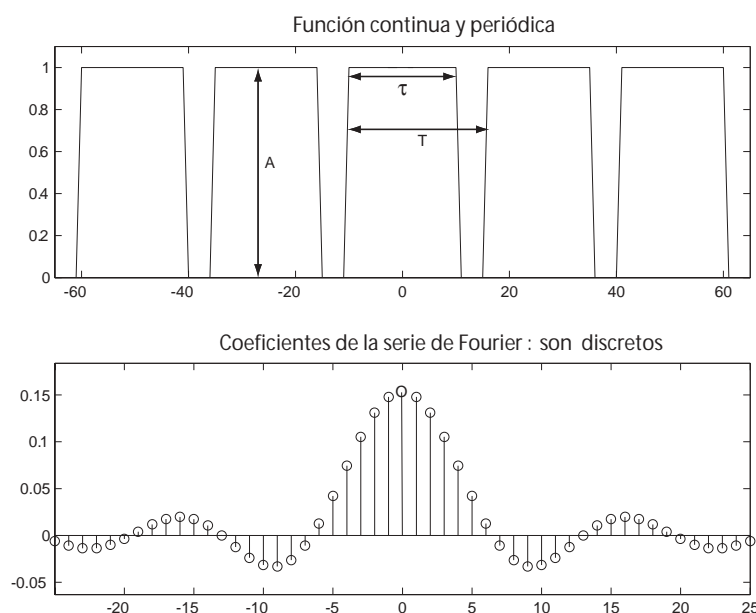


Figura 2.1: Espectro discreto de una función continua y periódica (ver figura 3.2)

2.2. Otras formulaciones de series de Fourier

La forma anterior no es la única manera de escribir una serie de Fourier y vamos a ver un par de definiciones diferentes y equivalentes.

Escribimos ahora una serie de Fourier de otra manera, como sumatoria infinita de senos y cosenos. Para eso, transformamos la exponencial compleja en una suma de senos y cosenos. Como la función $f(t)$ es real, su complejo conjugado (notado $f^*(t)$) es igual a $f(t)$: $f^*(t) = f(t)$, es decir:

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* e^{-in\omega_1 t} = f(t) \quad (2.4)$$

Haciendo un cambio de índice $n = -k$, tenemos:

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{-k}^* e^{ik\omega_1 t} = f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{ik\omega_1 t} \quad (2.5)$$

entonces debemos tener: $F_{-k}^* = F_k$ o sea de manera equivalente: $F_k^* = F_{-k}$.

Ahora, escribimos de nuevo la serie de Fourier inicial, cambiando un poco su forma, de la manera siguiente:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [F_n e^{in\omega_1 t} + F_{-n} e^{-in\omega_1 t}]$$

Usando ahora la propiedad $F_k^* = F_{-k}$ tenemos:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [F_n e^{in\omega_1 t} + F_n^* e^{-in\omega_1 t}]$$

Como los dos términos adentro de la suma son conjugados complejos uno del otro, podemos escribir:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [F_n e^{in\omega_1 t}]$$

donde Re es la parte real.

Como F_n es complejo, podemos escribirlo como:

$$F_n = C_n e^{i\theta_n}$$

es decir como una amplitud y una fase y entonces:

$$f(t) = F_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n)$$

Podemos escribir esta formula de otra manera también:

$$F_n = D_n + i E_n$$

donde D_n y E_n son reales. Entonces tenemos:

$$f(t) = F_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [D_n \cos(n\omega_1 t) - E_n \sin(n\omega_1 t)]$$

Por razones de simetría, la podemos escribir de la forma:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)] \quad (2.6)$$

con:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0 = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) dt \\ A_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \\ B_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \end{array} \right. \quad (2.7)$$

$$Propiedad : F_0 = \frac{A_0}{2} \quad (2.8)$$

Para mostrar las formulas [2.7](#), multiplicar [2.6](#) por $\sin(k\omega_1 t)$, integrar sobre un intervalo T_1 y usar las propiedades de ortogonalidad de los sen y cos (ver puntos 1 a 3 abajo).

Tenemos:

$$A_n = 2 D_n \quad y \quad B_n = -2 E_n$$

Eso significa que una función f real y periódica de periodo T puede descomponerse en una base de funciones ortogonales (sin y cos) y normalizadas de coordenadas A_n y B_n , es decir como una suma infinita de senos y cosenos.

Como las funciones cos y sin son ortogonales, verifican las propiedades (con $T_1 = 2\pi$):

$$\begin{aligned} \int_{T_1} \cos(m\omega_1 t) \sin(n\omega_1 t) dt &= 0 \quad \forall m, n \\ \int_{T_1} \cos(m\omega_1 t) \cos(n\omega_1 t) dt &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T_1/2 & m = n \end{cases} \\ \int_{T_1} \sin(m\omega_1 t) \sin(n\omega_1 t) dt &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T_1/2 & m = n \end{cases} \end{aligned}$$

T es un periodo, T_1 es el periodo fundamental, $1/T$ es una frecuencia, $1/T_1$ es la frecuencia fundamental, $2\pi/T$ es una frecuencia angular, n/T_1 ($n \in \mathbb{Z}$) son las frecuencias armónicas (múltiplos de la frecuencia fundamental), n define el grado de los armónicos ($n \in \mathbb{Z}$). El armónico número 1 corresponde a $n = 1$ y vale $\nu_1 = 1/T_1$, se le llama el armónico fundamental. El armónico número n es $\nu_n = n\nu_1 = n/T_1$.

Ojo:

- Entonces, una señal real y periódica se puede representar con suma de *sin* y *cos* o, equivalentemente, solamente con *sin* pero con además la posibilidad de hacer desfase de estos *sin*. Se puede hacer igualmente con *cos*.
- F_0 representa una constante, es decir una señal de frecuencia nula. Si añadimos una constante a toda la señal (por ejemplo F_0), o si se cambia este valor F_0 , no se va a cambiar la forma de $f(t)$, se hace simplemente un traslado de la función paralelamente al eje horizontal (hacia arriba o abajo). Es por eso que hay el factor F_0 en esta descomposición en serie de Fourier. Una interpretación física de F_0 es justamente el promedio de la función sobre un periodo: F_0 permite hacer una corrección de un 'offset', o sea de una constante para tener una señal que oscile alrededor de 0. Detallaremos más eso en el problema de una descomposición en una serie de tiempo de un sismograma más adelante.

- Si una función no es periódica pero si es finita, la podemos artificialmente transformar en otra función periódica de periodo la duración total de la función inicial. Así tendríamos una función periódica y se podrá descomponer en serie de Fourier. Por ejemplo, la función $f(x) = x$ no es periódica. Si queremos aproximar esta curva en serie de Fourier, lo que podemos hacer es seleccionar solamente una parte de esta función, y de fabricar otra función que sea periódica donde en cada periodo vamos a tener la porción de la curva $f(x) = x$. Eso permite así de descomponer una enorme cantidad de funciones que no son periódicas, solamente en una parte de esta función. Ver los ejercicios donde se propone de descomponer una parte de algunas curvas no periódicas en serie de Fourier. Otro ejemplo. Si tenemos un sismograma, generalmente no es periódico. ¿Como hacer para descomponer este sismograma en serie de Fourier?. Podemos construir una señal periódica de periodo la señal sísmica, y descomponer eso en serie de Fourier. Si tomamos después solamente un periodo, vamos a encontrar el sismograma.

Vamos a dar ejemplos de sumatorias de funciones trigonométricas para simular una función periódica (será periódica por construcción, porque una serie de Fourier es siempre periódica).

$$\text{Ejemplo: } \sum_n \frac{1}{n} \sin(n \omega t):$$

Sumando, vemos que aparecen altas frecuencias parásitas. Es el fenómeno de Gibbs que vamos a ver más tarde en el curso. Es relacionado al hecho que la ventana inicial que sumamos (un seno) está cortado brutalmente porque trabajamos sobre una ventana finita y así el seno está cortado brutalmente. Veremos como reducir este efecto, hasta que es imposible eliminarlo completamente además sin 'dañar' o 'cambiar' lo que realmente queremos hacer. Es parte de los numerosos problemas que vamos a encontrar al pasar a una señal muestreada, numérica, finita ... en fin, lo que siempre vamos a encontrar en tratamiento de señales numéricas. C'est la vie...

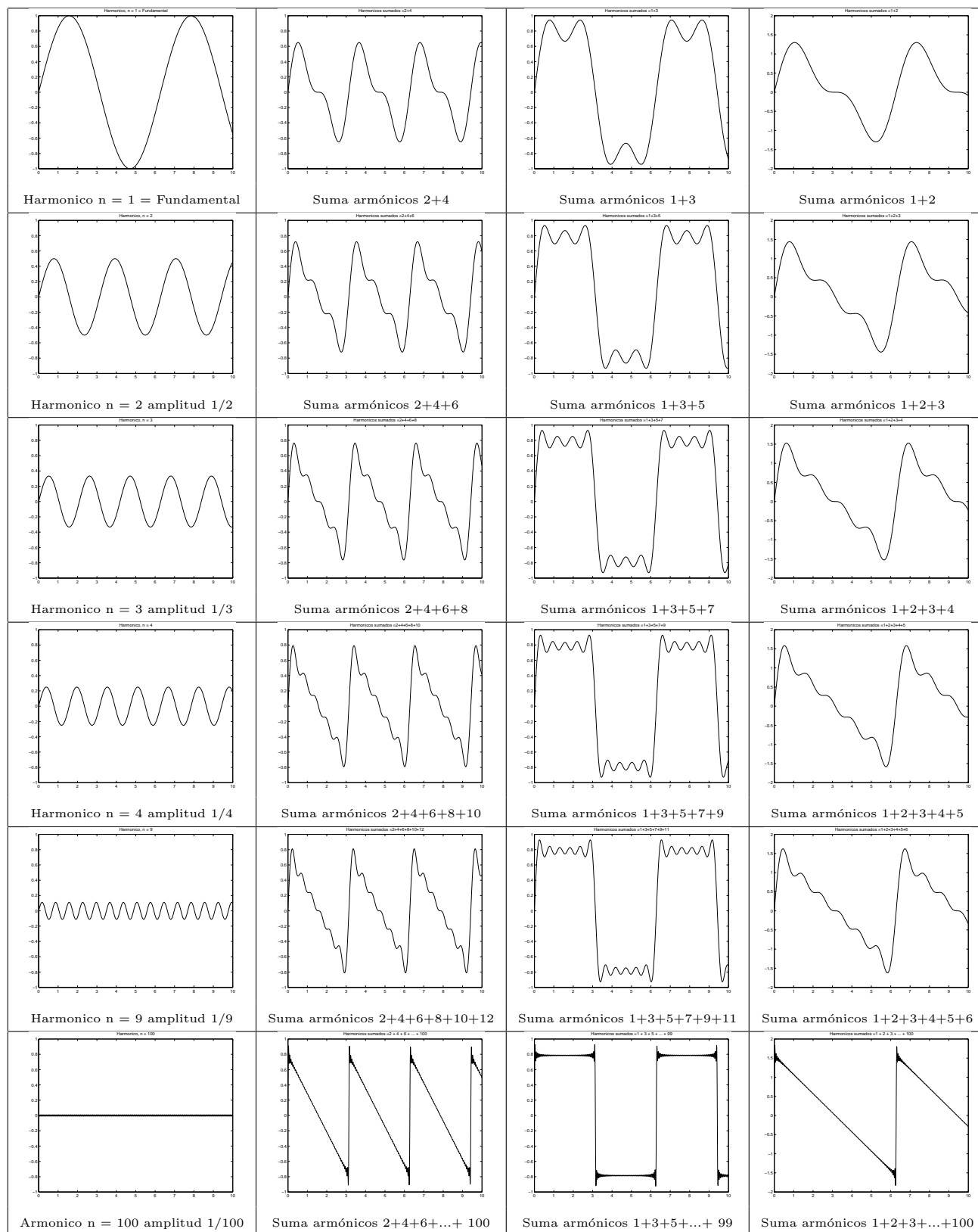


Figura 2.2: Series de Fourier. Armónicos y suma de los armónicos pares, impares y todos

2.3. Series de Fourier para representar una función real continua y aperiódica sobre un intervalo fijo: series de Fourier en senos y cosenos

Vimos que el resultado una serie de Fourier es una función periódica. La pregunta es: ¿que hacer cuando queremos aproximar una función que no es periódica? Lo que vamos a hacer, es definir esa función solamente en un intervalo, y aproximar esa función con series de Fourier en seno o coseno sobre este intervalo. Claro, haciendo después una serie de Fourier, vamos a tener una función periódica, lo que no corresponde a la función original entre $-\infty$ and ∞ , pero por lo menos vamos a tener una aproximación de la función sobre este intervalo. Por ejemplo, la función $f(t) = t$ no es periódica. Entonces, vamos a encontrar una aproximación de $f(t) = t$ sobre un intervalo (por ejemplo $[-\pi \pi]$), y el resultado de la serie de Fourier así calculada sera una función periódica, entonces será la función $f(t)$ que queríamos, pero solamente sobre el intervalo $[0 \pi]$ (la mitad del inicial como vamos a ver).

Recordemos la definición de una serie de Fourier:

$$g(t) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \left(\frac{2\pi n t}{T_1} \right) + B_n \sin \left(\frac{2\pi n t}{T_1} \right) \right]$$

Vemos que la serie de Fourier se reduce solamente a una serie de senos cuando $A_n = 0$. Eso significa que al final vamos a tener una aproximación de la función inicial porque solamente vamos a tomar los terminos en senos. Por eso vamos a introducir el simbolo de aproximación \approx para una serie de Fourier en seno. Si miramos este valor (formula 2.7 xx):

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} g(t) \cos \left(\frac{2\pi n t}{T_1} \right) dt$$

vemos que se cancela en un caso particular, cuando la función $g(t)$ que será desarrollada es impar en el intervalo T_1 con la condición que T_1 esté centrado en 0, lo que vamos a hacer, es llamar $T_1 = 2c$. Vamos a tomar:

$$A_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} g(t) \cos \left(\frac{2\pi n t}{T_1} \right) dt$$

Por lo tanto, para obtener una serie de Fourier en senos de una función $f(t)$, introducimos una nueva función $g(t)$, impar en el intervalo T_1 de la manera siguiente:

$$g(t) = \begin{cases} -f(-t) & -c \leq t < 0 \\ f(t) & 0 \leq t < c \end{cases}$$

es decir que $g(t)$ vale $f(t)$ en $[0, c]$ y se llama la extensión impar de f en $[-c, 0]$.

De esta manera, $g(t)$ es efectivamente impar en el intervalo $[-c, c]$. Usando la formula xxx, como $g(t)$ es impar, tenemos:

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} g(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{c}\right) dt = 0 \\ B_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} g(t) \sin\left(\frac{\pi n t}{c}\right) dt = \frac{2}{c} \int_0^{+c} f(t) \sin\left(\frac{\pi n t}{c}\right) dt \end{cases} \quad \forall n$$

porque g es impar. La serie $g(t)$ que resulta representa a $f(t)$ en el intervalo $[0, c]$ porque $g(t)$ y $f(t)$ son idénticas en esa parte. Es por eso que en la primera parte de B_n tenemos una integral de $-c$ a $+c$: $\int_{-c}^{+c} g(t) dt$ y que en la segunda parte tenemos una integral de 0 a $+c$: $\int_0^{+c} f(t) dt$.

Entonces:

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi n t}{c}\right) \text{ en el intervalo } [0, c]$$

con:

$$B_n = \frac{2}{c} \int_0^c f(t) \sin\left(\frac{\pi n t}{c}\right) dt$$

Se llama serie de Fourier en senos para $f(t)$ en el intervalo $[0, c]$.

El recurso de introducir la función $g(t)$ fue una herramienta para llegar a las dos formulas precedentes, no es necesario de repetir todo eso en problemas específicos, se puede usar directamente el resultado.

Se puede hacer algo similar para serie en cosenos, incluyendo una parte constante, para una función definida en el intervalo $[0, c]$. Por eso introducimos la función auxiliar $h(t)$ como herramienta de trabajo:

$$h(t) = \begin{cases} f(-t) & -c \leq t < 0 \\ f(t) & 0 \leq t < c \end{cases}$$

2.3 Series de Fourier para representar una función real continua y aperiódica sobre un intervalo fijo: series de Fourier en senos y cosenos

Esa función es par y vale $f(t)$ en $[0, c]$ y es la extensión par de f en $[-c, 0]$.

Como $h(t)$ es par, su desarrollo de Fourier usual en el intervalo $[-c, c]$ nos da:

$$B_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} h(t) \sin\left(\frac{\pi n t}{c}\right) dt = 0$$

porque h es par y \sin es impar, entonces $h \cdot \sin$ es impar.

Tenemos también:

$$A_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} h(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{c}\right) dt = \frac{2}{c} \int_0^{+c} f(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{c}\right) dt$$

Como $h(t)$ y $f(t)$ son idénticas en el intervalo $[0, c]$, podemos escribir la serie de Fourier en cosenos :

$$f(t) \approx F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n t}{c}\right) \text{ en el intervalo } [0, c]$$

con:

$$A_n = \frac{2}{c} \int_0^{+c} f(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{c}\right) dt$$

Resumen:

1. La **serie de Fourier en senos** de la función f **en el intervalo** $[0, c]$ es:

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left(\frac{\pi n t}{c} \right)$$

con:

$$B_n = \frac{2}{c} \int_0^{+c} f(t) \sin \left(\frac{\pi n t}{c} \right) dt$$

La serie de Fourier será periódica, de intervalo $2c$
(por ejemplo entre $[-c, +c]$), pero será igual a $f(t)$ solamente en $[0, c]$.

2. La **serie de Fourier en cosenos** de la función f **en el intervalo** $[0, c]$ es:

$$f(t) \approx F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(\frac{\pi n t}{c} \right)$$

con:

$$F_0 = \frac{1}{c} \int_0^{+c} f(t) dt$$

y

$$A_n = \frac{2}{c} \int_0^{+c} f(t) \cos \left(\frac{\pi n t}{c} \right) dt$$

La serie de Fourier será periódica, de intervalo $2c$
(por ejemplo entre $[-c, +c]$), pero será igual a $f(t)$ solamente en $[0, c]$.

2.3 Series de Fourier para representar una función real continua y aperiódica sobre un intervalo fijo: series de Fourier en senos y cosenos 21

Ejemplo 1: Encontrar la serie de Fourier en **coseno** de $f(t) = t$ en $[0, \pi]$:

Tenemos:

$$F_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} t \, dt = \frac{\pi}{2}$$

y

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} t \cos(nt) \, dt = \frac{2}{\pi n^2} [\cos(n\pi) - 1] = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1]$$

Entonces:

$$f(t) = t \approx \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos(t) + \frac{1}{3^2} \cos(3t) + \frac{1}{5^2} \cos(5t) + \dots \right]$$

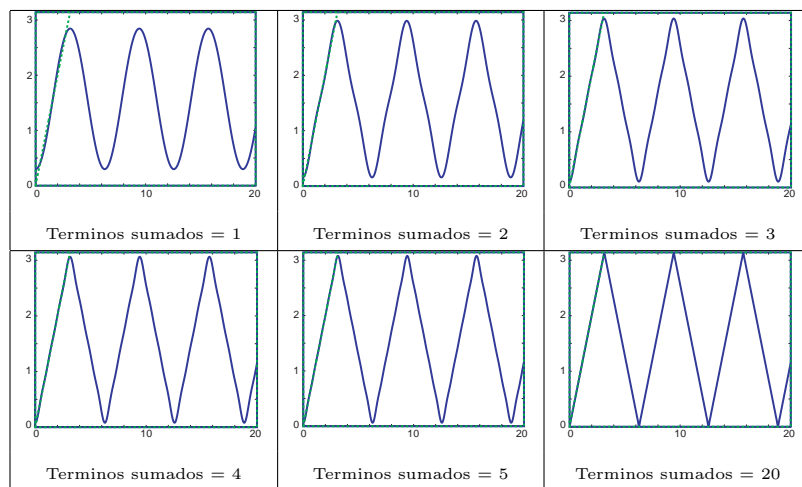


Figura 2.3: Series de Fourier en **coseno** de $f(t) = t$ en $[0, \pi]$
 $f(t) = t$ no está modelado sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ sino solamente en el intervalo $[0, \pi]$.
 La serie de Fourier es periódica, de periodo 2π .

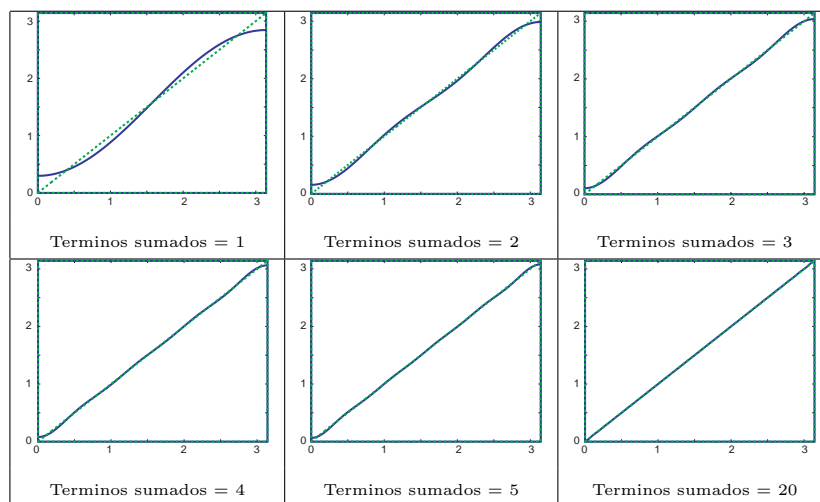


Figura 2.4: Zoom de la figura 2.3 sobre el intervalo $[0, \pi]$. La serie de Fourier (línea azul) se aproxima poco a poco a la función $f(t) = t$ (línea verde discontinua)

Ejemplo 2: Encontrar la serie de Fourier en **seno** de $f(t) = t$ en $[0, \pi]$:

Tenemos:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} t \sin(nt) dt = \frac{-2}{n} (-1)^n$$

Entonces:

$$f(t) = t \approx \left[\sin(t) - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) - \dots \right]$$

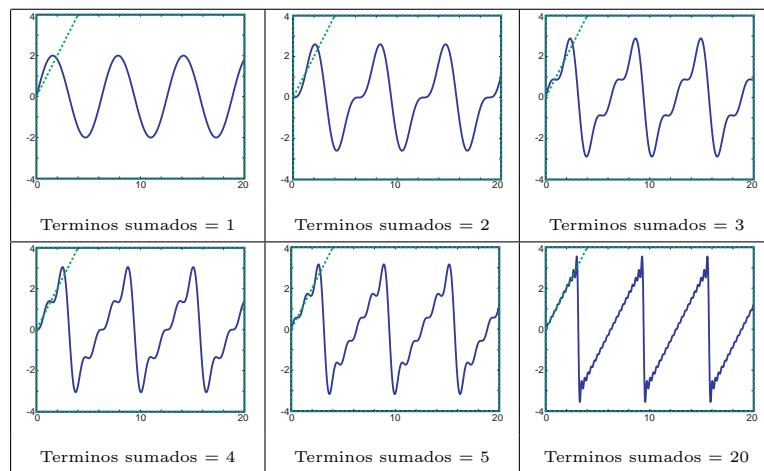


Figura 2.5: Series de Fourier en **seno** de $f(t) = t$ en $[0, \pi]$

$f(t) = t$ no está modelado sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ sino solamente en el intervalo $[0, \pi]$.

La serie de Fourier es periódica, de periodo 2π . La serie de Fourier en seno converge muchos más lento que una serie de Fourier en coseno.

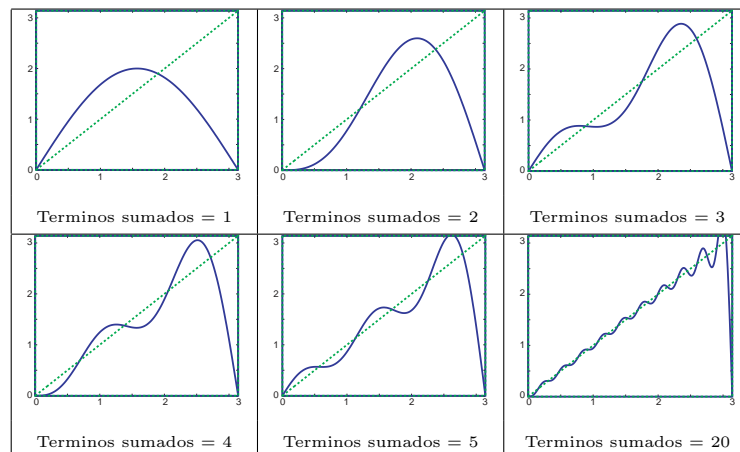


Figura 2.6: Zoom de la figura 2.5 sobre el intervalo $[0, \pi]$. La serie de Fourier en seno (línea azul línea continua) se aproxima más lentamente a la función $f(t) = t$ (línea verde discontinua) que para una serie de Fourier en coseno.

2.3 Series de Fourier para representar una función real continua y aperiódica sobre un intervalo fijo: series de Fourier en senos y cosenos 23

Ejemplo 3: Encontrar la serie de Fourier en **coseno** de $f(t) = 1$ en $[0, \pi]$:

Tenemos: $F_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} 1 dt = 1$ y $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} 1 \cos(nt) dt = 0$. Es un caso trivial. Sumando solamente cosenos (sin desfase), no se puede encontrar una función constante. Pero sumando solamente senos (sin desfase) se puede encontrar la función 1 en un intervalo $[0, c]$ (por ejemplo con $c = \pi$). Es el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4: Encontrar la serie de Fourier en **seno** de $f(t) = 1$ en $[0, \pi]$:

Tenemos:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n]$$

Entonces:

$$f(t) = 1 \approx \frac{4}{\pi} \left[\sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \sin(5t) + \dots \right]$$

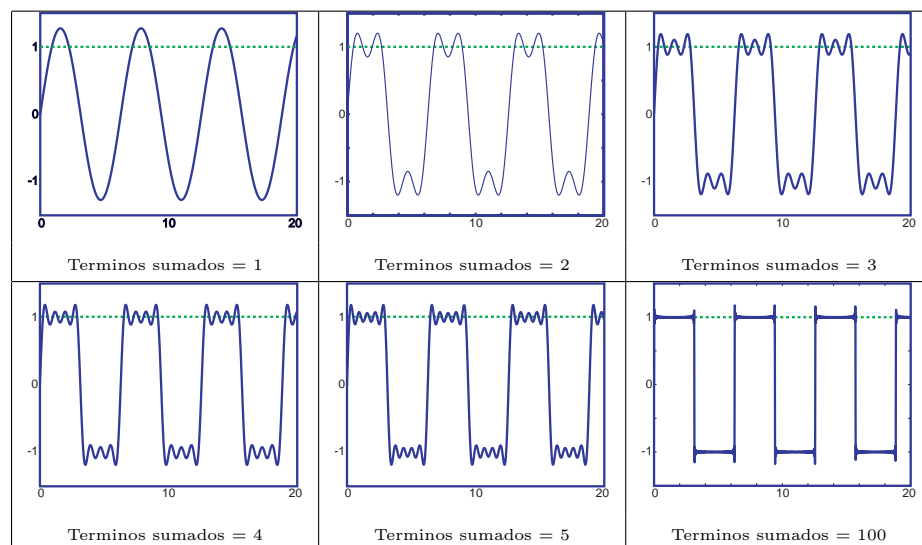


Figura 2.7: Series de Fourier en **seno** de $f(t) = 1$ en $[0, \pi]$

Vemos muy bien que no hemos modelado $f(t) = 1$ sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ sino solamente en el intervalo $[0, \pi]$. La serie de Fourier es periódica, de periodo 2π , por ejemplo en $[-\pi, \pi]$.

