

FISICA MODERNA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile ¹

versión 1 de octubre de 2005

Índice general

III. Cálculo Variacional	83
III.1. Ecuaciones de Euler–Lagrange	96
III.2. Aplicaciones	100
III.3. El origen de $L = T - V$ en la mecánica de Newton	105
III.3.1. Trabajo Virtual	106
III.3.2. Componentes Generalizadas de la Fuerza	106
III.3.3. Las ecuaciones de Lagrange	109
III.3.4. El Momentum Generalizado Conjugado	114
III.4. Multiplicadores de Lagrange	115
III.4.1. Extremo de una Función	115
III.4