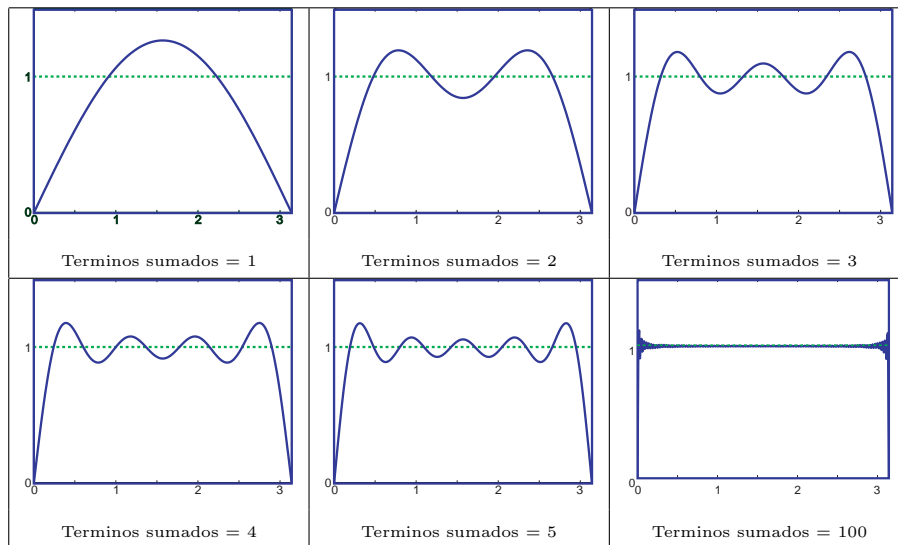


Figura 2.8: Zoom de la figura 2.7 sobre el intervalo $[0, \pi]$. La serie de Fourier (línea azul continua) se aproxima poco a poco a la función $f(t) = 1$ (línea verde discontinua).

2.3 Series de Fourier para representar una función real continua y aperiódica sobre un intervalo fijo: series de Fourier en senos y cosenos 25

Ejemplo 5: Encontrar la serie de Fourier en **coseno** de $f(t) = \cos(t)$ en $[0, \pi]$:

Tenemos: $F_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} \cos(t) dt = 0$ y $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} \cos(t) \cos(nt) dt$.

$A_n = 0$ para $n > 1$ y $A_n = 1$ para $n = 1$. Es un caso trivial también.

Ejemplo 6: Encontrar la serie de Fourier en **seno** de $f(t) = \cos(t)$ en $[0, \pi]$:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} \cos(t) \sin(nt) dt = \frac{2n}{\pi} \left[\frac{(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1} \right] \forall n > 1$$

and $B_0 = 0$, $B_1 = 0$ and $B_{2n+1} = 0$

Entonces:

$$\cos(t) \approx \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} \cos(t) \sin(nt) dt = \frac{2n}{\pi} \left[\frac{(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1} \right] \sin(nt)$$

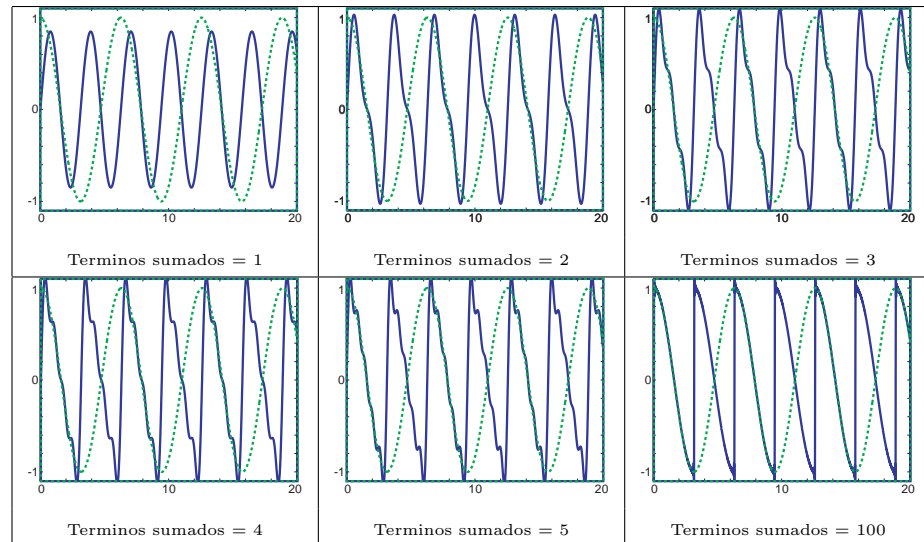


Figura 2.9: Series de Fourier en **seno** de $f(t) = \cos(t)$ en $[0, \pi]$

Vemos muy bien que no hemos modelado $f(t) = \cos(t)$ sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ sino solamente en el intervalo $[0, \pi]$. La serie de Fourier es periodica, de periodo 2π , por ejemplo en $[-\pi, \pi]$.

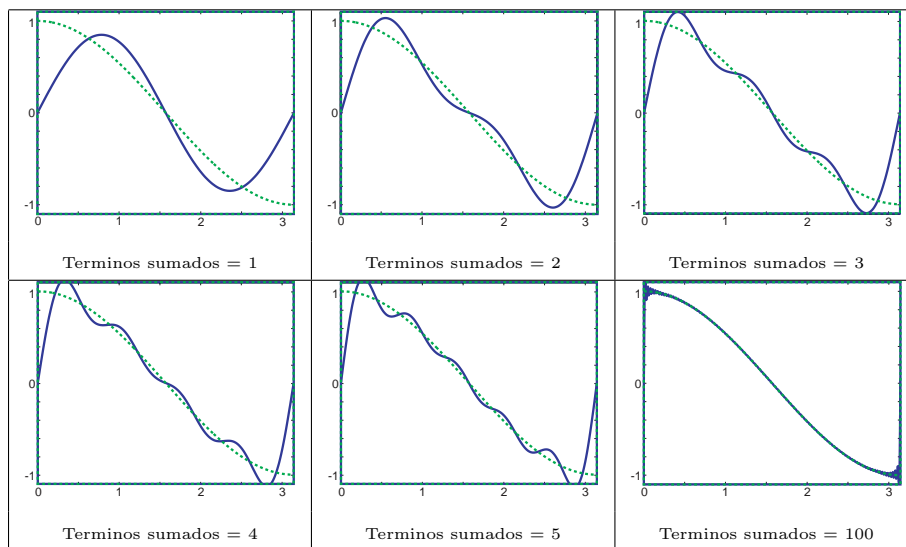


Figura 2.10: Zoom de la figura 2.9 sobre el intervalo $[0, \pi]$. La serie de Fourier (línea azul continua) se aproxima poco a poco a la función $f(t) = \cos(t)$ (línea verde discontinua).

Capítulo 3

Transformadas de Fourier de señales continuas aperiódicas:

3.1. Transformada de Fourier continua directa TF de una señal aperiódica

Vimos que una señal periódica se podía escribir como la suma de varias exponenciales complejas relacionadas armónicamente, como una combinación $n \nu_1$ de números enteros n de la frecuencia fundamental: ν_1 . Ahora veremos que se puede generalizar este resultado para funciones que no son específicamente periódicas. En este caso hablamos de una función **aperiódica**, y vamos a ver que tal función se puede escribir como la suma de un **número continuo de la frecuencia** armónica (no solamente se suman números enteros de la frecuencia armónica, sino números reales por la frecuencia armónica). Eso se conoce como la transformada de Fourier continua. Podemos ver una función aperiódica de energía finita como la sumatoria de señales sinusoidales periódicas en lo cuales el periodo puede crecer sin limite. Podemos deducir que la diferencia entre componentes sucesivos disminuye cuando el periodo crece. Como limite, la diferencia entre componentes sucesivos se acerca a cero, y las curvas se transforman en una función continua de la frecuencia.

Es por eso que pasamos de una descripción finita (**Serie de Fourier** = $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{i(n\nu)t/(2\pi)}$ **sumatoria discreta $n.\nu$ de frecuencias**) para una señal periódica a una descripción continua (**Transformada de Fourier** = $\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu$ **sumatoria continua de frecuencias**) para una señal aperiódica. O sea, la noción de transformada de Fourier (en realidad inversa) es la generalización de la noción de series de Fourier para aproximar una función aperiódica. Es por eso que Fourier tuvo que usar el simbolo $\int_{-\infty}^{+\infty}$ (introducido por Leibniz) para describir una sumatoria **continua** (de frecuencias) y no confundirlo con el simbolo

de una sumatoria **discreta** : $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}$

3.1.1. Definición

Si $f(t)$ es una función del tiempo t de \mathbb{R} en \mathbb{C} , notamos $F(\nu)$ la transformada (directa) de Fourier de $f(t)$ y su definición es:

$$F(\nu) = \text{TF} [f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \quad (3.1)$$

ν se llama la frecuencia: $\nu = 1/t$.

Cuidado que hay diferentes definiciones de transformadas de Fourier, así cuando se habla de una TF es importante dar su definición, así como la de su transformada inversa. Por ejemplo, a veces los signos en la exponencial están invertidos, o la condición de normalización puede ser diferente (es decir que a veces, la TF^{-1} de la TF de una función $f(t)$ no da la misma amplitud que la función $f(t)$ inicial).

Una función $f(t)$ tiene una transformada de Fourier si verifica las 3 condiciones siguientes (conocidas como condiciones de Dirichlet):

- la función $f(t)$ debe ser acotada
- la integral de $|f(t)|$ entre $-\infty$ y $+\infty$ debe ser finita: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$
- las discontinuidades de $f(t)$, sus máxima y mínima deben ser en número finito, y cada una de estas discontinuidades debe ser finita

3.1.2. Espectros de amplitud, de fase y de energía. Formula de Parseval

Una transformada de Fourier $F(\nu)$ es compleja, con una parte real $\text{Re} [F(\nu)]$ y una parte imaginaria $\text{Im} [F(\nu)]$, o sea tiene una amplitud y una fase. Gráficos que representan

la amplitud y la fase respecto a las frecuencias se llama un espectro (de Fourier) de amplitud y fase respectivamente.

$$F(\nu) = Re[F(\nu)] + i Im[F(\nu)]$$

y como por definición tenemos:

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [\cos(2\pi\nu t) - i \sin(2\pi\nu t)] dt$$

entonces tenemos:

$$\begin{aligned} Re[F(\nu)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi\nu t) dt \\ Im[F(\nu)] &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\nu t) dt \end{aligned}$$

- La **amplitud** de $F(\nu)$ es:

$$|F(\nu)| = \sqrt{Re[F(\nu)]^2 + Im[F(\nu)]^2} \quad (3.2)$$

El espectro de amplitud da la amplitud $|F(\nu)|$ de cada frecuencia ν que contiene globalmente toda la señal $f(t)$. Es decir es una información global: no dice donde están las bajas y altas frecuencias en la señal. Dice solamente si la señal tiene o no tiene bajas y altas frecuencias.

- La **fase** de $F(\nu)$ es:

$$\varphi(\nu) = \tan^{-1} \left(\frac{Im[F(\nu)]}{Re[F(\nu)]} \right) \quad (3.3)$$

El espectro de fase da la fase $\varphi(\nu)$ de cada frecuencia ν que contiene globalmente toda la señal $f(t)$.

- La **energía** de $F(\nu)$ es:

$$|F(\nu)|^2 = Re[F(\nu)]^2 + Im[F(\nu)]^2 \quad (3.4)$$

El espectro de energía da la energía $|F(\nu)|^2$ de cada frecuencia ν que contiene globalmente toda la señal $f(t)$.

■ Formula de Parseval:

La energía total de una función real $f(t)$ se puede calcular de dos maneras diferentes. Una integrando la función en el dominio del tiempo, $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$, la otra integrando la función en el dominio de las frecuencias: $\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\nu) d\nu$.

La formula de Parseval dice que los dos estan iguales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu \quad (3.5)$$

Este teorema es una ilustración de que una señal no tiene más información (y en particular más energía) en un dominio u otro (dominio del tiempo y de las frecuencias). Eso significa que la energía de una señal es una constante (independiente de que la señal sea expresada en el dominio temporal o en el dominio de las frecuencias). Mirar una señal en el dominio del tiempo o de las frecuencias da fundamentalmente la misma información. Son solamente dos maneras diferentes de mirar al mismo objeto.

A veces hay un factor 2π que interviene, que depende de la formula de la TF que se ha usado.

Esa formula se demostrara más adelante, usando simplemente la propiedad de la TF de un producto de convolución (capitulo xxx) con: $g(t) = f^*(t)$.

3.1.3. ¿Significado de una TF ?

En la definición de una transformada de Fourier, hemos descompuesto una función f en una base de funciones trigonométricas. La TF consiste a comparar una función $f(t)$ con las funciones $\cos(2\pi\nu t)$ y $i \sin(2\pi\nu t)$ ya que $e^{2i\pi\nu t} = \cos(2\pi\nu t) + i \sin(2\pi\nu t)$. Esta comparación se hace efectuando el producto de estas funciones trigonométricas con $f(t)$. Cuando, para una frecuencia dada, la función $f(t)$ se parece a un cos o a un sin, el producto de $f(t)$ con estas funciones trigonométricas tienen una amplitud grande. El producto puede ser visto como el coseno de un ángulo entre los vectores de coordenadas los valores de $f(t)$ y de $\cos(2\pi\nu t)$ (una coordenada para cada t). Este efecto esta integrado (sumado) en el tiempo con el signo integral. Se hace así la suma en toda la señal $f(t)$ de lo que se parece a los sin y cos. Entonces tenemos una información global de la amplitud que contiene la señal $f(t)$ entera para cada frecuencia. Una TF no dice donde estas frecuencias están distribuidas en la señal porque el soporte de la función \sin (y \cos) es infinito (no sera el caso de wavelets). Por ejemplo si tenemos una señal compuesta de la suma de 2 frecuencias con un desfase nulo y otra señal con las mismas frecuencias pero con un

desfase diferente de cero, vamos a tener el mismo espectro, solamente va a cambiar la fase del espectro (figura 3.1).

Ilustración: Tomamos 2 funciones (1 y 2) con 2 frecuencias diferentes. La dibujamos con sus espectros respectivos. Después adelantamos la segunda función (3). La dibujamos con su espectro. La TF tiene la misma forma que la señal 2 pero su fase es diferente. Después sumamos $(1 + 2)$ y $(1 + 3)$. Las dibujamos con sus espectros respectivos. Tienen la misma amplitud pero sus fases son diferentes.

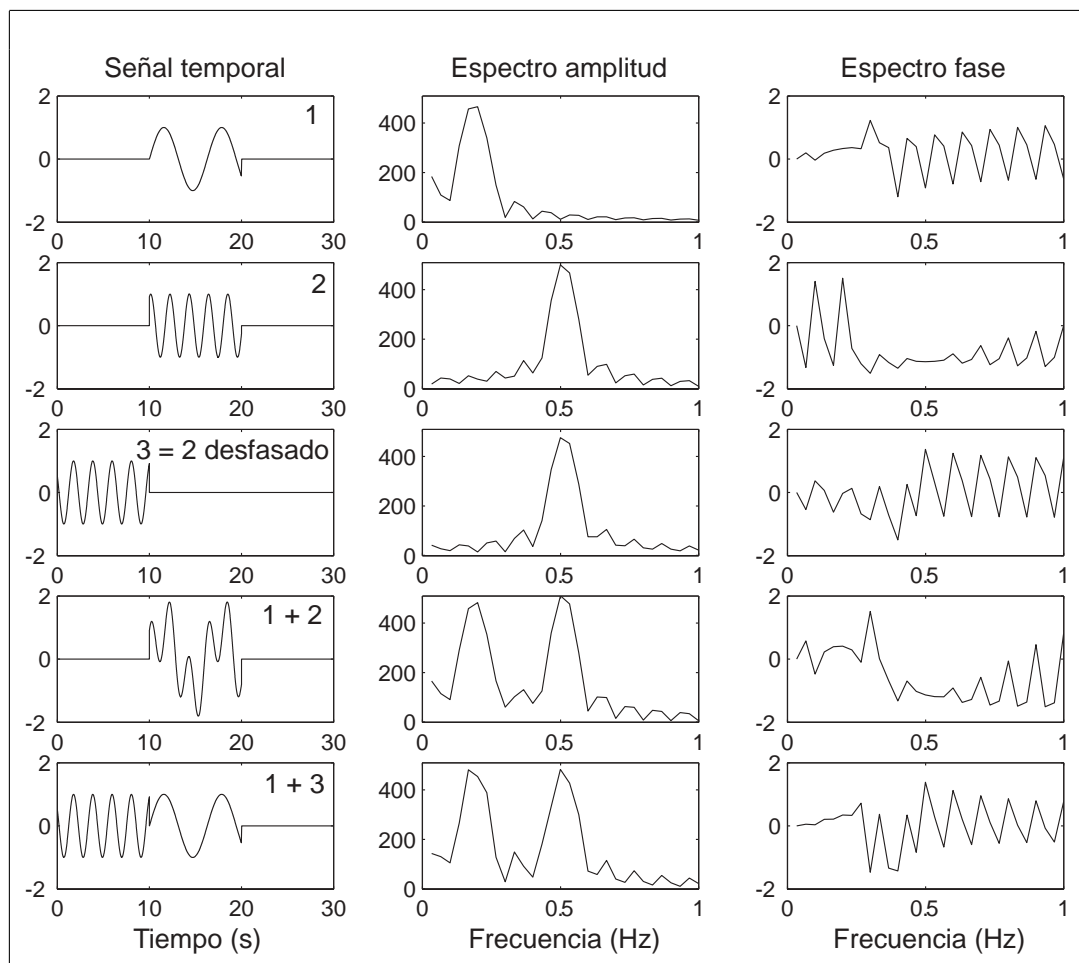


Figura 3.1: Señal 1 de periodo propio 2π , señal 2 de periodo propio $2\pi/3$. La señal 3 es la suma de las señales 1 y 2. Se dibujan los espectros correspondientes. CUIDADO podemos tener 2 señales completamente diferentes que tienen espectros de amplitud iguales. La diferencia será en la fase. No basta mirar solamente la amplitud, hay que mirar también la fase para tener una información completa de una señal.

La transformada de Fourier a la frecuencia nula es simplemente el valor promedio de la función sobre todo el intervalo:

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

3.2. Transformación de Fourier continua inversa TF^{-1}

Cuando se da la definición de la transformada de Fourier directa, hay que definir al mismo tiempo su transformada de Fourier inversa. La vamos a notar TF^{-1} y la vamos a definir de tal manera que, tomando la transformada inversa de la transformada directa, regresamos a la función original con la misma amplitud, o sea vamos a definir TF^{-1} de tal manera que tenemos:

$$TF^{-1}[F(\nu)] = TF^{-1}[TF[f(t)]] = f(t) \quad (3.6)$$

Así tenemos:

$$TF^{-1}[F(\nu)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu = f(t) \quad (3.7)$$

Ojo:

- Notar que la frecuencia ν puede tomar valores negativos
- A veces, se usa la frecuencia angular $\omega = 2\pi\nu$. En este caso, las definiciones de la TF de la función $f(t)$ y de la TF^{-1} son:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= TF[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \\ TF^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t). \end{aligned}$$

- Estas definiciones (de la TF y TF^{-1}) son validas también para funciones $f(t)$ complejas.

- Estas definiciones están dadas aquí para señales continuas (analógicas). Pero cuando pasamos a simulaciones en computadoras, tendremos que pasar de una formulación continua a una formulación muestreada. Para hacer eso, hay que respetar algunas reglas que veremos en este curso.

Ejemplo: *¿Cuál es el espectro de la función a-periodica puerta?*

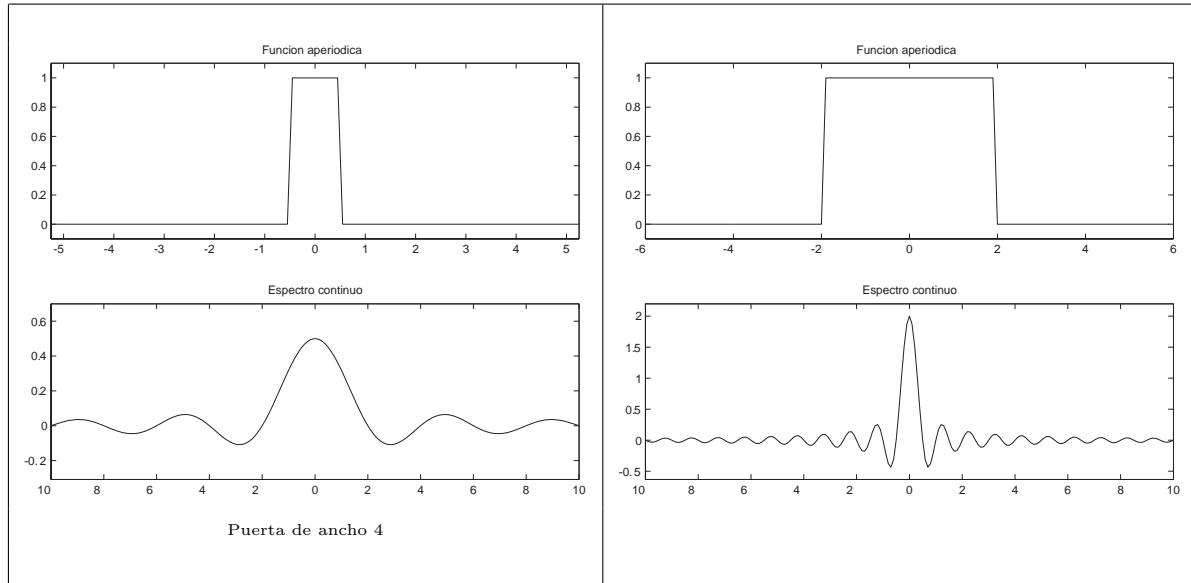


Figura 3.2: Espectros de 2 funciones puerta de ancho 1 y 4. Más ancha la función tiempo, más angosto el espectro frecuencial. Ilustración del principio de incertidumbre de Heisenberg. Comparar con la figura (??) del espectro discreto de las funciones puertas

Una serie de Fourier se puede ver como una transformada inversa de Fourier en el caso discreto. Una transformada inversa de Fourier se puede ver como la generalización de una serie de Fourier en el caso continuo (sumatoria continua de frecuencias). Eso fue uno de los gran aporte de Fourier en el problema de la propagación del calor: pasar al limite al continuo. Haciendo una sumatoria discreta de frecuencias, se periódiza la función resultante. Estas definiciones ilustran el problema de muestreo que veremos más adelante, pero todo el problema esta ya ilustrado aquí. Como pasar de una descripción continua a una descripción muestreada (sumatoria discreta) y el problema de periodización cuando muestreamos.

3.3. Resumen ☺

Serie de Fourier	Transformada (inversa) de Fourier
$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F_n e^{2i\pi(n\nu)t}$	$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2i\pi(\nu)t} d\nu$
<p>$f(t)$ se escribe como una sumatoria discreta de un número infinito de frecuencias discretas ($n\nu$) con n entero:</p> $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F_n e^{(n\nu)\dots}$ <p>Solamente las frecuencias ($n\nu$) están permitidas.</p>	<p>$f(t)$ se escribe como una integral continua de un número infinito de frecuencias continuas (ν). Todas las frecuencias están permitidas. $f(t)$ no se escribe como una serie de Fourier con una sumatoria discreta de n frecuencias con n entero, sino como una integral continua en función de la frecuencia:</p> $\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu$
Así construida, $f(t)$ es periódica	Así construida, $f(t)$ no es periódica
Sumatoria discreta de frecuencias discretas ($n\nu$)	Sumatoria continua de frecuencias continuas ν
El espectro (de una serie de Fourier) de una señal periódica es discreto (definido solamente en las frecuencias ($n\nu$), con n entero).	El espectro (de una transformada de Fourier) de una señal aperiódica es continuo (definido para todas las frecuencias ν reales).
<p>Los coeficientes F_n de la serie de Fourier son comparables a la transformada de Fourier $F(\nu)$, es por eso que se usa generalmente letras mayúsculas F_n para los coeficientes de una serie de Fourier. Se usa generalmente también un índice n en los coeficientes F_n de una serie de Fourier, porque un 'n' en letra griega es un ν, que hace pensar en la frecuencia ν de la TF: $F(\nu)$.</p> <p>Notar que F_n son coeficientes discretos (eso significa que un espectro de una serie de Fourier -que es una función periódica- es discreto).</p> <p>Notar que $F(\nu)$ son coeficientes continuos (eso significa que un espectro de una función a-periódica es continuo).</p>	

3.4. Propiedades de la transformada de Fourier

Vamos a dar algunas de las numerosas propiedades de la TF.

3.4.1. Linealidad

Esta propiedad es una consecuencia de la linealidad de las integrales.

$$\text{TF} [a f(t) + b g(t)] = a \text{TF} [f(t)] + b \text{TF} [g(t)] \quad (3.8)$$

3.4.2. Simetría y paridad

Se dice que una función f_p es par si verifica:

$$f_p(t) = f_p(-t) \quad \forall t$$

Se dice que una función f_i es impar si verifica:

$$f_i = -f_i(-t) \quad \forall t$$

Cada función real $f(t)$ puede descomponer de manera única en una parte par f_p y una parte impar f_i porque:

$$f(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} + \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

entonces la parte par es:

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad (3.9)$$

y la parte impar es:

$$f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \quad (3.10)$$

Entonces tenemos:

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t) \quad (3.11)$$

En el dominio de frecuencia da: $F(\nu) = F_p(\nu) + F_i(\nu)$.

Si se considera el caso particular de una función $f(t)$ real, $F(\nu)$ es complejo y verifica:

$$F(-\nu) = F^*(\nu)$$

donde $*$ es el complejo conjugado.

Así el **espectro de amplitud** será una función **par** y la información que corresponde a las frecuencias negativas puede deducirse de la información de las frecuencias positivas, así que solamente se representa la parte positiva generalmente. El **espectro de fase** es una función **impar**.

Se puede mostrar que la TF de una función par es par y que la TF de una función impar es impar.

Aquí está un resumen de las principales propiedades de simetría y paridad:

$f(t)$ par y	$\begin{cases} \text{real} \\ \text{imaginaria} \\ \text{compleja} \end{cases}$	\xrightarrow{TF}	$F(\nu)$ par y	$\begin{cases} \text{real} \\ \text{imaginaria} \\ \text{compleja} \end{cases}$
$f(t)$ impar y	$\begin{cases} \text{real} \\ \text{imaginaria} \\ \text{compleja} \end{cases}$	\xrightarrow{TF}	$F(\nu)$ impar y	$\begin{cases} \text{imaginaria} \\ \text{real} \\ \text{compleja} \end{cases}$
$f(t)$ real	\xrightarrow{TF}	$F(\nu)$ verifica	$\begin{cases} \text{parte real es par} \\ \text{parte imaginaria es impar} \end{cases}$	
$f(t)$ imaginaria	\xrightarrow{TF}	$F(\nu)$ verifica	$\begin{cases} \text{parte real es impar} \\ \text{parte imaginaria es par} \end{cases}$	
$f(t)$ verifica	$\begin{cases} \text{parte real es par} \\ \text{parte imaginaria es impar} \end{cases}$	\xrightarrow{TF}	$F(\nu)$ es	real
$f(t)$ verifica	$\begin{cases} \text{parte real es impar} \\ \text{parte imaginaria es par} \end{cases}$	\xrightarrow{TF}	$F(\nu)$ es	imaginaria

3.4.3. Similitud u homotecia

$$\text{TF} [f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right) \quad (3.12)$$

Eso significa que hay una relación entre la forma de una función y de su espectro. Si una función es muy concentrada en el tiempo, va a estar muy esparcido en el dominio de las frecuencias y viceversa. Esa transformación se hace de tal manera que la superficie del espectro se conserva. Es una propiedad similar a la relación de incertidumbre de Heisenberg en mecánica cuántica.

3.4.4. Translación (retraso o adelanto)

$$\text{TF} [f(t - a)] = e^{-2i\pi\nu a} \text{TF} [f(t)] \quad (3.13)$$

$f(t - a)$ es la función f trasladada (retrasada) de un valor a . Así, la TF de una función trasladada en el tiempo tiene el mismo modulo (amplitud) que la TF de la función original, pero tiene una rotación de fase de $2\pi\nu a$ (un desfase). Así la fase da una información sobre un traslado de una función en el tiempo.

3.4.5. Derivación

$$\text{TF} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = (2i\pi\nu)^n \text{TF} [f(t)] \quad (3.14)$$

Derivar una función en el dominio del tiempo corresponde a multiplicar su espectro de $2i\pi\nu$. Eso significa que derivar va introducir altas frecuencias. La derivada de una función va a tener más altas frecuencia que la señal inicial. Si la frecuencia ν es grande, la amplitud será multiplicado por un factor proporcional a ν y así será grande, y si ν es pequeño, su amplitud será aun más pequeño.

3.4.6. TF de un producto simple y de un producto de convolución

(Ver la definición del producto de convolución en 2.9).

La transformada de Fourier de un producto simple (\cdot) de dos funciones es el producto de convolución $(*)$ de las transformadas de Fourier de las funciones.

$$\text{TF}[f(t) \cdot g(t)] = \text{TF}[f(t)] * \text{TF}[g(t)] \quad (3.15)$$

La transformada de Fourier de un producto de convolución $(*)$ de dos funciones es el producto simple (\cdot) de las transformadas de Fourier de las funciones.

$$\text{TF}[f(t) * g(t)] = \text{TF}[f(t)] \cdot \text{TF}[g(t)] \quad (3.16)$$

Estas propiedades son muy útiles porque numéricamente un producto de convolución toma mucho tiempo. Generalmente se pasa en el dominio de las frecuencias, se hace un producto simple y se regresa al dominio de tiempo (haciendo una TF inversa). En estas relaciones se ve muy bien la dualidad entre el dominio de tiempo y el dominio de frecuencias. Esta relación sirve también a demostrar el teorema de Parseval (ver el capítulo 2.4.2. Espectros de amplitud, de fase y de energía. Formula de Parseval)

3.5. Ejemplos de funciones o distribuciones con sus TF asociadas

Vamos a dar una serie de definiciones de funciones, usando la variable t , para simbolizar el tiempo, porque muchas veces vamos a tratar de señales temporales (series de tiempo). Pero estas definiciones son validas para otros tipos de variables, claro, y podremos usar de la misma manera el símbolo x en referencia a la variable distancia. Por ejemplo, cuando vamos a estudiar el tratamiento de imágenes, vamos muchas veces usar las variables espaciales.

3.5.1. Función step (escalera) o de Heaviside

La función de Heaviside, en la formulación continua, es definida por:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

En este caso, su Transformada de Fourier es:

$$TF[H(t)] = 1/(i\omega)$$

salvo en cero. Ver más abajo una formulación más correcta.

Hay otras definiciones como:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

En su **formulación muestreada**, la función de Heaviside es definida por:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0,5 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

El 0.5 es importante. Mirar la figura 3.3 para un $H(0) = 0,5$ y $H(0) = 1$, en particular la fase.

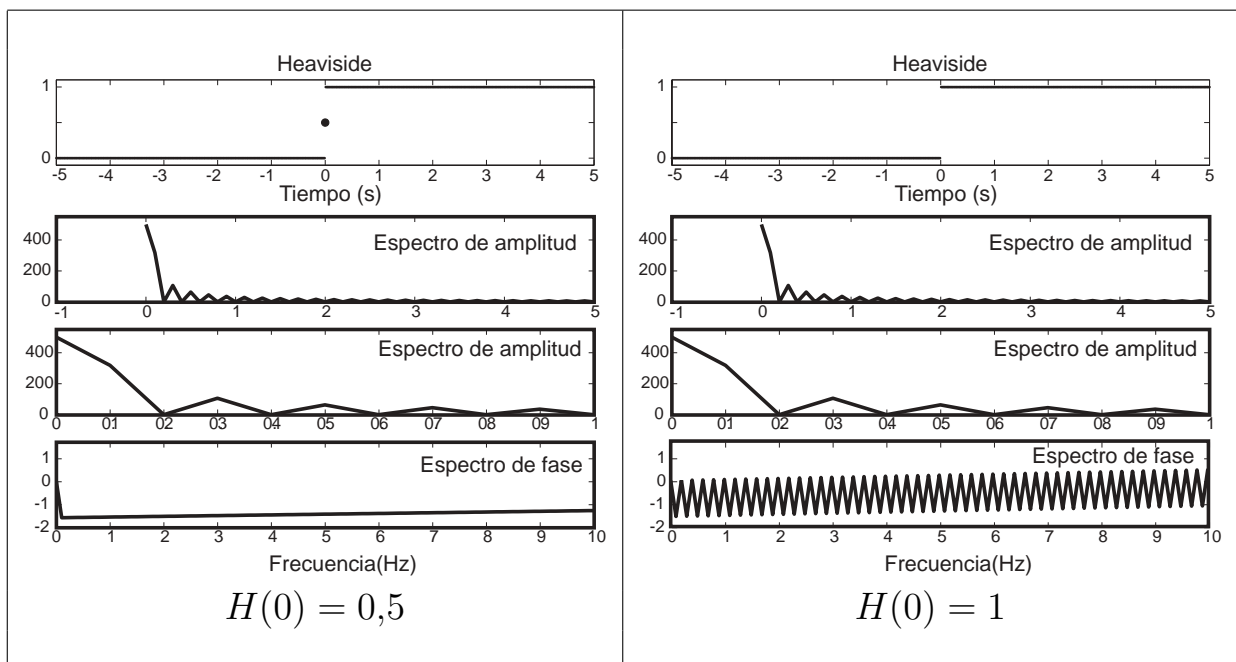


Figura 3.3: Función Heaviside y su espectro

Si se usa esta ultima definición, que es la más corecta para representar bién numericamente un escalon numérico, la TF de un Heaviside es un poco complicada. Hace aparecer un Dirac en 0, y otra función más complicada:

$$TF[H(t)] = \frac{1}{2} \delta(\nu) - i \, pp \left\{ \frac{1}{2\pi\nu} \right\} \quad (3.18)$$

con pp (parte principal) es una manera de calcular una integral como el límite de dos integrales (salvo en $t = 0$):

$$pp \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} f(t) dt + \int_{-\epsilon}^{+\infty} f(t) dt \right\} \quad (3.19)$$

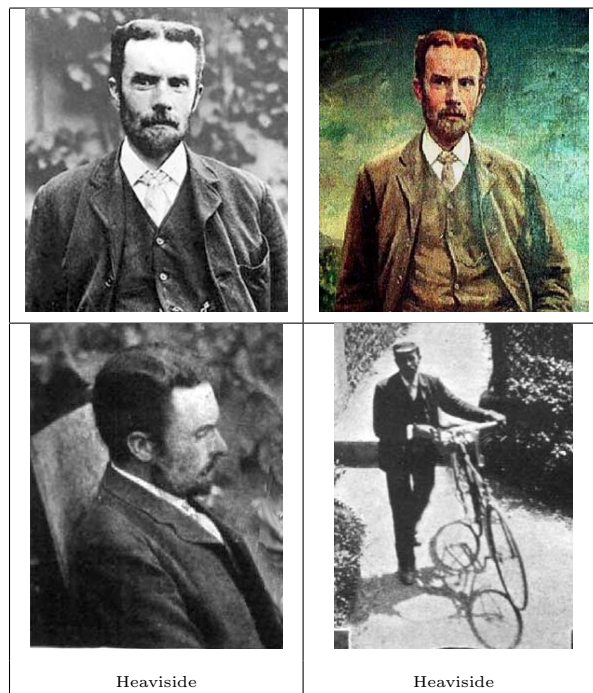


Figura 3.4: Heaviside (1850-1925).

Olivier Heaviside nació en Londres, Inglaterra el 18 de mayo de 1850 y murió en Devon, Inglaterra el 3 de febrero de 1925. Heaviside contribuyó al desarrollo de la electricidad. Simplificó las 20 ecuaciones con 20 incógnitas encontradas por Maxwell para describir el comportamiento de los campos eléctrico y magnético a 2 ecuaciones en 2 variables. Las "ecuaciones de Maxwell" son, en realidad, las ecuaciones de Heaviside. La función impulso era denotada por Heaviside como $p1$, significando la derivada de la función escalón (conocida como el escalón de Heaviside hoy). La función impulso $p1$ fue anotada δ por Dirac y lleva su nombre. Así es la historia a veces...

3.5.2. Función puerta

La función puerta, en la **formulación continua**, es definida por:

$$f(t) = \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

La TF de una función puerta tiene las propiedades:

- es un seno cardinal sin_c (ver la demostración en los problemas).

$$TF[\Pi_T(t)] = T \text{sin}_c(\pi \nu T)$$

- es real (porque hemos tomado una definición de una puerta de manera simétrica respecto a $t = 0$).
- los zeros de la TF de una función puerta son a las frecuencias n/T .
- es simétrica es decir:

$$TF[\Pi_T(t)] = T \text{sin}_c(\pi \nu T)$$

$$TF[\Pi_F(\nu)] = F \text{sin}_c(\pi t F)$$

Esta transformada de Fourier tiene muchas desventajas:

- 1: tiene un soporte infinito
- 2: tiene parte positivas y negativas
- 3: tiene muchos rebotes de amplitudes: El primero tiene una amplitud de 15 % respecto al valor origen 1. Así van aparecer muchas frecuencias 'parasitas'.

Por estas razones, la vamos a evitar cuando se pueda y que la función de Hanning fue desarrollada.

Ver en la figura 3.5 una ilustración de la condición de 'Heisenberg'. Notar que más grande la puerta, más chica la ventana en frecuencia. La amplitud aumenta de tal manera que la superficie se conserva. Vemos también que un Dirac se puede aproximar con una función puerta con T pequeño (en este caso su TF será una constante).

Esta función es super importante porque permite seleccionar una parte de una función (lo que hacemos casi siempre con una computadora porque trabajamos con un número finito de puntos). Si tenemos una función y que queremos seleccionar solamente una parte (de largo T) de esta función, multiplicamos simplemente la función con la función puerta. Pero haciendo eso, vamos a ver que va a generar problema serios (como el efecto de Gibbs). Veremos métodos par resolver parcialmente el problema. hay que ver tambien que

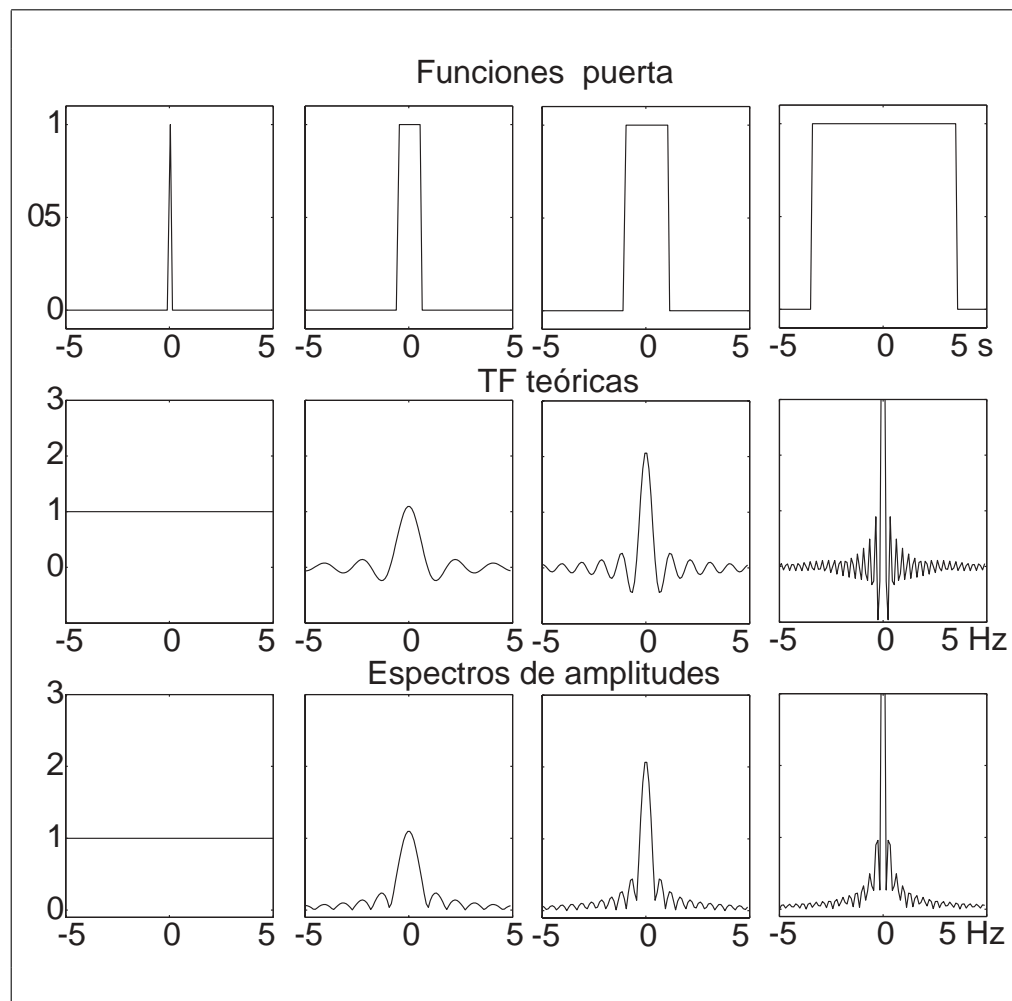


Figura 3.5: Función Puerta y su espectro. El $\Delta t = 0,01s$

cuando tomamos una función cualquiera y que tomamos solamente una parte (lo que hizimos hasta ahora), implícitamente es como si hubieramos multiplicado la función inicial con una función puerta. No lo decimos explícitamente pero de hecho es lo que hacemos. Por ejemplo hemos sumado sin o cos en el capítulo anterior. Como en las computadoras tenemos que trabajar con señales finitos, tomamos solamente una parte de la señal, y eso es equivalente a multiplicar un sinus de duración infinita con una función puerta. Como la TF de esta función puerta es un sinc, vamos a introducir un montón de frecuencias parásitas que son las funciones de los diferentes lobos del sinc. Veremos que hay otras maneras de hacer y cada vez que vamos a calcular TF, o derivadas on integrales, nos tocara hacer cuidado para suavisar la función antes de empezar a calcular TF , derivadas, integrales...

Si tenemos una función $f(t)$ y que queremos tomar una parte de esta función. Hacer eso, es multiplicar $f(t)$ por la función puerta, o sea tenemos $f(t) \cdot \Pi_T(t)$. Hacer eso no es sin consecuencias. Miramos que pasa en el dominio de las frecuencias.

$$TF[f(t) \cdot \Pi_T(t)] = TF[f(t)] * TF[\Pi_T(t)] = F(\nu) * T \operatorname{sinc}(\pi \nu T)$$

donde $*$ es un producto de convolución.

Entonces, no vamos a tener la TF de la función $f(t)$ como se podría imaginar, sino su TF convolucionada por un sinc . Siempre será el caso si tratamos con señales de duración finita (lo que será siempre el caso en computadoras). Por eso que hay que hacer mucho cuidado y no dejar una señal mal cortada.

N.B. A veces, en la práctica, la situación no es tan dramática. Por ejemplo, un sismograma a veces empieza cerca de 0 y termina cerca de 0. Pero no será el caso por ejemplo de un acelerograma integrado 2 veces para tener el desplazamiento, sobre todo si queda una parte final estática constante diferente de 0. Allí van a empezar los problemas.

La figura 3.6 muestra un sismograma con su TF . Arriba, el sismograma no está centrado a 0. No se ve su espectro. Explicar porque. Abajo, hemos centrado el sismograma en 0, sacando el valor promedio de la señal (vimos que el primer término de una serie de Fourier corresponde al valor promedio de la señal, y que corresponde a la transformada de Fourier a la frecuencia nula: $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$. Notar que no se ve un efecto de Gibbs muy fuerte porque el sismograma es naturalmente apodizado (empieza a cero y regresa a cero al fin de la señal. Pero si cortamos la señal, por ejemplo haciendo un espectro de la onda P sola, es mejor apodizar antes.

Se puede constatar el efecto de que el sismograma no era centrado en 0. Llamamos *sismo1* el sismograma centrado en 2000 (dato original) y *sismo2* el mismo sismograma para el cual hemos sacado el promedio.

¿Que pasa? Tenemos $\text{sismo2} = \text{sismo1} - \text{promedio}(\text{sismo1})$.

El promedio es: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ y el valor promedio para tiempos ∞ corresponde a una frecuencia nula (frecuencia=1/(tiempo infinito)=0), o sea: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = F(0)$

En frecuencia, vamos a tener: $TF(\text{sismo2}) = TF(\text{sismo1}) - TF(\text{promedio}(\text{sismo1}))$. Sabemos que la TF de un constante es un Dirac. Entonces vamos a tener un Dirac en el espectro en 0, por eso no se ve nada en el dibujo del espectro del sismograma *sismo1*. Para sacar este efecto, basta hacer una corrección de lo que llamaremos una línea de base.

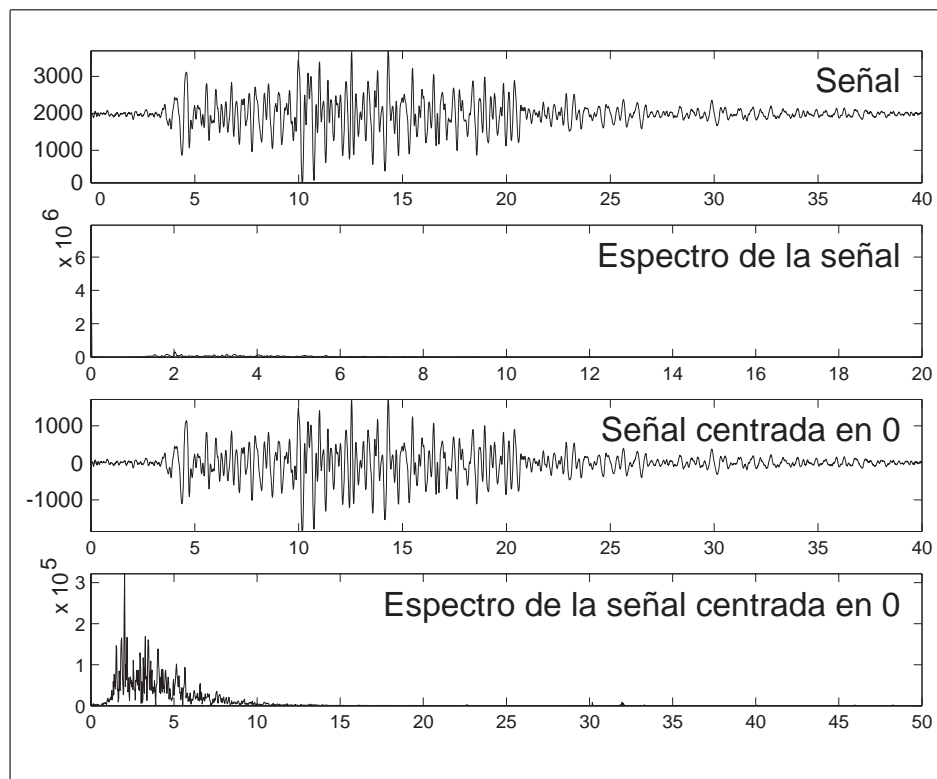


Figura 3.6: Espectro de un sismograma no centrado y centrado

Veremos después que podemos sacar un efecto de una recta con una pendiente. Si se hace un zoom de los dos espectros, claro que son los mismos porque la TF de una señal o de una señal subida o bajada (con un constante) son iguales excepto en 0.

Resumén: una función puerta permite seleccionar una parte de una señal sin cambiarlo. Es la ventaja. Pero la gran desventaja es que haciendo eso, si usamos TF (por ejemplo si empezamos a filtrar, a hacer un espectro de Fourier, a integrar o derivar una función) vamos a introducir artificialmente oscilaciones, debido a frecuencias (ver la forma de la TF de una puerta). Entonces generalmente nunca se aplica así brutalmente una TF a una señal sin precauciones. Igual generalmente nunca se integra o deriva así una función sin tomar precauciones. Una de la precaución es apodisar la función antes de este tipo de tratamiento para suavizar los efectos de bordes, para poner la función a zero en los extremos suavemente.

Una función puerta se puede ver como la diferencia de dos Heaviside trasladado de T (figura 3.7).

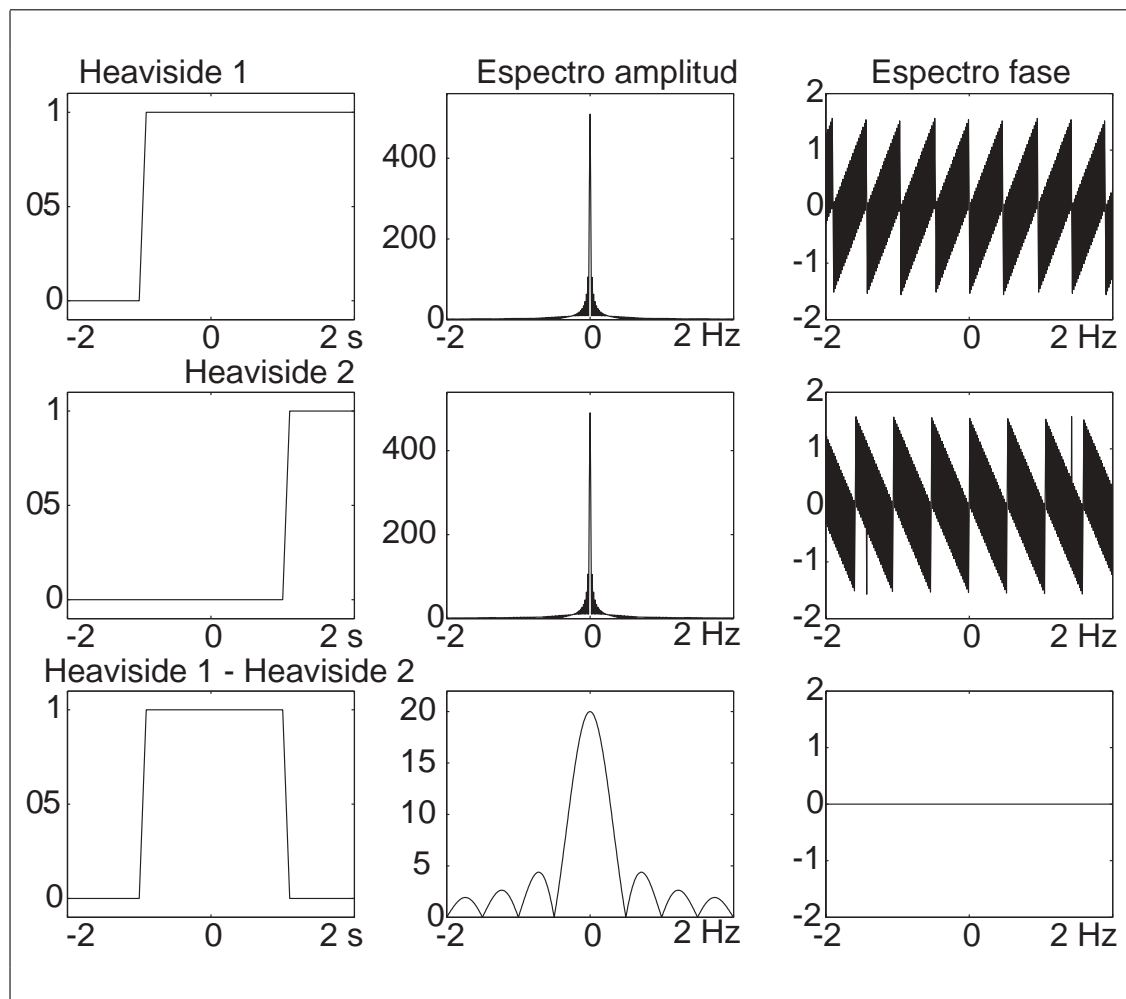


Figura 3.7: Función Puerta como diferencia de 2 Heaviside

3.5.3. Función triángulo

La función triángulo \wedge es definida por:

$$\wedge(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$TF[\wedge(t)] = T \sin_c^2(\pi \nu T) \text{ a verificar??}$$

3.5.4. Función sine cardinal sinc

La definición del seno cardinal \sin_c es:

$$\sin_c = \frac{\sin(x)}{x} \quad (3.20)$$

Se puede mostrar que:

$$\text{sinc}(0) = 1$$

Sirve para la TF de una función puerta y también sirve como función de interpolación para reconstituir una función continua a partir de una función muestreada.

Su transformada de Fourier es:

$$TF[\text{sinc}] = \Pi(\nu) \text{ a verificar un } \pi \text{ en una parte??} \quad (3.21)$$

3.5.5. Funciones trigonometricas

Tenemos (facil de mostrar):

$$TF[e^{2i\pi\nu_0 t}] = \delta(\nu - \nu_0) \quad (3.22)$$

$$TF[\cos(2i\pi\nu_0 t)] = \frac{\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)}{2} \quad (3.23)$$

$$TF[\sin(2i\pi\nu_0 t)] = \frac{\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0)}{2i} \quad (3.24)$$

3.5.6. Función de Hanning

La función de Hanning es:

$$h(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{D}\right) \right]. \quad (3.25)$$

Propiedades:

- D es la duración de “observación”.
- $h(0) = 1$
- es nula para $t = D/2$ y para $t = -D/2$

- $h(t) \geq 0$.
- Es periódica de periodo D .
- A veces hay definición de esta función limitada entre 0 y D o entre $-D/2$ y $D/2$. En este caso, la TF de esta función troncada es convolucionada con un sin_c .

Su TF es real y vale:

$$TF[h(t)] = \frac{\delta(\nu)}{2} + \frac{\delta(\nu - \frac{1}{D})}{4} + \frac{\delta(\nu + \frac{1}{D})}{4} \quad (3.26)$$

Es comun, para tener funciones más restringidas en tiempo, de elevar esa función con una potencia n :

3.5.7. Función signo

La función signo es:

$$\text{signo}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ +1 & t > 0 \end{cases}$$

Su relación con la función de Heaviside $H(t)$ es:

$$\text{signo}(t) = H(t) - H(-t) = 2H(t) - 1$$

Su Transformada de Fourier es:

$$TF[\text{signo}(t)] = pp\left(\frac{1}{i\pi\nu}\right).$$

donde pp es la parte principal definida en la formula xx.

3.5.8. Función exponencial decreciente

Su forma es:

$$H(t).e^{-at}$$

con $a > 0$. Es real y nula para tiempos negativos, vale 1 para $t = 0$ en la **formulación tiempo continuo**, pero vale 0,5 en una **representación muestreada**, tiende a cero para tiempos infinitos: su soporte es finito. El factor a controla la rapidez del decrecimiento.

Su TF vale:

$$TF[H(t).e^{-at}] = \frac{1}{a + 2i\pi\nu}$$

3.5.9. Sinus o cosinus modulado

Es útil a veces definir un seno o coseno adenuado (modulado en amplitud).

Es definida por:

$$\sin(t).e^{-at}$$

y

$$\cos(t).e^{-at}$$

El seno o coseno se llama a veces portadora y la exponencial la envuelve.

Su TF será la convolución de las TF respectivas, o sea una traslada de dos envuelves de Dirac con amplitud de 1/2.

3.5.10. Dirac

Un Dirac no es una función, sino una distribución. Fue inventada por el inglés Paul Dirac (1902-1984), quien era físico así que definió el Dirac por necesidad y sin el rigor matemático que desarrolló después el matemático francés Laurent Schwartz (1915-2002), con la teoría de las distribuciones. Nosotros, vamos a definir el Dirac sin hablar de distribuciones porque es afuera de este curso. El Dirac vale infinito en 0 y vale 0 en todos los otros lugares, pero la integral del Dirac entre $-\infty$ y $+\infty$ que es la integral entre $-\epsilon$ y

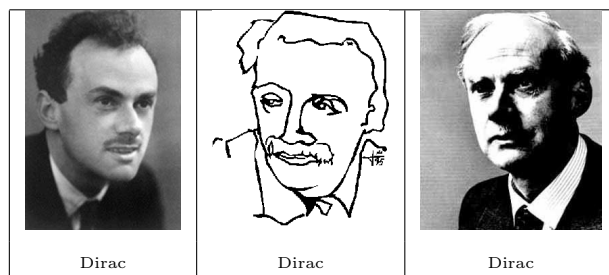


Figura 3.8: Dirac nació en Bristol, Inglaterra, el 8 de agosto de 1902 y murió en Tallahassee, Florida, Estados Unidos el 20 de octubre de 1984. Obtuvo el premio Nobel de física en 1933 junto con Schrödinger, por sus trabajos en física cuántica. Dirac inventó la notación δ , pero la 'función' impulso ya había sido definida por Heaviside (1850-1925).

$+\epsilon$, o sea sobre un intervalo muy pequeño, vale 1.

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(t) dt = 1$$

Se puede ver un Dirac como el límite de una función $h_{\epsilon}(t)$ que verifica las dos propiedades mencionadas, o sea:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{\epsilon}(t) dt = 1$$

y

$$h_{\epsilon}(t) \rightarrow 0 \quad \text{para } t \neq 0$$

Entonces, tendremos:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_{\epsilon}(t)$$

Vamos a dar algunos ejemplos:

1. Un Dirac como limite de una función puerta estrecha: Π_ϵ

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \Pi_\epsilon$$

El area de esta función vale siempre $\frac{1}{\epsilon} * \epsilon = 1$, y el valor en 0 vale ϵ , o sea tiende al infinito cuando ϵ tiende a 0.

La figura 3.9 muestra como la función puerta definida tiende a un Dirac cuando ϵ tiende a 0.

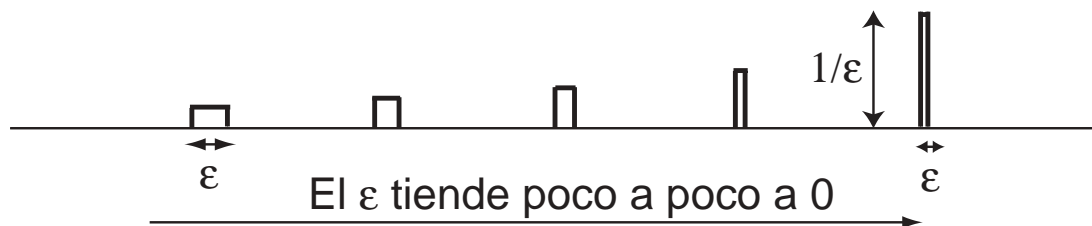


Figura 3.9: Un Dirac se puede aproximar como el limite de una puerta de ancho que tiende a 0. El area siempre es constante (igual a 1), por eso que el Dirac tiende al infinito cuando el ancho ϵ tiende a 0

2. Un Dirac como limite de una función seno cardinal estrecha: $\frac{1}{\epsilon} \text{sin}_c(\pi t/\epsilon)$

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \text{sin}_c(\pi t/\epsilon)$$

3. Un Dirac como limite de una función de Hanning estrecha a la potencia n :

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^n(t)$$

con $h(t)$ la función de Hanning.

4. Un Dirac como una serie de Fourier:

En realidad, una serie de Fourier es periodica, así que no vamos a tener un Dirac sino una peineta de Dirac. Ver peineta de Dirac abajo.

5. Un Dirac como una transformada inversa de Fourier:

Sabemos que:

$$TF[\delta(t)] = 1$$

entonces:

$$\delta(t) = TF^{-1}(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{2i\pi\nu t} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

Entonces un Dirac se puede escribir como una sumatoria infinita de todas las frecuencias continuas, todas con la misma amplitud. Un Dirac contiene todas las frecuencias. Es por eso que una función de Green permite caracterizar un sistema, porque es la salida de un Dirac, o sea la salidad de todas las frecuencias.

6. Propiedades del Dirac:

$$\delta(0) = \infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t) = \begin{cases} f(0) & \text{en } t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0) \cdot \delta(t) dt = f(0)$$

$$f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0) = \begin{cases} f(t_0) & \text{en } t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

El Dirac es el elemento neutro del producto de convolución:

$$\delta(t) * f(t) = f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$TF[\delta(t)] = 1$$

Esta propiedad es espectacular. Significa que un Dirac contiene todas las frecuencias. Por ejemplo, si quieren conocer la salida de un sistema a todas las frecuencias, pueden entrar todas las frecuencias y estudiar la respuesta del sistema a todas estas frecuencias. Como son infinitas, va a demorar bastante tiempo... Es mucho más rápido de entrar en Dirac, y la salida corresponderá a la salida de todas las frecuencias!! Ilustra al extremo el principio de Einsenberg: si una función está bien definida en el tiempo (Dirac), está muy mal definida en el dominio de las frecuencias (línea infinita constante).

De igual manera, tenemos el contrario válido:

$$TF[1] = \delta(\nu)$$

Estas propiedades ($TF[\delta(t)] = 1$ y $TF[1] = \delta(\nu)$) ilustra muy bien un caso de dualidad tiempo/frecuencia, el principio de incertidumbre de Einsenberg. Ilustra el hecho que cuando tenemos una información muy puntual en el tiempo, no tenemos ninguna información sobre la frecuencia, en el sentido que todas las frecuencias están presentes con la misma amplitud. Damos un ejemplo: si saben que un bus está en un lugar a un momento preciso t_0 , nunca van a conocer cuál es la frecuencia de este bus a este lugar. Para tener una mínima información sobre la frecuencia, el bus tiene que pasar por lo menos 2 veces en este lugar.

$$TF[\delta(t - t_0)] = e^{-2i\pi\nu t_0}$$

La TF de un Dirac atrasado de t_0 es una función compleja de módulo 1, cuya fase es $-2\pi\nu.t_0$. Varía linealmente con la frecuencia. Es una recta pasando por el origen $\nu = 0$ de pendiente proporcional al retraso t_0 .

7. Aspecto filosófico del Dirac:

El Dirac temporal tiene aspectos filosóficos importantes sobre la noción del tiempo. Significa que todo, el infinito, está contenido en el momento presente ($t = 0$). Todo existe en un tiempo de duración nula (el presente), o sea el todo (el valor infinito del Dirac) está incluido en lo nada (el tiempo presente $t=0$)... (*La vida es eterna en 5 minutos ...*) Afuera de $t = 0$, el Dirac vale cero, es decir nada existe afuera del momento presente $t = 0$. O sea, todo está vacío, nada existe, excepto en el momento presente donde todo existe. Se puede ver el tiempo así, y la descripción del mundo también: todo está vacío la mayoría del tiempo (hasta casi siempre), excepto en el momento presente donde el mundo entero existe. Solo la mente hace un 'link' entre los momentos sucesivos, la mente hace una interpolación entre los momentos juntados. El tiempo sería discontinuo, y la mente transforma esta peineta de Dirac en una función continua. Veremos en esta clase como se hace

está transformación de una señal discreta en una señal continua. Para nosotros, el tiempo será siempre discontinuo, como una sucesión de tiempos discretos. En este sentido, no deberíamos hablar de serie S de tiempo pero más bien hablar de una serie de tiempo S. No están sin notar que pensamos siempre en terminos del tiempo continuo. Por ejemplo hablamos del dominio del tiempo (singular) y del dominio de las frecuencias (plural). ¿Porque? ¿El tiempo será continuo, y tomando el inverso (frecuencia) se transformaria en una función discontinua?

3.5.11. Peineta de Dirac o Shah

Una peineta de Dirac es :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT)$$

con $n \in \mathbb{Z}$

Como una peineta de Dirac es periódica, de período T, se puede descomponer en una serie de Fourier:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F_n e^{2i\pi nt/T}$$

con

$$F_n = \frac{1}{T} \int_T \delta_T(t) e^{-2i\pi nt/T} = \frac{1}{T}$$

Entonces:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{T} e^{2i\pi nt/T} = \frac{1}{T} + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{2}{T} \cos(2\pi nt/T) \quad (3.28)$$

La parte imaginaria de la TF de una peineta de Dirac es nula. La TF de una peineta de Dirac es una peineta de Dirac, de período en frecuencia el inverso del período en tiempo:

$$TF[\delta_T(t)] = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(\nu) = 1 + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \cos(2\pi n\nu T) \quad (3.29)$$

Ver el parágrafo 2.7.13 para usar una peineta de Dirac para periodizar una función.

Aquí viene una representación numérica de una serie de Fourier de una peinetas de Dirac:

3.5.12. Función par e impar

Toda función puede descomponerse de manera única en una función par y una función impar (ver párrafo 2.6.2).

Ejemplo 1:

$$e^t = \cosh(t) + \sinh(t)$$

con

$$\cosh(t) = \frac{1}{2} \{e^t + e^{-t}\} \quad \text{partepar}$$

y

$$\sinh(t) = \frac{1}{2} \{e^t - e^{-t}\} \quad \text{parteimpar}$$

Ejemplo 2:

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

con

$$\cos(t) = \frac{1}{2} \{e^{it} + e^{-it}\} \quad \text{partepar}$$

y

$$\sin(t) = \frac{1}{2i} \{e^{it} - e^{-it}\} \quad \text{parteimpar}$$

Ejemplo 3:

Ejemplo de un sismograma. Dado un sismograma, descomponerlo en su parte par y su parte impar (lo dejamos como problema). Hacer los dos casos: sin centrar la señal inicial, y centrandola a cero. Comparar los resultados (ver resultado figura 3.10).

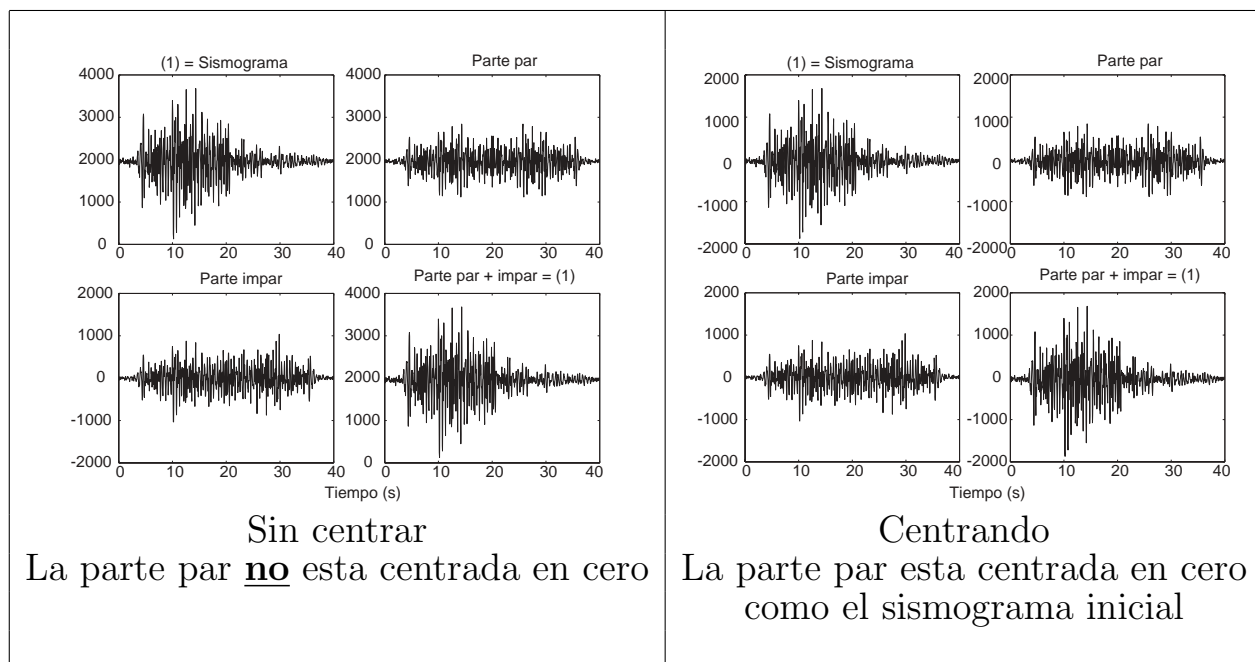


Figura 3.10: Parte par e impar de un sismograma

3.5.13. Resumen ☺

Tiempo (t)	Frecuencia (ν)
$f(t) = TF^{-1}[F(\nu)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$	$F(\nu) = TF[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\nu) + a_2 F_2(\nu)$
$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(2i\pi\nu)^n F(\nu)$
$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{2i\pi\nu} F(\nu)$
$f(t - t_0)$	$e^{-2i\pi\nu t_0} F(\nu)$
$e^{2i\pi\nu_0 t} f(t)$	$F(\nu - \nu_0)$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$
$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\nu) \cdot F_2(\nu)$
$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$F_1(\nu) * F_2(\nu)$
$\delta(t)$ Dirac	1
1	$\delta(\nu)$ Dirac
$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$ Heaviside	$\frac{1}{2} \delta(\nu) - i pp \left\{ \frac{1}{2\pi\nu} \right\}$

. es el producto simple, * es el producto de convolución.

Tiempo (t)	Frecuencia (ν)
$f(t) = TF^{-1}[F(\nu)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$	$F(\nu) = TF[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$
$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT)$ Peineta de Dirac	$\frac{1}{T} \delta_{1/T}(\nu)$ Peineta de Dirac
$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & t < T/2 \\ 0 & t > T/2 \end{cases}$ Función Puerta	$T \operatorname{sinc}(\pi\nu T)$ Sinus cardinal
$e^{ct} \cdot \Pi_T(t) \quad \text{con } \operatorname{Re}(c) < 0$	$\frac{1}{2i\pi\nu - c}$
$e^{c- t }$	$\frac{-2c}{(2\pi\nu)^2 + c^2}$
$\frac{1}{t^2 + c^2} \quad \text{con } \operatorname{Re}(c) < 0$	$-\frac{\pi}{c} e^{c- 2\pi\nu }$
$\frac{t}{\{t^2 + c^2\}^2} \quad \text{con } \operatorname{Re}(c) < 0$	$\frac{2i\pi\nu}{2c} e^{c-2 \pi\nu }$
$\operatorname{signo}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ +1 & t > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\pi\nu}$
$e^{-at^2} \quad \text{con } a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-(2\pi\nu)^2/(4a)}$
t	$\frac{2\pi}{2i\pi\nu} \delta(2\pi\nu)$

Tiempo (t)	Frecuencia (ν)
$f(t) = TF^{-1}[F(\nu)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$	$F(\nu) = TF[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$
$\cos(at)$	$\pi[\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)]$
$\sin(at)$	$\frac{\pi}{i}[\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)]$

3.6. Convolución continua de dos señales

as

3.6.1. Definición

La definición del producto de convolución de dos señales $f(t)$ y $g(t)$ es:

$$[f * g](t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t - u) du. \quad (3.30)$$

El producto de convolución (o simplemente la convolución) de dos señales es algo muy usado en geofísica. Permite por ejemplo ver el efecto de la tierra donde se propaga las ondas sísmicas o de ver el efecto de los instrumentos (sismómetros, acelerógrafos) sobre la señal de entrada emitida (e.g. explosión artificial, vibración de la tierra con aparatos geofísicos, un terremoto ...).

Si tenemos una señal de entrada (que puede ser cualquier emisión artificial o natural: explosión, terremoto...) $e(t)$, y si conocemos el efecto de un sistema (la tierra, un sismómetro ...) por su repuesta (repuesta del suelo o repuesta instrumental) $r(t)$, entonces la señal que vamos a gravar será la convolución $e(t)$ por $r(t)$, es decir, que efecto de la tierra o del sismómetro (definido con $r(t)$) sobre la señal emitida $e(t)$ es el producto de convolución $e(t) * r(t)$.

3.6.2. Propiedades del producto de convolución

- **Conmutatividad** La convolución es conmutativa, es decir que no importa si invertimos las dos señales al hacer el producto:

$$f(t) * g(t) = f(t) * g(t) \quad (3.31)$$

Eso significa que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u) g(u) du \quad (3.32)$$

En la práctica, en computadoras, los resultados van a ser iguales también claro, pero puede resultar diferente en cuestión al tiempo de cálculo.

- **Distributividad** La convolución es distributiva, es decir

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t) \quad (3.33)$$

En la practica, es mucho más rápido calcular $f(t) * [g(t) + h(t)]$ que $f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$. Por eso es importante, en la formulación antes de escribir un programa, de hacer cuidado con este tipo de problema.

- **Asociatividad** La convolución es asociativo, es decir

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t) \quad (3.34)$$

- **Elemento neutro** El Dirac $\delta(t)$ es el elemento neutro de la convolución:

$$\delta(t) * f(t) = f(t) \quad (3.35)$$

Veremos otras propiedades al ver el capítulo sobre filtros.

- **Varias**

$$(f * g)(\lambda t) = |\lambda| f(\lambda t) * g(\lambda t) \quad (3.36)$$

3.6.3. Derivación de un producto de convolución

$$(f * g)' = f' * g = f * g' \quad (3.37)$$

Demostración: Tenemos

$$[ll] \frac{d}{dt} [f * g](t) = \text{TF}^{-1} [\text{TF} [\frac{d}{dt} [f * g](t)]] \quad (3.38)$$

$$= \text{TF}^{-1} [2 i \pi \nu \text{TF} [f(t)] \text{TF} [g(t)]] \quad (3.39)$$

$$\frac{d}{dt} [f * g](t) = \text{TF}^{-1} [2 i \pi \text{TF} [f(t)] * \text{TF}^{-1} [\text{TF} [g(t)]]] \quad (3.40)$$

$$= \text{TF}^{-1} [\text{TF} [\frac{d}{dt} f(t)] * g(t)] \quad (3.41)$$

$$= \frac{d}{dt} f(t) g(t) \quad (3.42)$$

de igual manera se puede mostrar la otra relación.

3.6.4. Integración y producto de convolución

La convolución de una función $f(t)$ por la función de Heaviside es la primitiva de esa función:

$$f(t) * H(t) = \int f(t) dt \quad (3.43)$$

hghg

3.6.5. Periodización de una función: convolución por una peina de Dirac

fdfd

3.6.6. Repuesta de un sistema lineal: repuesta al impulso, función de Green, repuesta instrumental y producto de convolución

Ejemplo 1: la repuesta de un sistema lineal Un sistema lineal es un sistema (por ejemplo un instrumento) que responde linealmente a toda entrada $e(t)$, o sea que sus salidas $s(t)$ verifiquen:

$$[rqTcql]e(t) \longrightarrow [sistemalineal] \longrightarrow s(t) \quad (3.44)$$

$$Ae(t) \longrightarrow [sistemalineal] \longrightarrow As(t) \quad (3.45)$$

$$e_1(t) + e_2(t) \longrightarrow [sistemalineal] \longrightarrow s_1(t) + s_2(t) \quad (3.46)$$

La repuesta de un sistema a un Dirac (impulsión) se llama de diferentes maneras: función de Green repuesta al impulso función de transferencia repuesta instrumental (a un impulso) en el caso de un instrumento

$$[rqTcql]g(t) \quad (3.47)$$

$$(3.48)$$

La TF de un Dirac es un constante. Eso significa que un Dirac contiene todas las frecuencias con las mismas amplitudes, a sea si sumamos una infinidad de frecuencias vamos a simular un Dirac. $TF[t] = 1$. Entonces si entramos un Dirac en un sistema lineal, su salida sera la repuesta del instrumento a todas las frecuencias, por eso se llama repuesta instrumental y así de conoce todas las características del instrumento. Basta conocer esta repuesta al impulso $i(t)$ para conocer la respuesta del instrumento a todos los otros señales

de entrada. Si $e(t)$ es una entrada cualquiera, la salida del sistema lineal será simplemente la convolución de la entrada por la repuesta al impulso, o sea:

$$[rqTcl]e(t) \longrightarrow [sistemalineal] \longrightarrow s(t) = e(t) * i(t) \quad (3.49)$$

Ejemplo 2: ¿cuál es la repuesta instrumental de un sismómetro viejo?

Suponemos que tenemos un sismómetro antiguo y que no conocemos la repuesta instrumental de este sismómetro. Suponemos que tenemos también un sismómetro nuevo por el cuál tenemos la repuesta instrumental. ¿Como hacer para deducir la repuesta instrumental del sismómetro antiguo?

El sismómetro antiguo (lo llamamos 1) tiene una repuesta instrumental $i_1(t)$ que no conocemos

$$[rqTcql]\delta(t) \longrightarrow [sismometroantiguo] \longrightarrow i_1(t) \quad (3.50)$$

$$\delta(t) \longrightarrow [sismometroantiguo] \longrightarrow i_2(t) \quad (3.51)$$

Suponemos que tenemos un terremoto, con una señal (movimiento de la tierra antes de estar registrado por en sismómetro). Llamamos e esta señal que llega justo antes del sismómetro $e_1(t)$ y $e_2(t)$ por el sismómetro 2. A priori vamos a tener $e_1(t) \neq e_2(t)$ a pesar de que estas señales provienen del mismo terremoto y que todavía no han pasado por los instrumentos. Eso es el caso general cuando los dos sismómetros son en 2 lugares diferentes (como la propagación es diferente entre la fuente del terremoto y de los 2 instrumentos, las señales correspondientes serán diferentes). Vamos a llamar $s_1(t)$ y $s_2(t)$ a las salidas de los 2 instrumentos a este terremoto. Así tenemos:

$$[rqTcql]e_1(t) \longrightarrow [sismometroantiguo] \longrightarrow s_1(t) = e_1(t) * i_1(t) \quad (3.52)$$

$$e_2(t) \longrightarrow [sismometronuevo] \longrightarrow s_2(t) = e_2(t) * i_2(t) \quad (3.53)$$

Tomamos la TF de cada salida:

$$r/TF [s_1(t)] = TF [e_1(t)] TF [i_1(t)] \quad (3.54)$$

$$TF [s_2(t)] = TF [e_2(t)] TF [i_2(t)] \quad (3.55)$$

Hagamos el ratio de estas expresiones:

$$\frac{TF [s_1(t)]}{TF [s_2(t)]} = \frac{TF [e_1(t)]}{TF [e_2(t)]} \frac{TF [i_1(t)]}{TF [i_2(t)]} \quad (3.56)$$

Lo que conocemos es: $s_1(t)$ y $s_2(t)$ (los 2 sismogramas grabados en los 2 instrumentos)

Lo que no conocemos es: $e_1(t)$, $e_2(t)$ y $i_1(t)$.

Debemos hacer algo para reducir el número de incógnitas. Si ponemos los dos instrumentos al lado, el camino de las ondas que van a viajar del foco del terremoto a estas 2 estaciones será el mismo, así que la forma de onda también, así que vamos a tener en este caso particular: $e_1(t) = e_2(t)$. Entonces se puede resolver el problema:

$$TF [i_1(t)] = \frac{TF [i_2(t)] TF [s_1(t)]}{TF [s_2(t)]} \quad (3.57)$$

y tomando la TF^{-1} :

$$i_1(t) = \text{TF}^{-1} \left[\frac{\text{TF}[s_2(t)] \text{TF}[s_1(t)]}{\text{TF}[s_2(t)]} \right] \quad (3.58)$$

Este proceso se llama a veces calibrar un sismómetro.

3.7. El fenómeno de Gibbs y apodización

Sumando series de Fourier, habíamos visto que aparecen altas frecuencias parásitas. Es el fenómeno de Gibbs que vamos a ver más tarde en el curso. Es relacionado al hecho que la ventana inicial que sumamos (un seno) esta cortado brutalmente porque trabajamos sobre una ventana finita y así el seno esta cortado brutalmente. Veremos como reducir este efecto, hasta que es imposible eliminarlo completamente sin además ‘dañar’ o ‘cambiar’ lo que realmente queremos hacer. Hace parte de los numerosos problemas que vamos a encontrar al pasar a una señal muestreada, numérica, finita ... en fin lo que siempre vamos a encontrar en tratamiento de señales numéricas. C’est la vie...

3.8. Transformada de Fourier 2 D o transformada (f , k) o (k1 , k2)

Vamos a ver una transformada de Fourier con dos variables (pueden ser 2 variables de espacio como en el caso de una imagen o una de espacio u una de tiempo como en el caso de cortes sísmicos):

Si $f(x_1, x_2)$ es una función de dos variables (x_1, x_2 de R en C , vamos a notar $F(k_1, k_2)$ la transformada (directa) de Fourier de $f(x_1, x_2)$ y su definición es:

$$F(k_1, k_2) = \text{TF}[f(x_1, x_2)] = \text{TF}[\text{TF}[f(x_1, x_2)]_{x_1}]_{x_2} \quad (3.59)$$

k se llama la frecuencia (temporal o espacial). La frecuencia espacial se llama también número de onda y su unidad es m^{-1} . A veces se define también una pulsación espacial, con un factor multiplicativo 2π . En el caso de una TF 2D de un perfil sísmico, tenemos $k_1 = t$ y $k_2 = x$.

Ojo: El orden de ejecución de las TF es importante. En el caso de un corte sísmico, empezamos por una TF temporal $\text{TF}_{x_1} = \text{TF}_{x_2}$ que sera un número complejo.

Vamos a dar las definiciones analíticas y sus propiedades. Vamos también a pasar a una descripción muestreada para ver las dificultades que vamos a encontrar cuando queremos pasar de una formulación matemática (o analógica) a una aplicación numérica

Figura 3.11: insertar figura

(lo que hacen los instrumentos modernos numéricos, o cuando queremos aplicar los conceptos en una computadora, o cuando queremos digitalizar funciones temporales (e.g. un sismograma) o curvas espaciales (e.g. curvas de niveles), o imágenes analógicas (un mapa, una imagen satelital, aérea...).

Vamos también tener problemas cuando vamos a representar los resultados gráficamente. En teoría, la computadora puede hacer los cálculos con un número mínimo de puntos, pero el ojo es mucho más exigente. A veces vamos que creer que ‘faltan’ puntos a mirar una función que cumplen con una condición de muestreo mínimo que vamos a ver en este curso. Debemos conocer esta diferencia y no pensar que los cálculos son malos porque al dibujarlos no son lindos o porque parece que faltan puntos. Eso es la condición de muestreo de Shannon y vamos a ver todo eso en detalle en este curso. Al revés, a veces vamos a tener demasiado puntos y a dibujarlos vamos a ver un especie de “aliasing” gráfico, que en realidad es solamente un problema de representación gráfica y no un problema matemático o de algún error que hicimos. Por eso hay que conocer muy bien todos estos artefactos y distinguir cuales son reales y cuales son artificiales. Hay que hacer mucho cuidado en caso de tratamiento de imágenes porque pueden aparecer lindas figuras que no tienen nada real. Puede ser solamente un lindo efecto de aliasing.

Ejemplo de aliasing gráfico de un cos de misma frecuencia pero dibujado con varias duraciones en un gráfico de mismo tamaño: el problema es el tamaño de la ventana gráfica que es pequeña y no un problema numérico.

Capítulo 4

Señales discretas: Muestreo temporal y frecuencial

4.1. Muestreo temporal ideal perfecto de una función continua

Hasta ahora, hemos visto señales que dependían de una variable continua (como el tiempo ' t ' o la distancia ' x '), o sea una señal analógica. Eso es práctico para hacer cálculos matemáticos analíticos. Pero en la práctica, como en el caso de señales numéricas, las variables no son continuas. Estos valores pueden provenir de un instrumento electrónico que solamente puede trabajar de manera discontinua porque graba solamente en algunos momentos. Como cada medida demora su tiempo, el sistema electrónico tiene que terminar esta medida antes de empezar una nueva medida. Por ejemplo un sismograma gravado en un sistema de adquisición numérica está muestreado a intervalos de tiempos constantes. Es la misma cosa cuando se usan señales en computadoras. El proceso de muestreo puede ser también el resultado de una digitalización 'a mano' de una curva analógica, por ejemplo con una mesa digitalizadora. Puede ser también el resultado de medidas en el terreno en algunos puntos en la superficie de la Tierra (caso de medidas de la gravedad, del campo magnético, eléctrico, GPS, sísmica, de la temperatura, presión atmosférica etc). En estos casos, el intervalo entre dos puntos de medida no será constante. Entonces, las señales muestreadas no están conocidas para todo valor de la variable (tiempo o espacio) sino para algunas de ellas ' t'_n ' o ' x'_n ', en números discretos y finitos. Vamos a ver como pasar de una señal analógica, continua a una señal discreta, muestreada, y como regresar a la señal original continua. Una preocupación constante será saber si la función muestreada contenga la misma información que la señal continua. Vamos a ver eso en este capítulo, comparando los espectros de la función muestreada y continua.

4.1.1. ¿Como pasar de una función continua a una función muestreada?

Primero que todo, vamos a suponer que la señal continua $f(t)$ tiene un **espectro acotado**, es decir que su espectro $F(\nu)$ esta limitado, o sea: $F(\nu) = 0$ para $\nu > \nu_{max}$. La señal inicial $f(t)$ puede tener tal espectro acotado de manera natural, pero si no es el caso, tenemos que acotar el espectro artificialmente (por ejemplo aplicando un filtro como lo veremos más adelante) para imponer que el espectro $F(\nu)$ sea nulo para frecuencias $\nu > \nu_{max}$.

El muestreo de una señal consiste a pasar de una señal $f(t)$ continua (analógica) a una señal $f(n\Delta t)$ discreta (o muestreada), cambiando simplemente el valor $f(t)$ por el valor $f(n\Delta t)$, donde $n \in \mathbb{N}$, y Δt es el **periodo de muestreo**. En el caso de muestreos con intervalos constantes, equivale a hacer el producto de la función $f(t)$ continua por una peineta $\delta_{\Delta t}(t)$ de Dirac, de intervalo Δt .

Llamamos $f(t)$ la función en tiempo continuo y $\tilde{f}(t_n)$ la función en tiempo discreto (**función muestreada**), con $t_n = n\Delta t$, donde Δt se llama la **taza de muestreo**.

$$\tilde{f}(t_n) = f(t) \cdot \delta_{\Delta t}(t)$$

con:

$$\delta_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

o sea:

$$\tilde{f}(t_n) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n\Delta t) \cdot \delta(t - n\Delta t)$$

Interpretación: una señal muestreada es una serie de impulsos $\delta(t - n\Delta t)$ separados (aca de manera constante) de Δt cuyos pesos $f(n\Delta t)$ son los valores de la función original $f(t)$ a los instantes $t = n\Delta t$. Se habla de una serie de tiempo que se nota a veces: $f_n = \tilde{f}(t_n)$. Para una función que depende del espacio, sería una serie de espacio (pero no se dice así).

Los datos están en número limitado N . La **duración de la señal** será entonces: $D = N \Delta t$.

Como tenemos una multiplicación por un Dirac (o una peineta), tenemos que tomar la integral $\int_{-\infty}^{+\infty}$ de las expresiones anteriores:

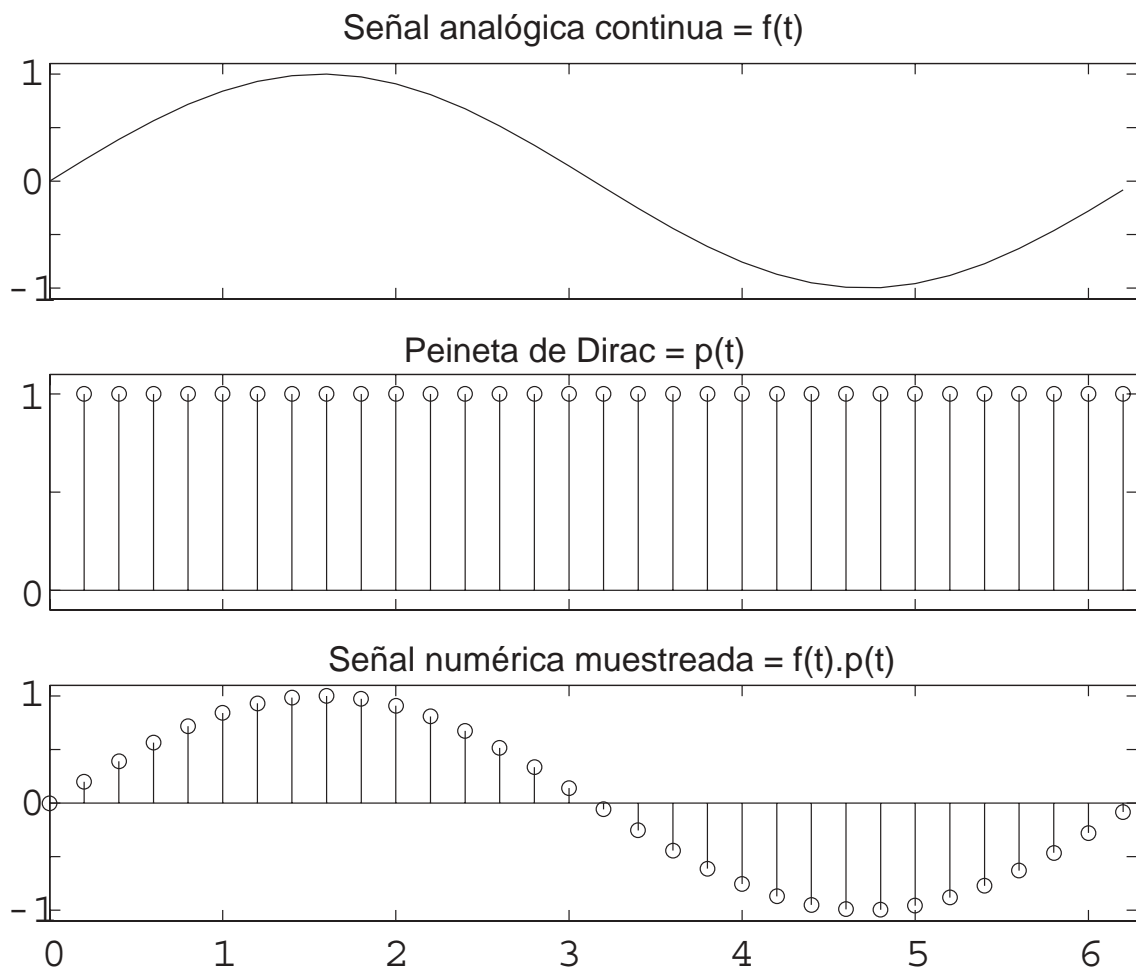


Figura 4.1: Muestreo de una función continua:

arriba: $f(t)$ es la función continua

medio: $p(t)$: peineta de Dirac

abajo: el producto de $f(t)$ por $p(t)$ nos da la función muestreada.

Vimos (parágrafo 3.5.10) la propiedad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0) \delta(t) dt = f(0)$$

Eso significa que el Dirac permite tomar un valor de la función $f(t)$ al tiempo $t = 0$. Se puede calcular el valor tomado en otro tiempo t_0 usando la relación:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Integrando sobre todo el espacio, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t_n) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta_{\Delta t}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - n\Delta t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n\Delta t) \cdot \delta(t - n\Delta t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t_n) dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t) dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tilde{f}(t_n)$$

Eso significa que integrar (con una integral $\int_{-\infty}^{+\infty}$ continua) una función muestreada $\tilde{f}(t_n)$ equivale a sumar (con una sumatoria $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ discreta) todos los muestreos $\tilde{f}(t_n)$. Eso como si la función muestreada valia 0 afuera de los muestreos.

4.1.2. Transformada de Fourier de una función muestreada: Periodización del espectro:

Como una peiqueta de Dirac es periódica, se puede descomponer en una serie de Fourier (ver parágrafo 3.5.11):

$$\delta_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F_n e^{2i\pi n t / \Delta t}$$

con

$$F_n = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \delta_{\Delta t}(t) e^{-2i\pi n t / \Delta t} dt = \frac{1}{\Delta t}$$

Entonces:

$$\delta_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\Delta t} e^{2i\pi n t / \Delta t}$$

Entonces:

$$\tilde{f}(t_n) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(t) \cdot e^{2i\pi n t / \Delta t}$$

Tomando la transformada de Fourier de esa expresión, tenemos:

$$F_n(\nu) = TF \left[\tilde{f}(t_n) \right] = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F \left(\nu - \frac{n}{\Delta t} \right)$$

donde Δt es la tasa de muestreo en el tiempo de la señal original.

La forma general del espectro de una señal muestreada de tasa de muestreo Δt es similar al espectro de la señal continua, pero repetido (periodizado) con espacio $1/\Delta t$ (la sumatoria del espectro continuo $F(\nu)$, traslado en frecuencias). El espectro de una señal muestreada es periódico. Además, es continuo. Su amplitud, en cambio, es multiplicado por $1/\Delta t$. Es importante acordarse que muestrear una función implica automáticamente una periodización del espectro en frecuencias.

La TF de una señal muestreada es una función periódica y continua,

de espectro 'base' el espectro de la función continua.

Un muestreo en tiempo introduce una periodización en frecuencia.

Podemos calcular la TF de la función muestreada $\tilde{f}(t_n)$ directamente con la definición y tenemos el mismo resultado:

$$TF[\tilde{f}(t_n)] = TF[f(t) \cdot \delta_{\Delta t}(t)] = F(\nu) * \frac{1}{\Delta t} \delta_{1/\Delta t}(\nu) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\left(\nu - \frac{n}{\Delta t}\right)$$

Otra expresión:

$$TF\left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n \cdot \Delta t) \cdot \delta_{n\Delta t}(t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n\Delta t) \cdot e^{-2i\pi n\nu\Delta t}$$

4.1.3. Buen muestreo temporal: conservación del espectro o condición de Shannon

Entonces, muestrear es tomar un número finito de puntos para representar la función continua $f(t)$ inicial. Esta operación es más difícil de lo que podría parecer a primera vista. Una pregunta importante es la siguiente: ¿cuántos puntos podemos tomar para representar correctamente la función original? La respuesta es: un número tal que, con estos puntos muestreados, podemos regresar a la función continua inicial sin deformar esta función. Este proceso es conocido como la condición de Shannon o de Nyquist. Si no respetamos esta condición, la información de la función original continua será perdida, y

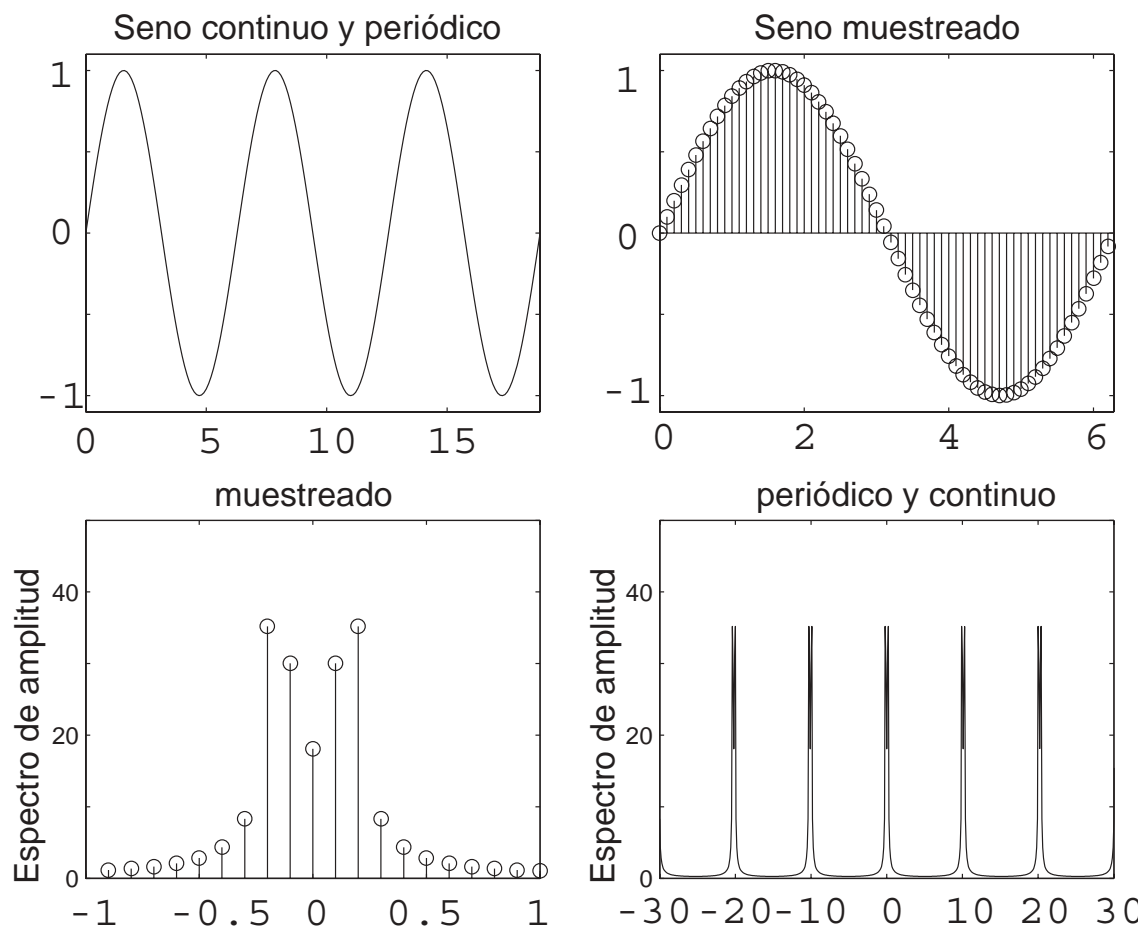


Figura 4.2: Espectros discreto de una función continua periodica y espectro continuo y periódico de una función muestreada. En este ejemplo, se ve muy bien la dualidad entre los dominios de los tiempos y de las frecuencias (una TF de una señal periodica es muestreada y la TF de una señal muestreada es periódica).

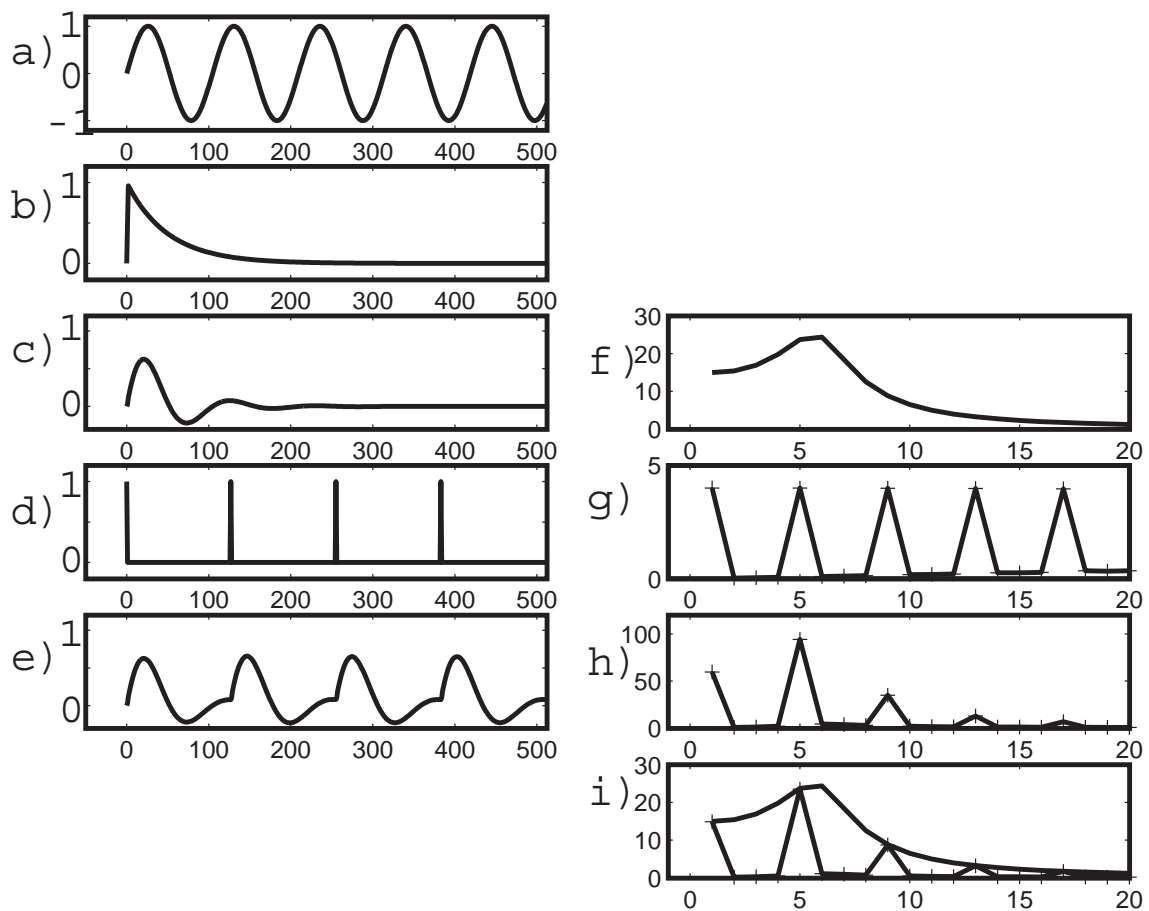


Figura 4.3: Espectros discretos de una función periódica: a) Función seno b) Función exponencial decreciente c) Señal a.señal b d) Peineta de Dirac e) $c \cdot d$ f)espectro de c g)Espectro de d h) f.g i) Comparación espectro continuo y muestreado

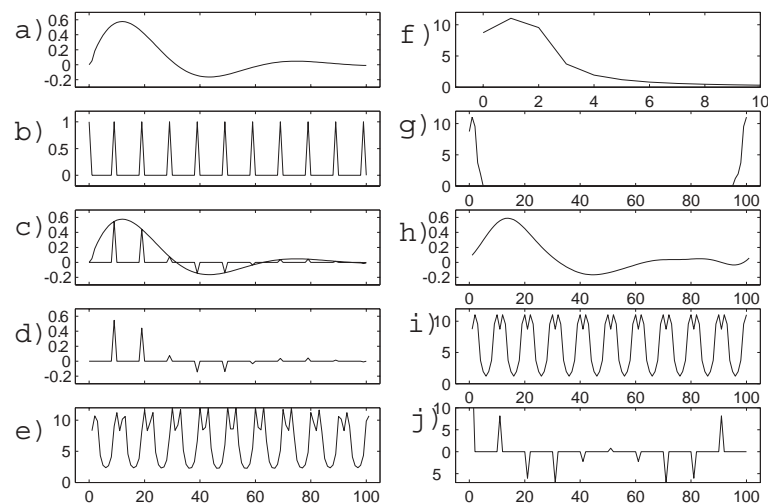


Figura 4.4: Espectros ...

ningún tratamiento matemático posterior nos permitiera recuperar esta información perdida: Será imposible encontrar de nuevo la función original.

Para saber cuantos puntos mínimos podemos tomar para describir tal función continua en el tiempo, es más fácil ver eso en el dominio de las frecuencias. Acabamos de ver que cuando se pasa de una función continua a una función discreta (es decir cuando muestreamos una señal temporal), el espectro (de la función tiempo continua) se transforma en un espectro periódico (de la función muestreada), donde la forma base es justamente el espectro de la función continua. Recordemos que eso es posible porque el espectro de la función continua es acotado (es decir que la señal no tiene energía (su espectro es nulo) para frecuencias $\nu > \nu_{max}$). Queremos que, durante el proceso de periodización del espectro, estos espectros no se toquen ni se recubren (Figura 4.5), porque si se recubren, vamos a deformar el espectro de la función original y entonces será imposible reconstruir la función continua temporal original a partir de la función temporal muestreada. Esta distorsión de la señal se llama en ingles 'aliasing'. El propósito es, a partir de una función muestreada, poder re-producir la función continua original.

Vimos que el espectro de la transformada de Fourier de una función muestreada es periódico (y continuo). La figura 4.5 da un ejemplo de un espectro periodizado (convolución del espectro original de la función continua por una peineta de Dirac).

Se dice que la condición de Shannon esta respectada cuando el espectro $F(\nu)$ esta conservado durante el proceso de periodización, es decir que no hay recubrimiento de estos espectros periodizados en frecuencia (cada espectro de $f(t)$ en frecuencias esta bien separado de los otros). La forma del espectro original se conserva (no cambia de forma). Esta condición nos asegura regresar a la función original (ver parágrafo como pasar de una función muestreada a una función continua).

La figura 4.5 da una ilustración de la condición de Shannon: si la señal esta bien muestreada en tiempo, los espectros son continuos y periódicos y además bien separados (no se recubren) y regresan a 0 (como el espectro de la señal continua).

Los espectros no se topán cuando en el intervalo $|\nu| < \frac{1}{2\Delta t}$, tenemos la igualdad :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\left(\nu - \frac{n}{\Delta t}\right) = F(\nu) \text{ solamente si : } \frac{1}{\Delta t} > 2\nu_{max} \text{ donde } \nu_{max} \text{ es la frecuencia maximal}$$

que corresponde al limite más alla del cual $F(\nu)$ es nulo para las frecuencias superior a ν_{max} (Figura 4.5).

La frecuencia de Nyquist o de Shannon y es:

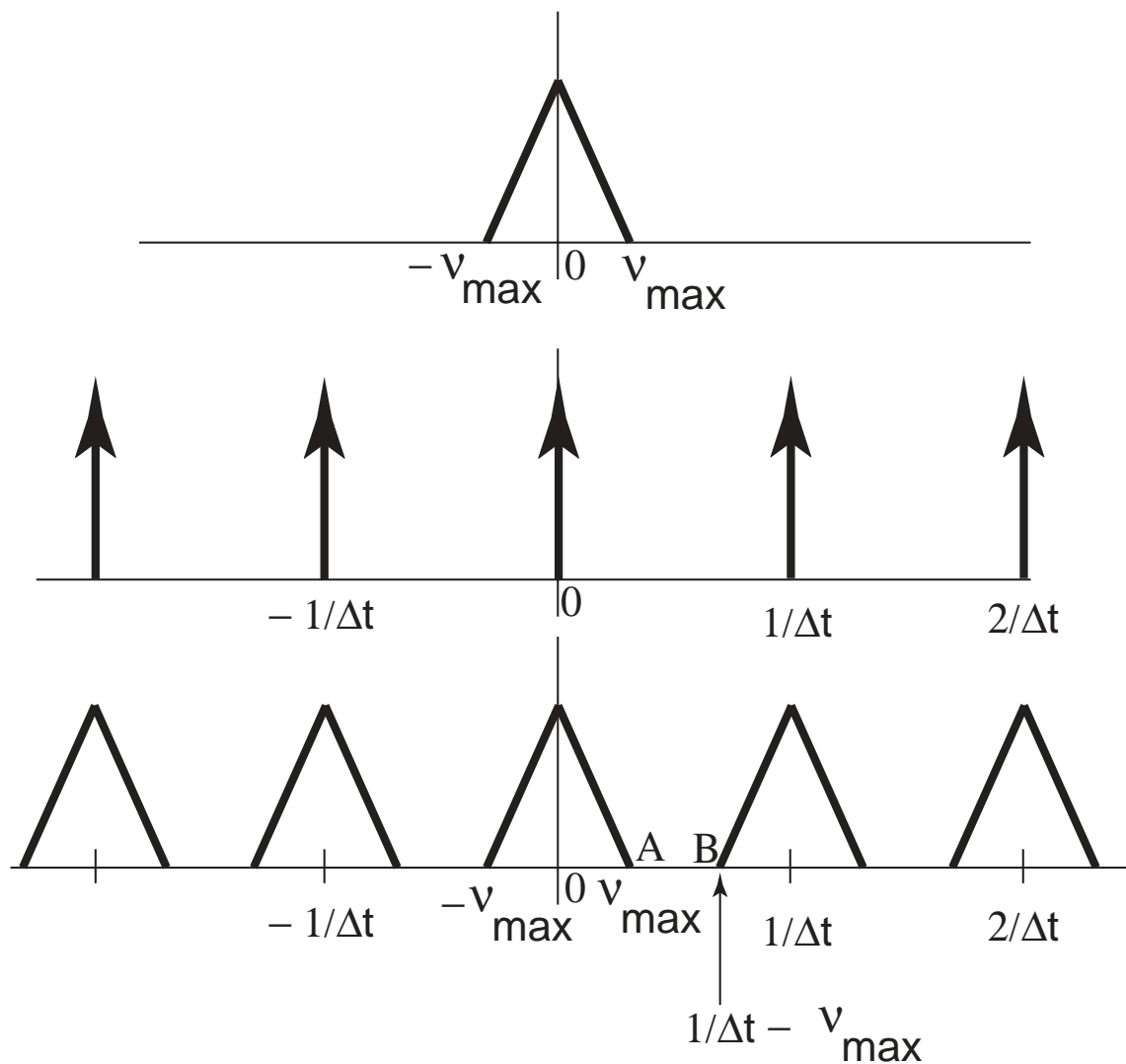


Figura 4.5: Conservación del espectro: condición de Shannon **Arriba**: espectro de la función temporal. Este espectro es acotado, no tiene frecuencias más allá de la frecuencia máxima ν_{max} .

Medio: Peineta de Dirac frecuencial que es la transformada de Fourier de la peineta de Dirac temporal que sirvo a muestrear la función en tiempo.

Abajo: periodización del espectro frecuencial (convolución del grafico de arriba por el del medio): A y B están bien separados: los espectros no se recubren y regresan hacia 0 todos. No hay aliasing=la función temporal esta bien muestreada (que se ve mejor en el dominio de las frecuencias) el Δt es suficientemente pequeño para representar sufisientemente bien la función temporal.

$$\nu_N = \frac{1}{2\Delta t}.$$

Debemos tener:

$$\nu_N > \nu_{max}$$

Eso significa que una señal continua puede ser reconstruida a partir de los valores muestreadas solamente si el contenido frecuencial de la señal no contiene energía arriba de la frecuencia de Nyquist. Si no es así (es decir si $\nu_{max} > \nu_N$), tendremos que aplicar un filtro **anti-aliasing** a la señal original para cortar todas las frecuencias más arriba de la frecuencia de Nyquist (en un sistema de adquisición es importante porque a priori no conocemos el espectro de la señal que el instrumento va a grabar).

Notan que NO se puede usar la frecuencia de Shannon como límite, la relación es un ' $<$ ' y no un ' \leq '. Por ejemplo, si se toma la función $\sin(2t/\Delta t)$ muestreada a la frecuencia de Shannon es decir con 2 puntos por periodo a partir de $t = 0$, todos los muestreos son nulos, que nunca podrá representar correctamente un seno!

¿De donde viene este factor 2?

El espectro $F(\nu)$ es acotado, o sea es nulo para frecuencias superior a una frecuencia máxima ν_{max} y nulo tambien para frecuencias inferior a $-\nu_{max}$. En la figura 4.5, los espectros no se cubren cuando A y B estan bien separados: se conserva así la forma del espectro original con el proceso de periodización del espectro (resultado del muestreo en tiempo). Eso es satisfecho cuando:

$$\frac{1}{\Delta t} - \nu_{max} > \nu_{max}$$

$$\nu_{max} < \frac{1}{2\Delta t}$$

o sea:

$$\Delta t < \frac{1}{2\nu_{max}}$$

que es efectivamente la condición de muestreo en el tiempo (Δt es la tasa de muestreo temporal).

En resumen, el hecho que los espectros no se recubren es muy importante, porque eso asegura que con un proceso inverso (pasar del espectro a la señal temporal) podremos recuperar la función inicial en el tiempo sin distorsión (para eso tomaremos solamente un espectro elemental del espectro periódico, y haciendo una TF inversa podremos recuperar la función inicial).

4.1.4. Mal muestreo temporal: No conservación del espectro i.e bajo-muestreo i.e fenómeno de aliasing

Se entiende muy bien que si los espectros se recubren, el espectro total será distorsionado y será imposible recuperar la función inicial porque ya se ha perdido la forma exacta del espectro inicial, y no hay como recuperarlo después (Figura 4.6). En este caso, el espectro no regresa a 0.

Si muestreamos en tiempo, usamos una peineta de Dirac. Si muestreamos en tiempo con muchos puntos, los Dirac de la peineta de muestreo temporal van a estar muy cercanos en tiempo, y por lo tanto muy separados en frecuencia (la TF de una peineta de Dirac es una peineta de Dirac, de espacio el inverso del espacio en tiempo). Como muestrear en tiempo es multiplicar por una peineta de Dirac, en frecuencia es hacer la convolución con la TF de la peineta de Dirac (que es una peineta de Dirac) y ya sabemos que esta convolución equivale a una periodización. A cada Dirac en frecuencia se coloca entonces el espectro de la función y si los Dirac en frecuencia están muy separados, los espectros también van a estar muy separados y no vamos a tener recubrimientos de los espectros, no vamos a tener aliasing, o sea la función será suficientemente muestreada en tiempo. Al revés, si tomamos pocos puntos en tiempo para muestrear la función temporal, los Dirac de la peineta de muestreo temporal serán muy separados en tiempo, o sea muy cercanos en frecuencia, así los espectros periodizados de la función se van a traslapar y así vamos a tener aliasing (Figura 4.6). La función en tiempo fue insuficientemente muestreada (con pocos puntos), y será imposible deducir de estos pocos puntos temporales la forma exacta de la función porque durante el proceso de periodización del espectro, el espectro se ha deformado, es decir en tiempo la función igual ha cambiado, así que será imposible volver a dibujarla de manera exacta. El efecto de 'aliasing' destruye el espectro de la función inicial. Es por eso que es mejor sobre-muestrear una función que sub-muestrearla, porque en el último caso se pierde para siempre la información de la función original.

Notan que cuando los espectros se traslapan, no regresan a 0, la suma de los espectros que quedan como 'colgados', trasladados verticalmente así que el espectro ya no está más acotado.

Vamos a mostrar dos ejemplos donde la función en tiempo está mal muestreada: en este caso no se puede reconocer el espectro base de la función bien muestreada: los espectros de una función mal muestreada en tiempo se recubren y así es imposible reconocer el espectro de la función inicial.

Ejemplo real con Matlab:

Entonces, cuando vamos a reconstruir la función, que vamos a llamar $f_r(t)$, a partir de los muestreos en número insuficiente, no vamos a tener la misma función que la función

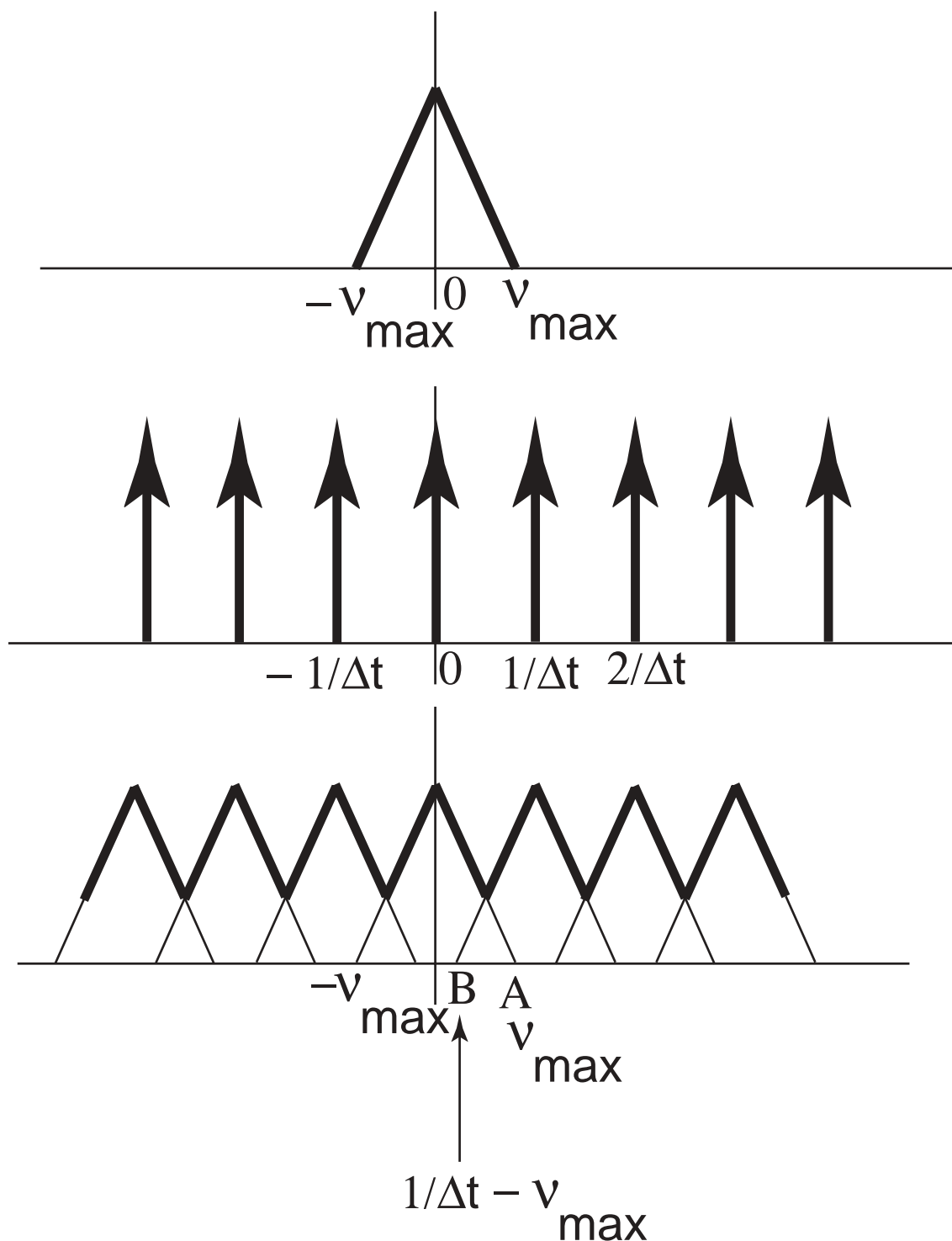


Figura 4.6: No conservación del espectro: fenómeno de aliasing:

Arriba: espectro de la función temporal. Este espectro es acotado, no tiene frecuencias más allá de la frecuencia máxima ν_{\max} .

Medio: Peineta de Dirac frecuencial que es la transformada de Fourier de la peineta de Dirac temporal que sirvo a muestrear la función en tiempo.

Abajo: periodización del espectro frecuencial (convolución del grafico de arriba por el del medio): A y B se cruzaron: no están bien separados: los espectros se recubren. Hay aliasing=la función temporal esta mal muestreada (que se ve mejor en el dominio de las frecuencias): el Δt fue demasiado grande. Los espectros ya no bajan hacia 0. N.B. Cuando A y B se cruzan, no se ven bien separados (justo cuando la frecuencia de muestreo es demasiado baja), hay aliasing.

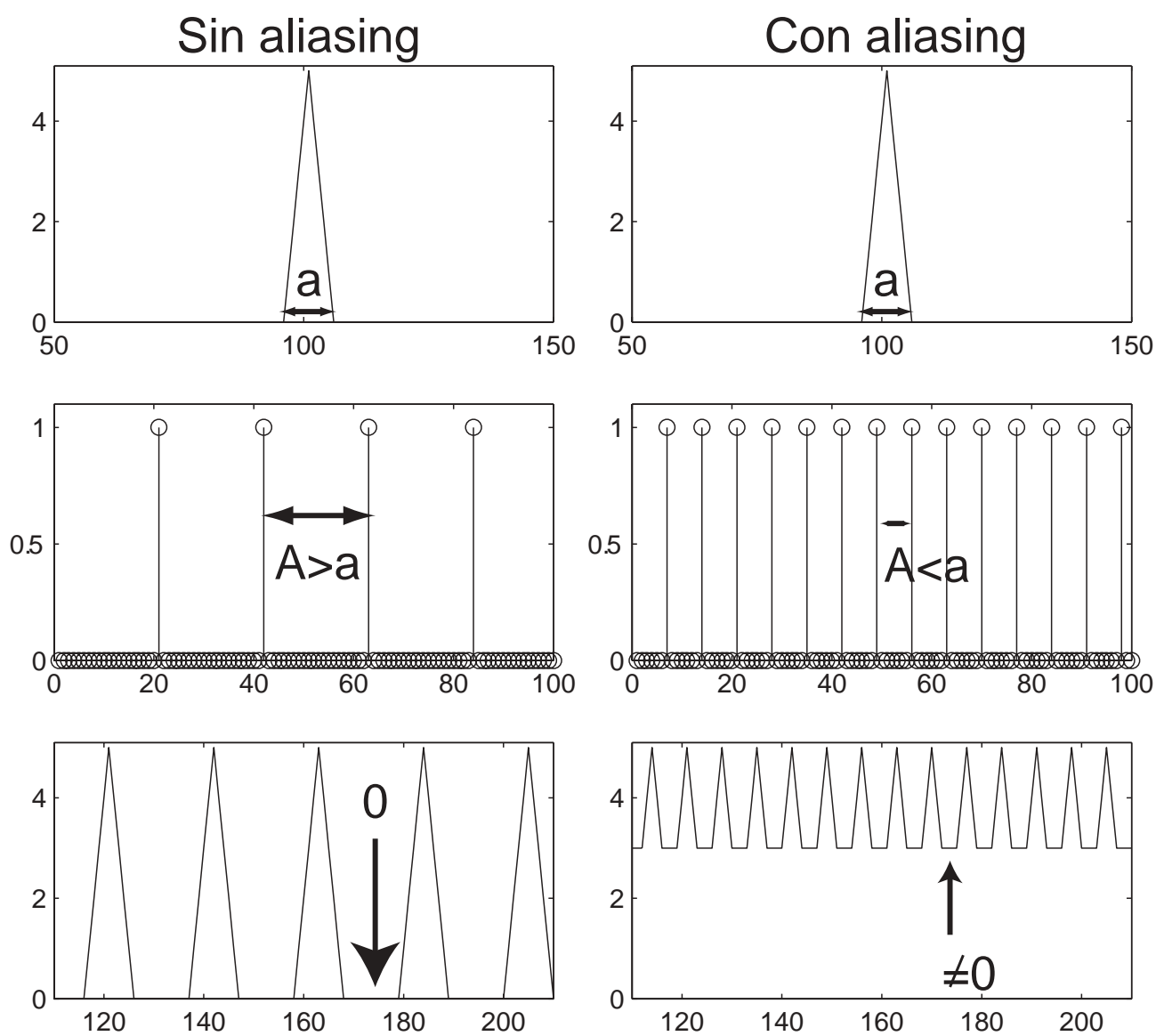


Figura 4.7: Espectros ...

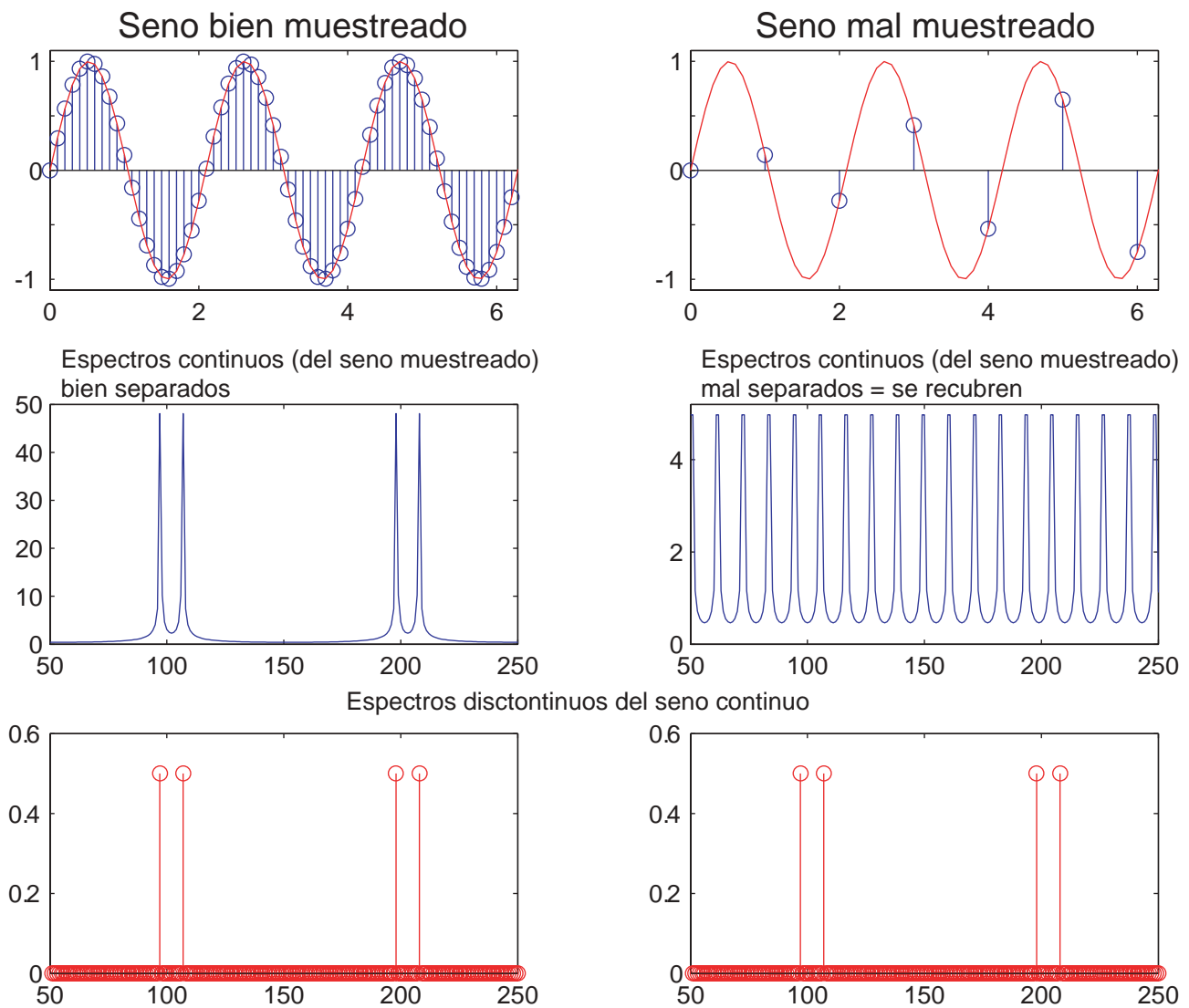


Figura 4.8: Espectros ...

continua $f(t)$ inicial, pero la señal reconstruida usando una interpolación de Shannon sera igual a la función continua solamente en los instantes de muestreo $n\Delta t$, o sea:

$$f_r(n\Delta t) = f(n\Delta t)$$

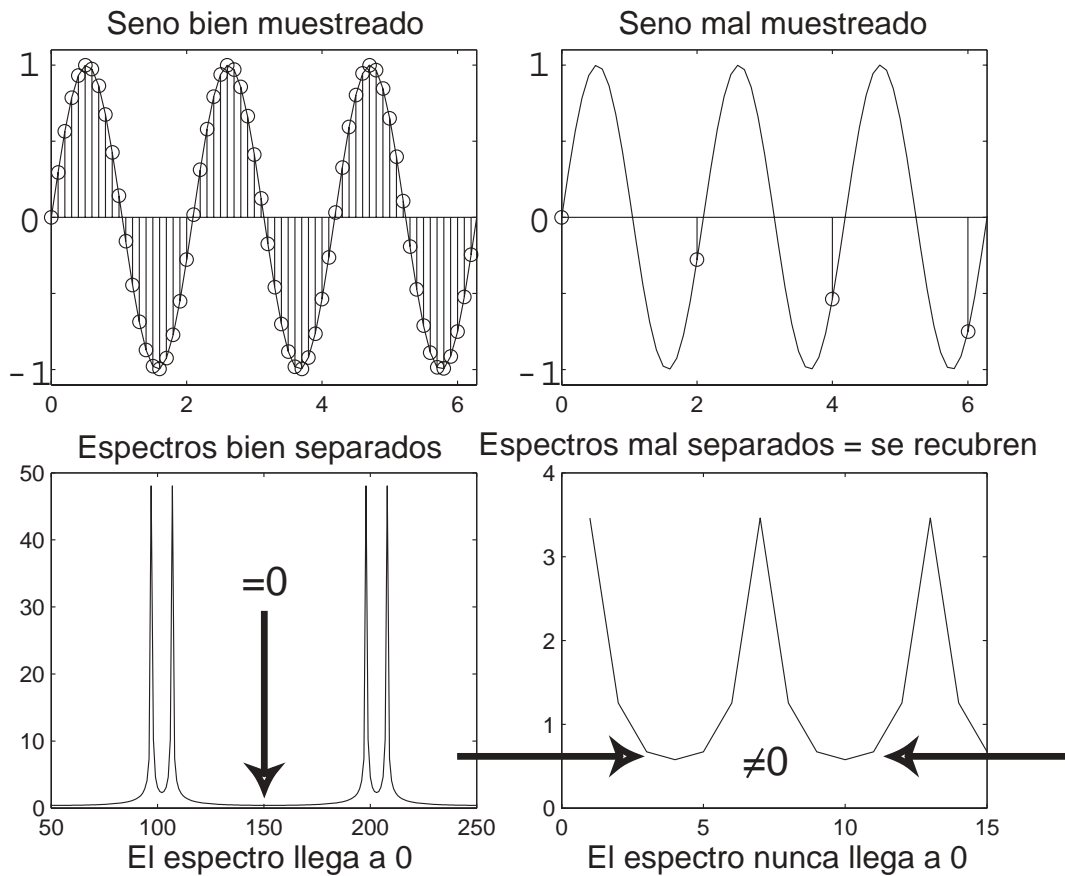


Figura 4.9: Espectros ...

4.1.5. Como pasar de una función muestreada a una función continua: Formula de interpolación de Shannon

La idea ahora es la siguiente: una vez que hemos muestreado una función, ¿como reconstruir la función temporal inicial a partir de los muestreos obtenidos? Podríamos tomar muchos puntos en tiempo y hacer una interpolación lineal entre estos puntos. Pero eso necesitaría tomar muchísimos puntos y vamos a ver que no es necesario. Además necesita memoria grande para guardar toda esta información.

Eso no se hace con una interpolación lineal entre los puntos muestreados. Se hace de la manera siguiente: El simple hecho de muestrear una función continua va a introducir una periodización del espectro. Eso es un poco problemático porque vamos a tener un espectro diferente del espectro de la función original. Como debemos tener el mismo espectro que la función inicial, se selecciona solamente la parte del espectro correspondiendo al espectro de la función continua (i.e un periodo del espectro periodizado). Para eso, vamos a multiplicar el espectro de la función muestreada por una ventana puerta (filtro paso bajo) para seleccionar un periodo que es el espectro de la función continua inicial.

Haciendo eso, aparece un sinus cardinal en tiempo, es decir que la interpolación de los Dirac de muestreos de la función muestreada serán interpolados con la suma de funciones sinus cardinal (ver todo en detalles más adelante).

Vimos que muestrear una función temporal periodiza 'artificialmente' el espectro. Si queremos regresar a la función temporal inicial a partir de los muestreos, debemos 'de-periodizar' el espectro, o sea seleccionar solamente la parte que no interesa, es decir cortar un solo espectro (él que corresponde a la función continua) y no tomarlos todos. 'Cortar' se llama 'filtrar' en el tratamiento de señales. Para eso, vamos a ver que tenemos que usar un filtro baso bajo con una frecuencia de corte más grande que la frecuencia máxima ν_{max} y más pequeña que $\frac{1}{\Delta t} - \nu_{max}$. La razón es así seleccionar justo el espectro de la función temporal continua inicial (la periodización del espectro era solamente el efecto del muestreo temporal). Eso se ve muy bien en la figura 4.10. La transformada inversa de este espectro cortado será exactamente $f(t)$.

Sea una función inicial $f(t)$ continua. La muestreamos. Tenemos el espectro de esta función muestreada (figura 4.10 arriba), que es periódico. Si multiplicamos este espectro por un filtro paso bajo 'ideal' (puerta) (figura 4.10 medio) con una frecuencia de corte ν_f que esta entre los puntos A y B (es decir $\nu_{max} < \nu_f < \frac{1}{\Delta t} - \nu_{max}$), tenemos como resultado el espectro de la función original $f(t)$ continua. Tomando una transformada inversa de este espectro, regresamos a la función temporal inicial $f(t)$ continua. Pero vamos a introducir un sinus cardinal, porque la TF^{-1} de una puerta es un sinus cardinal.

Vamos a ver ahora como escribirlo.

Sea una función $f(t)$ de TF de soporte acotado. Muestreamos esta función $f(t)$ respectando la condición de Shannon. En este caso, es posible pasar de la función muestreada en tiempo a la función continua en tiempo. Encontramos $F(\nu)$ a partir del espectro periodizado, multiplicando el espectro periodizado por una puerta centrada en 0, de ancho $2\nu_f$, tal que $\nu_{max} < \nu_f < \frac{1}{\Delta t} - \nu_{max}$, o sea de la manera que el ancho de la puerta sea más grande que $2N$, (ver figura 4.10) o sea:

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\left(\nu - \frac{n}{\Delta t}\right) \cdot \Pi_{2\nu_f}(\nu)$$

Tomando la TF^{-1} , regresamos a la función continua:

$$TF^{-1}[F(\nu)] = TF^{-1}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\left(\nu - \frac{n}{\Delta t}\right) \cdot \Pi_{2\nu_f}(\nu)\right]$$

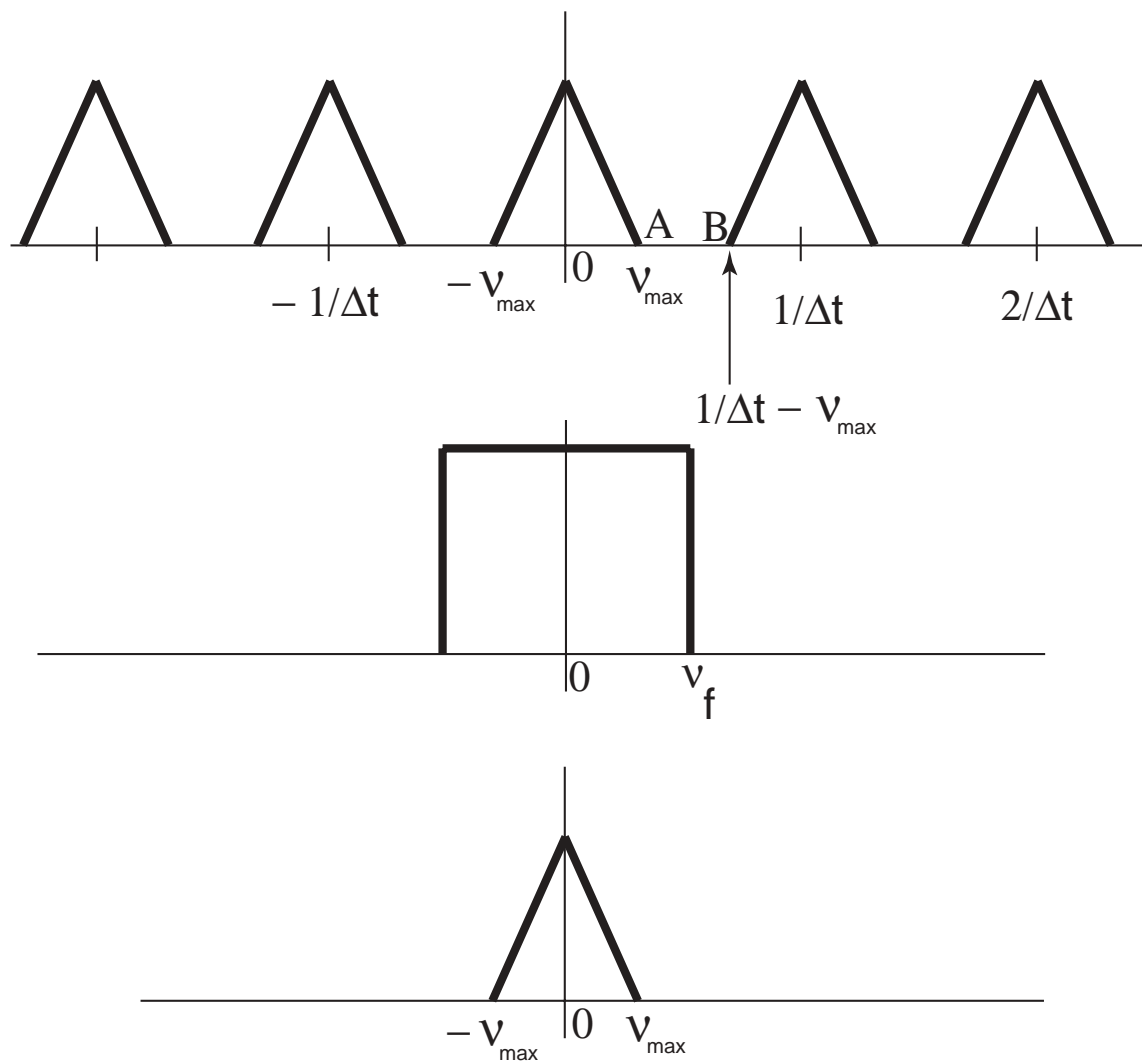


Figura 4.10: Paso para la interpolación de Shannon

$$f(t) = TF^{-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F \left(\nu - \frac{n}{\Delta t} \right) \right] * TF^{-1} [\Pi_{2\nu_f}(\nu)]$$

Pero ya vimos que:

$$TF \left[\tilde{f}(t_n) \right] = TF [f(t) \cdot \delta_{\Delta t}(t)] = F(\nu) * \frac{1}{\Delta t} \delta_{1/\Delta t}(\nu) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F \left(\nu - \frac{n}{\Delta t} \right)$$

entonces:

$$f(t) = TF^{-1} [\Delta t TF [f(t) \cdot \delta_{\Delta t}(t)]] * TF^{-1} [\Pi_{2\nu_f}(\nu)]$$

$$f(t) = \Delta t [f(t) \cdot \delta_{\Delta t}(t)] * 2\nu_f \sin_c(2\pi \nu_f t)$$

$$f(t) = \Delta t \left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(t) \cdot \delta(t - n\Delta t) \right] * 2\nu_f \cdot \sin_c(2\pi \nu_f t)$$

Usando la definición de un producto de convolución:

$$f(t) = \Delta t \cdot 2\nu_f \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) \cdot \delta(t-s-n\Delta t) \cdot \sin_c(2\pi \nu_f s) ds$$

La integral es nula para $t-s-n\Delta t \neq 0$ y entonces, usando la propiedad del Dirac:

$$f(t) = \Delta t \cdot 2\nu_f \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n\Delta t) \cdot \sin_c[2\pi \nu_f (t - n\Delta t)]$$

Esta formula permite pasar de los muestreos $f(n\Delta t)$ a la función continua $f(t)$ haciendo una interpolación con senos cardinales.

Seleccionar el espectro $F(\nu)$ en frecuencia equivale a interpolar en el tiempo, o sea filtrar en frecuencia equivale a interpolar en tiempo.

Es la formula de interpolación de Shannon.

Podemos encontrar toda la información de una función temporal inicial si no existe energía para frecuencias mas alla de la frecuencia de Nyquist: ν_N .

4.2. Muestreo temporal real imperfecto de una función continua: periodización con atenuación del espectro

Pero nada es perfecto en este mundo. Hacer una medida que toma un tiempo cero (como lo habia supuesto en el paragrafo anterior, considerando una peiqueta de Dirac) es imposible. Vamos a ver el caso real cuando la medida toma un tiempo τ . Vimos que cuando se muestrea una función, su espectro es automaticamente periódico: es una repetición del espectro 'base' de la función original continua. Vamos a mostrar que cuando el muestreo dura un tiempo τ pequeño, este espectro resultante va a perder un poco su caracter periódico, en el sentido que los espectros no se van a repetir iguales, sino cada vez con una amplitud un poquito más pequeño: la amplitud de estos espectros va a disminuir cuando la frecuencia va aumentar, siguiendo una envuelve en sinus cardinal : $\text{sin}_c(n\pi d)$, con $d = \tau/\Delta t$. Cuando el tiempo de las medidas τ tiende a cero (regresamos al caso de un muestreo ideal con una peiqueta de Dirac), vemos que la atenuación de los espectros con la frecuencia tiende tambien a cero (los espectros se quedan con una amplitud constante cuando la frecuencia aumenta). Comparar las dos figuras xx y xx.

Eso significa que el hecho de hacer una medida (que dura un tiempo τ) va a deformar la señal original. El hecho de hacer una medida modifica lo que medimos de manera irreversible. Entonces es imposible medir la realidad como es. Triste realidad. Por eso hay que hacer mucho cuidado porque es imposible de ver la realidad como es (no solamente todo tipo de instrumento, el ser humano incluido, es una especie de filtro, que por definición modifica la realidad sino tambien que con un laps de tiempo de medidad muy pequeño, pero que siempre existe, va a modificar la señal que queremos medir).

Cuando el tiempo de las medidas τ no es nulo (en esta figura, $\tau = 0,1$, taza de muestreo=0.01, $\text{sin}(3t)$), el espectro de la función muestreada es la repetición del espectro de la función continua pero con una disminución de su amplitud cuando la frecuencia aumenta.

FIGURA

Cuando el tiempo de las medidas τ tiende a cero (en esta figura, $\tau = 0,01$ = taza de

muestreo, $\sin(5t)$), el espectro de la función muestreada es la repetición del espectro de la función continua sin disminución de su amplitud cuando la frecuencia aumenta.

FIGURA

4.3. Muestreo frecuencial (de la TF): periodización de la función temporal

De igual manera que en el dominio del tiempo habíamos muestreado una señal acotada, el muestreo de la TF en el dominio de las frecuencias, se puede hacer con una tasa de muestreo:

$$\Delta\nu = \frac{1}{D} = \frac{1}{N \Delta t}$$

(donde D es la duración de la señal, N es el número de puntos de la señal finita temporal).

Va a inducir una periodización en tiempo, de periodo D .

El muestreo de la TF implica una periodización en tiempo.

Se puede reconstruir una señal acotada en el tiempo a partir de muestreos en el dominio de las frecuencias: para mostrar eso, vamos a muestrear un espectro continuo.

El espectro muestreado sera:

$$\tilde{F}(\nu_n) = F(\nu) \cdot \delta_{\Delta\nu}(\nu)$$

con

$$\delta_{\Delta\nu}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu - n\Delta\nu)$$

o sea:

$$\tilde{F}(\nu_n) = F(\nu) \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu - n\Delta\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(n\Delta\nu) \cdot \delta(\nu - n\Delta\nu)$$

Integrando sobre todo el espacio, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \cdot \delta_{\Delta\nu}(\nu) d\nu = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(n\Delta\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tilde{F}(\nu_n)$$

La transformada de Fourier inversa de un espectro muestreado periodiza la función temporal.

Entonces, no existen señales limitados en tiempo y en frecuencia al mismo tiempo. Siempre tendremos una aproximación al menos en uno de los dos dominios.

mettre ca plus loin, ca c est la TFD...

Una periodización en el tiempo introduce un muestreo en frecuencia.

Eso revela una vez más la relación entre los espacios duales de los tiempos y de las frecuencias.

En resumen, ¿porque al muestrear en tiempo va a periodisar en frecuencia y vice versa? Muestrear en tiempo significa introducir una regularidad, una repetibilidad, que de un modo debemos encontrar en frecuencia, y que se traduce por una repitidividad, una repitibilidad (una periodización). Matematicamente eso viene del hecho que la TF de una peineta de Dirac es una peineta de Dirac. Pero eso no es tan evidente, porque la TF de un Dirac es una constante, en cambio la TF de una peineta de Dirac es una peineta de Dirac... Les dejo pensar en todo eso...

Capítulo 5

Transformadas en z de una función muestreada: TZ

Existen dos tipos de transformadas en z . Una que se llama transformada **bilateral** (porque esta definida como una sumatoria entre $-\infty$ y ∞), y otra que es **unilateral** (porque esta definida como una sumatoria entre 0 y ∞). La transformada bilateral corresponde al equivalente de una transformada de Fourier que es la integral entre $-\infty$ y ∞ . La transformada unilateral corresponde al equivalente de una transformada de Laplace que es definida como una integral entre 0 y ∞ . Veremos también que la transformada unilateral sirve para señales causales, o sea definidas entre 0 y ∞ , es por estas razones que se definen estas dos transformadas en z (uni y bilaterales). Vamos a dar muchas definiciones para transformadas en z unilateral, pero se puede extender para señales no causal (usando transformadas bilaterales).

Vamos a empezar a introducir la transformada en z porque es una buena introducción del problema de la transformada de Fourier discreta.

5.1. Definiciones

Una transformada en z se aplica sobre sistemas de tiempos discretos, regularmente espaciados, o sea típicamente para una señal a muestreada con una tasa de muestreo constante, como un sismógrafo conocido a intervalos temporales constantes o de un corte gravimétrico o magnético hechos a intervalos espaciales regulares.

Estos valores provienen de medidas hechas en intervalos regulares.

Vamos a notar $a(n) = a_n$ estos valores.

5.1.1. Transformada en z bilateral

La transformada en z bilateral de una señal a tiempos discretos $a(n)$ se nota $A(z)$ es una sumatoria entre $-\infty$ y ∞ .

$$A(z) = TZ[a(n)]$$

con

$$\begin{cases} a(n) = a(n\Delta t) & \text{para } n \in \mathbb{N} \\ a(n) = 0 & \text{en otras partes} \end{cases}$$

Su definición es:

$$A(z) = TZ[a(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) \cdot z^n \quad (5.1)$$

N.B. Cuidado, existen algunas definiciones con z^{-n} , es decir que se puede también escribir como:

$$A(z) = TZ[a(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) \cdot z^{-n}$$

5.1.2. Transformada en z unilateral

La transformada en z unilateral de una señal a tiempos discretos $a(n)$ se nota $A(z)$ es una sumatoria entre 0 y ∞ .

$$A(z) = TZ[a(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot z^n \quad (5.2)$$

N.B. Cuidado, existen algunas definiciones con z^{-n} .

$$A(z) = TZ[a(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot z^{-n}$$

5.2. Transformada en z unilateral de una función muestreada definida en N puntos

Para señales causales (que existen solamente para tiempo positivos), vamos a usar transformada en z unilateral.

Eso significa que conocemos los valores de a solamente en N puntos, a partir de 0.

$$\{a\} = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$$

o sea:

$$A(z) = TZ[a(n)] = a_0 + a_1.z + a_2.z^2 + \dots + a_{N-1}.z^{N-1}$$

Una transformada en z es simplemente un polinomio de variable compleja z , usando los coeficientes de la serie de tiempo a_n como coeficientes.

La transformada en z inversa TZ^{-1} se nota:

$$a(n) = TZ^{-1}[A(z)]$$

5.3. Ejemplo: salida de un instrumento de una señal en z^n

Por ejemplo, suponemos que tenemos una señal de entrada (input) de la forma $x(n) = z^n$ en un sistema (por ejemplo un sismómetro) de repuesta impulsional $g(n)$, tenemos la salida (output) del sistema que es la convolución de la entrada por la repuesta instrumental, o sea:

$$\begin{aligned} y(n) = g(n) * x(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k).x(n-k) \\ y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k).z^{n-k} \end{aligned}$$

donde $*$ es el producto de convolución.

Entonces vemos que la salida $y(n)$ es de la misma forma que la entrada $x(n) = z^n$ multiplicado por una constante que depende del valor z , o sea:

$$y(n) = G(z).z^n = G(z).x(n)$$

donde:

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k).z^{-k}$$

$G(z)$ es el valor propio asociado a la función propia z^n . Si $z = e^{i\omega}$, es decir si $|z| = 1$, veremos que $G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k).z^{-k}$ corresponde a la

transformada de Fourier discreta en tiempo:

$$G(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k).e^{-2i\pi\nu k} \quad (5.3)$$

Si $|z| \neq 1$ se llama transformada en z .

De manera más general, si la **entrada** es una combinación lineal de exponencial compleja, o sea si:

$$x(n) = \sum_k a(k).z_k^n$$

la **salida** será:

$$y(n) = \sum_k a(k).G(z_k).z_k^n$$

es decir la salida será también una combinación lineal de las mismas señales exponencial complejas, y cada coeficiente es obtenido como el producto del coeficiente correspondiente a_k de la señal de entrada y los valores propios $G(z_k)$ asociados a las funciones propias z_k^n .

5.4. Propiedades

Vamos a considerar operaciones sobre la transformadas en z y no directamente en los señales. Toda operación sobre una transformada en z tiene su equivalente en la serie de tiempo asociada. Vamos a dar algunos ejemplos.

5.4.1. Multiplicar por z : atraso en tiempo de Δt

Multiplicando la $TZ[a(n)]$ por z , tenemos:

$$z.A(z) = a_0.z + a_1.z^2 + a_2.z^3 + \dots + a_{N-1}.z^N$$

esta nueva transformada en z corresponde a la serie temporal:

$$\{a_+\} = 0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$$

que es la función f original trasladada de 1 en tiempo (atraso), es decir atrasada de un intervalo Δt .

De igual manera, multiplicar una TZ por z^k equivale en tiempo a trasladar la función temporal de $k.\Delta t$
 z se llama el **operador** de traslado unitario.

5.4.2. Multiplicación de dos TZ : convolución discreta

Muchos procesos físicos pueden ser considerados como la salida de un sistema lineal (que se puede considerar como un filtro) y veremos que esa salida corresponde a multiplicar la transformada en z de una serie de tiempo (la entrada de la señal) por otra transformada en z (el filtro o el sistema por el cual pasa la señal de entrada). Por ejemplo, el efecto de un instrumento: la salida de un sismómetro es diferente del movimiento real del suelo. En realidad, la salida del sismómetro consiste en multiplicar la transformada en z del movimiento del suelo por otra transformada en z que describe el sismómetro. Es imposible construir un instrumento que grave exactamente el movimiento del suelo. Toda medida, todo instrumento deforma la señal real (ver capítulo 3 y 4).

Vamos a ver que significa multiplicar dos TZ : $A(z)$ y $B(z)$:

$$C(z) = A(z).B(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k.z^k \cdot \sum_{l=0}^{M-1} b_l.z^l$$

Para encontrar a que serie de tiempo corresponde esta transformada en z , debemos escribirla como un polinomio y encontrar el término general. Sea $p = k + l$, tenemos $l = p - k$, o sea:

$$C(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} a_k.b_l.z^{k+l} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=k}^{k+M-1} a_k.b_{p-k}.z^p = \sum_{p=0}^{N+M-2} \sum_{k=0}^p a_k.b_{p-k}.z^p$$

eso es simplemente la transformada en z de la secuencia temporal:

$$c_p = \sum_{k=0}^p a_k.b_{p-k}$$

que es la convolución temporal de $\{a\}$ con $\{b\}$, de largo $N + M - 1$, o sea uno menos que la suma de las longitudes de las dos series temporales.

Muchas veces, se nota este producto de convolución: $c = a * b$.

Entonces **multiplicar dos TZ equivale a hacer una convolución temporal discreta.**

$\begin{aligned} a(n) &\leftrightarrow A(z) \\ b(n) &\leftrightarrow B(z) \\ a(n) * b(n) &\leftrightarrow A(z).B(z) \end{aligned}$
--

Ejemplo: $a = 1, 2, 3, 1, 2$ $b = 1, 3, 5, 7$

Tenemos $a * b = 1, 5, 14, 27, 34, 32, 17, 14$

El producto de convolución se puede también escribir:

$$a(n) * b(n) = \sum_{m=0}^{N-1} a(m).b(n-m) \quad (5.4)$$

Una manera grafica para calcular tal producto de convolución, es escribir a con índices crecientes hacia la derecha, y b hacia la izquierda, trasladar b y sumar los productos de los índices que se corresponden cada vez (Figura 5.1). El elemento c_p se encuentra cuando el b_0 se alinea con el a_p

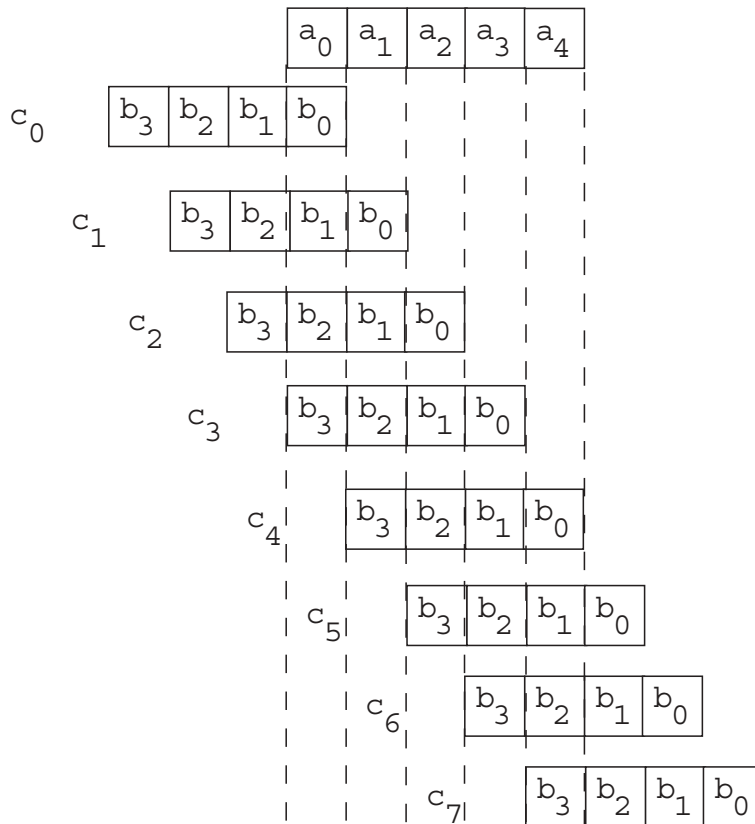


Figura 5.1: Convolución gráfica de 2 señales muestreadas a y b : se mantiene a fijo, y se hace bajar b de uno: se multiplica todos los terminos que están de frente y se suma todo, después de hacer bajar b de uno más hacia la derecha e igual, se suma los productos de los números que se alinean etc...

5.4.3. División de una TZ por otra TZ : deconvolución discreta

Vimos que multiplicar dos TZ correspondía a hacer una convolución. Dividir será hacer una **deconvolución**.

Teníamos:

$$C(z) = A(z).B(z)$$

así que tenemos:

$$B(z) = C(z)/A(z)$$

Podemos conocer el primer término:

$$b_0 = c_0/a_0$$

Conociendo b_0 , podemos deducir el b_1 :

$$b_1 = (c_1 - a_1 b_0)/a_0$$

y así poco a poco tenemos:

$$b_p = (c_p - \sum_{k=1}^p a_k b_{p-k})/a_0$$

Entonces una deconvolución es imposible cuando $a_0 = 0$.

Como $B(z) = C(z)/A(z)$, una deconvolución es imposible cuando $A(z) = 0$.

Vamos a ver más detalles sobre la convolución en el parágrafo xx.

5.4.4. Repuesta instrumental: Función de transferencia: los polos y ceros

Podemos generalizar eso como una fracción racional de dos polinomios:

$$r(z) = A(z)/B(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{N-1})}{(z - p_0)(z - p_1) \cdots (z - p_{N-1})} \quad (5.5)$$

donde z_k son los ceros y p_k son los polos de $r(z)$.

Eso puede traducir la relación entre la salida de un sismómetro y el movimiento del suelo, mediante la respuesta instrumental.

Todo polinomio se puede descomponer así, en particular una transformada en z .

En el plano complejo, la presencia de un cero o de un polo cerca del círculo unitario a la frecuencia correspondiendo a los ceros o polos representan respectivamente un mínimo o un máximo del modulo de la TZ . Cada término en polos o ceros es un filtro.

Los **ceros** producen **atenuación** a la frecuencia correspondiente.
 Los **polos** producen **amplificación** de la frecuencia correspondiente.

Un sismómetro ideal seria tal que $r(z) = 1$, es decir que la salida del sismómetro seria exactamente el movimiento del suelo. Algunos sismómetros tienen una respuesta instrumental muy simple.

Es una serie que converge afuera del círculo $|z| > R$. El rayo R se llama el rayo de convergencia absoluta. Eso hace recordar la definición de una transformada de Laplace.

La **transformada de Laplace TL** de a es:

$$A(s) = TL[a(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n.\Delta t} e^{-n\Delta t.s} \quad (5.6)$$

Entonces tenemos:

$$A(z) = [A(s)]_{z=e^{s\Delta t}} \quad (5.7)$$

La relación entre s y z es:

$$z = e^{s\Delta t}$$

y

$$s = \frac{1}{\Delta t} \ln(z)$$

Estas transformaciones son importantes, porque permiten pasar de una descripción de un semi-espacio en el plano ' s ' a un círculo en el plano ' z '. Un número infinito de valores en el plano ' s ' corresponden a un solo valor en el plano ' z '.

Capítulo 6

Transformada de Fourier discreta: TFD

La Transformada de Fourier Discreta (TFD) es la discretización de la transformada de Fourier continua. Es una herramienta fundamental para estudiar datos discretos, con computadoras. Se puede ver como un caso particular de una transformada en z .

6.1. Transformada de Fourier discreta: TFD

Recordamos que una señal analógica esta determinada para todo tiempo (en este caso, el tiempo es una variable continua) mientras que una señal a tiempo discreto esta determinada solamente a los instantes de muestreos $t_n = n \cdot \Delta t$, múltiples enteros de la tasa de muestreo Δt . Los valores que toma esta señal a estos tiempos discretos $n \cdot \Delta t$ se notan $f(n)$ y se llaman muestreos.

Vamos a definir la Transformada de Fourier Discreta TFD como la TF de una señal muestreada en tiempo, y después esta transformada, que es una función continua respecto con la frecuencia, será también muestreada en frecuencia. Es esta TF muestreada en frecuencia que se llama una **Transformada de Fourier Discreta**.

6.1.1. Transformada de Fourier discreta directa: TFD

La **Transformada de Fourier Discreta (TFD)** se calcula con **un número finito de valores de tiempos** N_t y por un número finito de valores de frecuencias N_ν .

Ojo, para el N debemos poner un índice t cuando estamos en el dominio del tiempo y un índice ν cuando estamos en el dominio de las frecuencias, porque vamos discretizar las frecuencias.

La *TF* de una señal muestreada en tiempo es una función continua respecto con la frecuencia. Porque vamos a trabajar en computadoras, será necesario discretizar también las frecuencias. Esta *TF* discretizada en frecuencia se llama la Transformada de Fourier Discreta: *TFD*.

La *TF* de una señal continua $a(t)$ es:

$$A(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

que se puede aproximar para una función muestreada con:

$$A(\nu) = \Delta t \sum_{n_t=0}^{N_t-1} a(n_t \Delta t) e^{-2i\pi\nu n \Delta t}$$

Cuidado a no olvidar el factor Δt . Podemos entonces ver esta Transformada de Fourier de una función muestreada en tiempo con una *TZ* de la manera siguiente:

$$A(n_\nu) = TFD[a(t_n)] = \Delta t TZ_{N_t}[a(n_t)] = \Delta t \sum_{n_t=0}^{N_t-1} a(n_t) \cdot e^{-2i\pi n_t \nu_n \Delta t} = \Delta t \sum_{n_t=0}^{N_t-1} a(n_t) \cdot e^{-2i\pi n_t n_\nu \Delta \nu \Delta t}$$

$$TFD[a(t_n)] = A(n_\nu) = \Delta t \sum_{n_t=0}^{N_t-1} a(n_t) \cdot e^{-2i\pi n_t n_\nu / N_t} \quad (6.1)$$

porque:

$$\Delta \nu \Delta t = \frac{1}{T} \Delta t = \frac{1}{N_t \Delta t} \Delta t$$

La **transformada de Fourier discreta** (*TFD*) de una función muestreada se puede ver también como **una transformada en z** , en el caso particular de un número N_t finito de puntos en tiempo y con:

$$z = e^{-i2\pi\nu\Delta t}$$

Como teniamos para una *TZ*:

$$A(z) = TZ[a(n_t)] = \sum_{n_t=0}^{\infty} a(n_t) \cdot z_t^n,$$

tenemos para un número finito N_t de puntos en tiempo:

$$TZ_{N_t}[a(n_t)] = \sum_{n_t=0}^{N_t-1} a(n_t) \cdot e^{-i2\pi\nu n_t \Delta t}$$

Es una serie de Fourier compleja, y es una función continua en ν . Vamos a **discretizar** también **la frecuencia** de la manera siguiente: de la misma manera que teníamos:

$$t_n = n_t \Delta t$$

vamos a definir:

$$\nu_n = n_\nu \Delta \nu$$

con:

$$\Delta \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{N_t \Delta t} \quad (6.2)$$

donde $T = N_t \Delta t$ es la duración total de la señal temporal.

Esta ecuación transforma los N_t valores de la serie temporal $f(n_t)$ en otra serie que son los N_ν coeficientes de la transformada de Fourier discreta. La *TFD* da valores a las frecuencias:

$$0, \Delta \nu, 2\Delta \nu, \dots, (N_\nu - 1)\Delta \nu$$

La segunda mitad de los valores representan frecuencias mayores a $N/2 \Delta \nu$, que es la frecuencia de Nyquist. Estos valores corresponden a la parte negativa de las frecuencia, trasladadas justo después la frecuencia de Nyquist (sabemos que el espectro es periódico). Por ejemplo, la frecuencia que sigue la frecuencia de Nyquist es:

$$(N/2 + 1)\Delta \nu = (N/2)\Delta \nu + \Delta \nu = \nu_{Nyquist} + \Delta \nu$$

$$-\nu_{Nyquist} + \Delta \nu = -(N/2 - 1)\Delta \nu$$

donde usamos el hecho que el espectro es periódico, de periodo $2\nu_{Nyquist}$. Cada frecuencia

muestreada corresponde a un incremento de $-\Delta\nu$. Entonces podemos considerar que la *TFD* da valores a las frecuencias:

$$0, \Delta\nu, 2\Delta\nu, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right)\Delta\nu, -\left(\frac{N}{2} - 1\right)\Delta\nu, \dots, -2\Delta\nu, -\Delta\nu$$

Es por eso que muchas veces, cuando se dibuja un espectro, solamente se representa el espectro entre las frecuencias 0 y la frecuencia de Nyquist $= \frac{N}{2}\Delta\nu$. La parte negativa del espectro no se dibuja. Tampoco la parte superior a la frecuencia de Nyquist. En teoría no debería haber energía para frecuencias superiores a la frecuencia de Nyquist, pero el hecho de discretizar la función en tiempo tiene como consecuencia (como 'artefacto', como 'algo artificial') una periodización del espectro, pero en realidad es la misma información repetida, y no significa que hay energía para frecuencias superiores a la frecuencia de Nyquist. Si una función continua tiene un espectro acotado, es decir que la señal tiene energía finita, o sea el espectro converge a cero más allá de una frecuencia máxima, es cierto que discretizando la función vamos a periodizar el espectro, pero no significa que el hecho de discretizar hace aparecer energía para frecuencias más grandes que la frecuencia máxima.

Los valores de z están uniformemente distribuidos en un círculo unitario en el plano complejo:

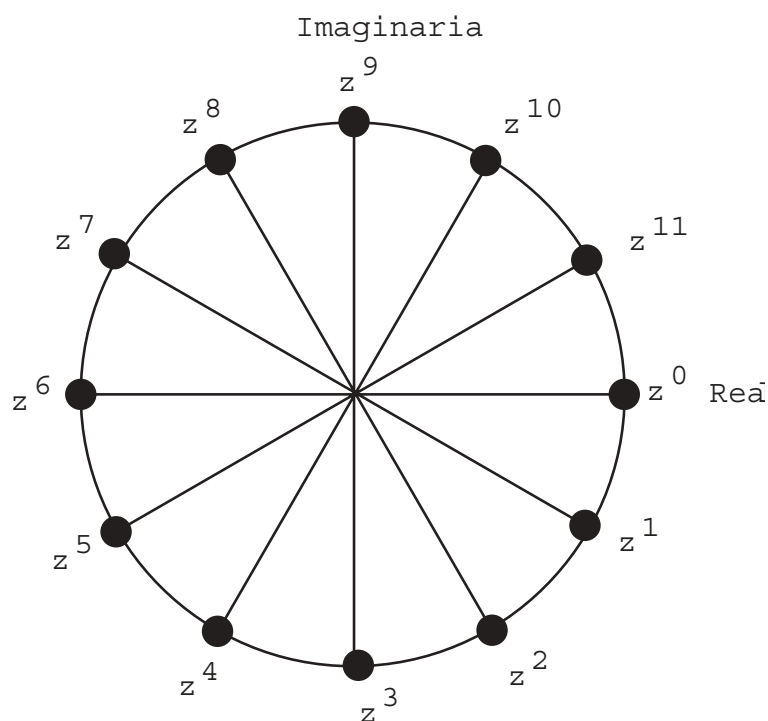


Figura 6.1: Distribución uniforme de los z -puntos en el círculo unitario. Los lugares discretizados de los puntos $z = e^{-2i\pi\nu\Delta t}$ distribuidos uniformemente en el círculo unitario porque $|z| = 1$. Aquí tenemos $2\pi\nu\Delta t = -\pi/12$.

6.1.2. Transformada de Fourier discreta inversa: TFD^{-1}

Para re-encontrar la serie temporal a partir de los coeficientes de Fourier, se define la transformada de Fourier discreta inversa.

La TF^{-1} de una señal continua $A(\nu)$ es:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

que se puede aproximar con:

$$a(n_t \Delta t) = \Delta\nu \sum_{n_\nu=0}^{N_\nu-1} A(n_\nu \Delta\nu) e^{2i\pi(n_\nu \Delta\nu)(n_t \Delta t)} = \Delta\nu \sum_{n_\nu=0}^{N_\nu-1} A(n_\nu \Delta\nu) e^{2i\pi n_\nu n_t \Delta t / N_\nu}$$

Cuidado a no olvidar el factor $\Delta\nu$.

$$a(n_t \Delta t) = TFD^{-1}[A(n_\nu \Delta\nu)] = \frac{1}{N_\nu \Delta t} \sum_{n_\nu=0}^{N_\nu-1} A(n_\nu \Delta\nu) e^{2i\pi n_\nu n_t / N_\nu} \quad (6.3)$$

La TFD^{-1} de la TFD da la señal original con la misma amplitud.

PERO CUIDADO, cada programa usado (Maple, Matlab, SAC ...) no tienen todos las mismas definiciones de la TFD y de sus inversos. Las definiciones pueden cambiar de un factor N_t o $\sqrt{N_t}$. Estos coeficientes están a veces en la definición de la transformada directa y no inversa. A veces los programas no hacen correcciones con el Δt . Hay que saber muy bien que definición toma el programa que van a usar. Igual con las definiciones de la TF (por ejemplo los signos a dentro de las exponenciales en la TF y TF^{-1} pueden ser inversas, según los autores). Cuidado, cuidado...

Vemos que el hecho de discretizar el espectro (en frecuencias de tasa de muestreo frecuencial $\Delta\nu$) implica que la serie temporal deducida de este espectro es periódica, de período: $\frac{1}{\Delta\nu} = N\Delta t = T$ donde T es la duración de la señal temporal inicial.

La función $A(n_\nu \Delta\nu)$ es periódica, es decir que después de $N_t + 1$ muestreos, tiene el mismo valor.

Si se conoce los $N_\nu = N_t/2 + 1$ primeros muestreos de las partes real e imaginaria de la TFD , es suficiente para representar la función f en el espacio de las frecuencias. Estos

$N_\nu = N_t/2 + 1$ primeros muestreos corresponden a las frecuencias positivas. Si f es real, la parte imaginaria de H es siempre nula a la frecuencia nula y para el muestreo $N_t/2 + 1$. (verificar esta parte...)

6.1.3. Propiedades de la transformada de Fourier discreta

Una *TFD* es un caso particular de una *TZ*. Entonces, todas las propiedades de las *TZ* se pueden aplicar en el caso de una *TFD*. Las vamos a acordar.

Traslado

Multiplicar por z (o sea por $z = e^{-i2\pi\nu\Delta t}$) va a trasladar (adelantar) la secuencia de un intervalo de muestreo Δt . O de manera equivalente, trasladar la serie temporal de 1 va a tener como consecuencia de multiplicar los coeficientes A_n de la *TFD* por $e^{-i2\pi n/N}$. La amplitud R_n de A_n (con la notación: $A_n = R_n e^{i\Phi_n}$) no va a cambiar en este proceso de traslado temporal, pero sí su fase va a cambiar, atrasada de $2\pi n/N$. Eso es físicamente razonable: hacer un traslado temporal no va a cambiar el contenido frecuencial de la señal temporal, no va a cambiar su forma, pero sí va a cambiar su fase (traslado temporal).

Reverso temporal

Revertir el orden de la secuencia es equivalente a revertir el tiempo y trasladar todos los términos adelante de un periodo (toda la secuencia). Si notamos a' los coeficientes de la secuencia revertida, tenemos $a'_{n_t} = a_{N_t - n_t}$. Con $l = N_t - n_t$, tenemos:

$$A'(n_\nu) = TFD[a'(t_n)] = \sum_{n_t=0}^{N_t-1} a(N - n_t) \cdot e^{-2i\pi n_t n_\nu / N_t} = \sum_{l=1}^{N_t} a(l) \cdot e^{-2i\pi (N_t - l) n_\nu / N_t} = A_{n_\nu}^*$$

Entonces, revertir transforma en complejo conjugado de la *TFD*.

Revertir en tiempo, da la *TZ* de z^{-1} con un factor de traslado:

$$A'(z) = a_{N-1} + a_{N-2}z + \dots + a_0 z^{N-1} = z^{N-1} A\left(\frac{1}{z}\right)$$

Repetición periódica

Se reemplazamos n_t por $n_t + N_t$, tenemos:

$$a_{n_t+N_t} = \frac{1}{N_t} \sum_{n_\nu=0}^{N_\nu-1} A(n_\nu) \cdot e^{+2i\pi(n_t+N_t)n_\nu/N_t}$$

Substituciones similares muestran que:

$$a_{n_t-N_t} = a_{n_t} y a_{n_t+2N_t} = a_{n_t} \quad etc...$$

Una *TFD* siempre ve los datos como una secuencia repetida periódicamente, a pesar de que no lo hemos pedido explícitamente. La *TFD* inversa es correcta solamente si los datos originales son repetidos con un periodo N_t .

Teorema de convolución

La *TFD* es un caso particular de una *TZ*. Entonces todo lo que era verdad para una *TZ* lo es para una *TFD*. Para dos señales discretas $f(n)$ y $g(n)$, el producto de convolución es:

$$y(n) = f(n) * g(n) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m) g(n-m). \quad (6.4)$$

$f(m)$ vale 0 para m afuera del intervalo $[0, M-1]$ y que $g(n)$ vale 0 para n afuera del intervalo $[0, N-1]$, hay $N+M-1$ terminos en la convolución, y $y(n)$ está definido para $n = 0, 1, \dots, N+M-2$. eso significa que hay 'efectos de bordes' en el resultado final, porque las señales f y g son finitas.

Ver el capítulo xx para los comentarios que quedan validos para un producto de convolución de señales discretas.

Derivación e integración

la *TFD* inversa nos daba como coeficientes:

$$a(n_t) = \frac{1}{N_t} \sum_{n_\nu=0}^{N_\nu-1} A(n_\nu) \cdot e^{+2i\pi n_t n_\nu / N_t}$$

Regresando a una formulación continua, con $t = n_t \Delta t$ y $\omega_n = 2\pi n_\nu / (N \Delta t)$

$$a(t) = \frac{1}{N_t} \sum_{n_\nu=0}^{N_\nu-1} A(n_\nu) \cdot e^{+i\omega_n t}$$

Derivando con el tiempo, tenemos:

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{1}{N_t} \sum_{n_\nu=0}^{N_\nu-1} i\omega_n A(n_\nu) \cdot e^{+i\omega_n t}$$

Ahora discretizando esta ecuación:

$$\dot{a}_{n_t} = \frac{da(t)}{dt} \Big|_{t=n_t \Delta t}$$

da:

$$\dot{a}_{n_t} = \frac{1}{N_t} \sum_{n_\nu=0}^{N_\nu-1} i\omega_n A(n_\nu) \cdot e^{+2i\pi n_\nu n_t / N_\nu}$$

Es exactamente la misma forma que la *TFD* inversa xx, entonces \dot{a}_{n_t} y $i\omega_n$ deben ser transformados uno del otro. Entonces, derivar respecto al tiempo es equivalente a multiplicar en frecuencia por $i\omega_n$ (el i tendrá una influencia sobre la fase).

De igual manera, se puede mostrar que integrar equivale a dividir en frecuencia por $i\omega_n$.

Entonces, si queremos derivar una función, lo podemos hacer en el dominio de las frecuencias. Tomamos la *TFD* de la señal, la multiplicamos por $i\omega_n$, y haciendo después una *TFD* inversa, regresamos al espacio del tiempo y tenemos como resultado la derivada de la función temporal inicial

Igual para integrar una función. Pero en este caso, en el dominio de las frecuencias vamos a dividir por $i\omega_n$.

Eso significa que al derivar una función vamos a aumentar las altas frecuencias (porque si multiplicamos es espectro por $i\omega_n$, si ω_n es grande (frecuencia altas), el espectro de la derivada tendra aun más altas frecuencias porque sera multiplicado por ω_n .

Al revez, integrar una función va a generar bajas frecuencias porque dividiendo el espectro por $i\omega_n$, si ω_n es cerca de cero (más pequeño que 1), dividiendo por $i\omega_n$ va a generar valores grandes de frecuencias bajas.

Integrar es siempre un proceso difícil. Por ejemplo integrar dos veces un acelerograma para tener una señal en desplazamiento es más difícil que lo que podria parecer al inicio. Por ejemplo, si un acelerograma tiene un Dirac (un pulso electronico por ejemplo), al integrar una vez se va a convertir en un heaviside, y al integrar dos veces se convierte en una recta. De igual manera, si un acelerograma contiene un pequeño Heaviside (cambio de la linea de base, del nivel 0 de referencia del acelerograma por razones instrumentales o electronicas (eso sucede)), al integrar dos veces, en desplazamiento vamos a tener un polinomio de orden 2...

Teorema de Parseval

Teniamos:

$$TFD[a(t_n)] = A(n_\nu) = \sum_{n_t=0}^{N_t-1} a(n_t) \cdot e^{-2i\pi n_t n_\nu / N_t}$$

Entonces:

$$\|A(n_\nu)\|^2 = \sum_{n_t=0}^{N_t-1} a(n_t) \cdot e^{2i\pi n_t n_\nu / N_t} \cdot \sum_{m_t=0}^{N_t-1} a(m_t) \cdot e^{-2i\pi m_t n_\nu / N_t}$$

Sumando sobre el n_ν , y usando el teorema de Nyquist, y usando el simbolo de Kronecker:

$$\sum_{n_\nu=0}^{N_\nu-1} \|A(n_\nu)\|^2 = \sum_{n_t=0}^{N_t-1} \sum_{m_t=0}^{N_t-1} a(n_t) \cdot a(m_t) \sum_{n_\nu=0}^{N_\nu-1} e^{-2i\pi n_\nu (m_t - n_t) / N_t} = N \sum_{n_t=0}^{N_t-1} \sum_{m_t=0}^{N_t-1} a(n_t) \cdot a(m_t) \delta_{n_t m_t}$$

El teorema de Parseval que ya vimos en el capitulo xx se escribe entonces:

$$\sum_{n_\nu=0}^{N_\nu-1} \|A(n_\nu)\|^2 = N \sum_{n_t=0}^{N_t-1} \|a(n_t)\|^2$$

Eso significa que la energía (el cuadrado del desplazamiento si a es un desplazamiento) se conserva cuando se pasa del dominio del tiempo al dominio de las frecuencias. Eso

felizmente. Si miramos la señal en tiempo o en frecuencia, vamos a conservar la misma información, entonces en particular la señal en tiempo y en frecuencia va a tener la misma energía, que miramos la señal en tiempo o en frecuencia.

6.2. Transformada de Fourier Rápida *FFT* de la *TFD*

La transformada de Fourier Discreta es una noción útil sobre todo para su aplicación en computadoras. Es útil si la *TF* y su TF^{-1} son calculadas relativamente rápidas. Existe un algoritmo astuto que permite de hacer estos calculos rápidos. Se llama en ingles: Fast Fourier Transform: la *FFT*. Podemos estimar que para calcular una *TFD*, la sumatoria finita sobre N puntos de la serie temporal va a necesitar más o menos N^2 operaciones. En cambio, el algoritmo de la *FFT* requiere un número de operaciones mucho más pequeño, del orden de $N \log_2 N$, lo que optimiza substancialmente el algoritmo. La diferencia es enorme. Por ejemplo, para una señal temporal de $N = 10^6 = 2^{20}$ puntos, un *TFD* va a necesitar $N^2 = 10^{12}$ operaciones, pero solamente $N \log_2 N = 2 \cdot 10^7$ operaciones. Por ejemplo, si el calculo de la *FFT* demora 20 segundos, una *TFD* normal equivalnte demoraría más de 11,5 días! La diferencia es menor para señal con menos puntos N pero todavia la diferencia queda grande. Este algoritmo fue inventado por Cooley y Tukey en 1965 (ver introducción).

Vamos a describir este algoritmo. Sea una serie:

$$f(n) \quad \text{para } n=0,1,2,\dots,N-1$$

Vamos a formar dos sub-series, una con los indices pares, la otra con los indices impares:

$$\begin{aligned} a(n) &= (f(0), f(2), (4), \dots, f(2n), \dots) \quad \text{para } n=0,1,2,\dots,N/2-1 \\ b(n) &= (f(1), f(3), (5), \dots, f(2n+1), \dots) \quad \text{para } n=0,1,2,\dots,N/2-1 \end{aligned}$$

Las *TFD* de las dos sub-series son:

$$\begin{aligned} A(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} a(n) e^{-4i\pi nk/N} \\ B(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} b(n) e^{-4i\pi nk/N} \end{aligned}$$

donde k varia de 0 a $N/2 - 1$. El factor 4 viene de que la longitud de las sub-series es de $N/2$. Podemos escribir la *TFD* de la función inicial $f(n)$ en función de las de las

sub-series. La *TFD* de $f(n)$ puede escribirse en terminos de las *TFD* de las sub-series:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2i\pi nk/N}$$

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [a(n) e^{-2i\pi(2n)k/N} + b(n) e^{-2i\pi(2n+1)k/N}]$$

o sea:

$$F(k) = A(k) + e^{-2i\pi k/N} B(k) \quad \text{para } k=0,1,\dots,N/2-1 \quad (6.5)$$

que da los $N/2$ primeros puntos de $F(k)$. Los otros $N/2$ puntos están obtenidos reemplazando k por $k + N/2$, es decir:

$$F(k + N/2) = A(k + N/2) + e^{-2i\pi(k+N/2)/N} B(k + N/2) \quad \text{para } k=0,1,\dots,N/2-1$$

notando que, como las *TFD* de las sub-series son periódicas con un periodo igual a su tamaño, $N/2$, tenemos:

$$\begin{aligned} A(k + N/2) &= A(k) \\ B(k + N/2) &= B(k) \end{aligned}$$

Como las exponenciales se pueden escribir:

$$e^{-2i\pi(k+N/2)/N} = e^{-i\pi} e^{-2i\pi k/N} = -e^{-2i\pi k/N}$$

la segunda parte de la transformada se puede deducir de la primera, usando:

$$F(k + N/2) = A(k) - e^{-2i\pi k/N} B(k) \quad (6.6)$$

Si usamos la notación:

$$W = e^{-2i\pi/N}$$

tenemos de las ecuaciones 6.5 y 6.6 que se escriben:

$$\begin{aligned} F(k) &= A(k) + W^k B(k) \\ F(k + N/2) &= A(k) - W^k B(k) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Este metodo permite encontrar la *TFD* de una serie de N puntos a partir de las *TFD* de sus 2 sub-series que tienen $N/2$ puntos. Podemos repetir otra y otra vez estas decomposiciones en 2 sub-series, y de cada sub-serie de $N/2$ puntos podemos decomponer en 2 sub-series de $N/4$ puntos etc. Así una serie de $N = 2^n$ puntos se puede evaluar a partir de $n = \log_2 N$ operaciones. Al limite, vamaos a llegar a la *TFD* de una serie de 2 puntos que se podran descomponer en 2 sub-series de 1 punto, y la *TFD* de 1 punto es ese punto mismo. Después hay varios métodos para calcular de poco a poco la *TFD* entera.

Entonces, para calcular una *FFT* de una serie, procesamos los N puntos de la serie como N series de 1 punto cada una. Usando despues la formula para pasar de 2 sub-series de 1 punto, vamos a formar $N/2$ series de 2 puntos etc...hasta llegar al final de una transformada de N puntos. El mismo proceso se puede usar para calcular la FFT^{-1} . En general, es el mismo programa que se usa para la *FFT* y la FFT^{-1} . Solamente el signo de la exponencial cambia, y la normalización con $1/N$.

La aplicación de una *FFT* supone que la serie inicial tiene un numero de puntos que sea una potencia de 2: ($N = 2^n$). Si no es el caso, es necesario 'complementar' por 0 al final de la serie, de tal manera que la serie contenga efectivamente un número de puntos $N = 2^n$. Se llama 'padding' en ingles. Tiene como efecto de muestrear el espectro de una manera más densa, porque la taza de muestreo temporal se queda igual, pero la taza de muestreo frecuencial va a cambiar y sera: $\Delta\nu = 1/(N\Delta t)$, o sea más pequeño porque N será más grande. Pero a pesar de que el muestreo será más denso, la resolución real de la *TFD* no habrá aumentado respecto a la *TFD* de la señal sin los 0. Eso es normal, poniendo 0, no vamos a añadir energía en ninguna frecuencia (ver el teorema de Perseval).

En resumen, la *TFD* es una aproximación discreta de la *TF* (que es continua en frecuencia). La *FFT* es simplemente una manera astuta de programar la *TFD* con muchos menos operaciones, pero no es un concepto diferente de la *TFD*.

6.3. Padding effect o interpolación del espectro

Para usar la *FFT*, es necesario que la función temporal tenga un número de puntos que sea una potencia de 2. Si no es el caso, es necesario complementar la serie temporal inicial por ceros hasta llegar a un número de puntos $N = 2^p$ que sea una potencia de 2. Eso se llama 'padding' en ingles, y vamos a ver que eso va a interpolar el espectro, sin cambiar su información.

Sea una función muestreada $a(k)$ que tiene M puntos en el tiempo. Vamos a definir una nueva función que es igual a $a(k)$ para $k = 0, 1, \dots, M-1$ y 0 desde M hasta N .

$$\begin{aligned} c(k) &= a(k) \quad k=0,1,\dots,M-1 \\ &= 0 \quad k=M,M+1,\dots,N-1 \end{aligned}$$

Se puede escribir $c(k)$ como el producto de $a(k)$ por una puerta $\prod(k)$ (que vale 1 ente $k = 0$ y $k = M$ y 0 afuera):

$$c(k) = a(k) \cdot \prod(k)$$

Tomando la *TFD* de un producto, tenemos el producto de convolución de las *TFD*:

$$C(n) = \sum_{p=0}^{N-1} A(n-p).B(p)$$

$$C(n) = \Delta t \sum_{p=0}^{N-1} A(n-p) \cdot \frac{\sin(\pi p M/N)}{\sin(\pi p/N)} e^{-i\pi p(M-1)/N}$$

Ya vimos eso en el tiempo, con la formula de interpolación de Shanon, y es ahora en frecuencia. Es el espectro $A(n)$ de $a(k)$ interpolado, pasando de M puntos a N puntos, sobre el mismo rango de frecuencia. Así añadiendo ceros al final de la serie temporal, hemos mentenido implícitamente Δt igual, solamente hemos alargado la señal hasta $N\Delta t$. La tasa de muestreo frecuencial ha aumentado hasta una tasa de $1/(N\Delta t)$, por eso la interpolación del espectro. Es a veces útil hacer eso para interpolar el espectro, sobre todo que no añade información ni quita información. Solamente el dibujo final del espectro será más claro. Se puede así añadir 0 al fin de la señal temporal solamente para que el espectro sea más claro.

6.4. Taper o Apodisación

En la practica, los señales temporales tienen duración finita y son muestreadas. Eso tiene dos consecuencias que son limitaciones fundamentales sobre el espectro. La primera limitación es que la duración T finita de la señal limita la tasa de muestreo frecuencial a $\Delta\nu = 1/T$. La segunda es que la tasa de muestreo temporal Δt limita la frecuencia máxima que tiene sentido a la frecuencia de Nyquist ν_N .

Ya vimos en el párrafo anterior xx que añadir 0 al fin de la señal temporal equivale a reducir la tasa de muestreo frecuencial del espectro, sin cambiar su contenido. Entonces añadir ceros mejora la apariencia del espectro, sin añadir o disminuir información, y es una manera también de poder calcular la *FFT* con un número de puntos que sea una potencia de 2.

La *TFD* utiliza un número finito de terminos para representar una serie temporal, entonces puede generar altas frecuencias como ya lo vimos numericamente con la series de Fourier, y que llamamos fenomeno de Gibbs, cuando la señal tiene discontinuidades. Hay que ver que hay diferentes maneras de generar discontinuidades. Puede ser una discontinuidad obvia contenida en la señal misma, pero puede ser más sutil, como por ejemplo el inicio y el final de la señal, que siempre existe para una señal de dimensión finita, o sea siempre sera el caso para señales reales o con computadoras. Entonces un fenomeno de Gibbs siempre esta más o menos escondido. Entonces, como una *TFD* trata una serie temporal como una señal continua y periódica, si el ultimo valor es bastante diferente del

primer valor de la serie temporal, va a generar implícitamente una discontinuidad, que se refiere como una discontinuidad escondida, nada obvia. Para evitar eso, el inicio de la señal temporal debe tener un valor igual al fin de la señal temporal, y como ya vimos que una *TF* se puede calcular solo para una señal acotada, este valor inicial y final debe ser cero. Entonces hay que forzar la señal temporal de empezar y terminar a cero. Para hacer eso, generalmente se multiplica la función temporal por otra función que vale 1 para casi todo el largo de la señal y que cae hasta cero en sus extremos. **Esta función se llama en inglés un 'taper'**. En español se habla se 'apodisar' una señal es decir obligar la función a regresar a cero en sus extremos. Un ejemplo de tal función es una función de Hanning que ya vimos en el capítulo xx.

Lamentablemente, hacer un taper tiene un costo, es que va a deformar la función inicial, sobre todo en el inicio o en el final de la señal. El caso ideal podría ser una función puerta que no va a deformar la señal, pero va a generar un sinus cardinal y oscilaciones como ya vimos en el capítulo xx. Generalmente, si se suaviza los bordes de discontinuidades de la función puerta se limita el fenómeno de Gibbs, pero se deforma la señal, así que es difícil hacer los dos al mismo tiempo (disminuir el fenómeno de Gibbs y conservar toda la información de la señal).

Las otras funciones para apodizar puede ser:

1. ventana Gausiana
2. coseno atenuado

Existen también algo más sofisticado y mejor, que se llama un multi-taper, introducido por Thomson en 1982, que no vamos a desarrollar en este curso, pero es bueno saber que existe.

Thomson D., 1982: Spectrum estimation and harmonic analysis. Proc. IEEE, **70**, 1055-96.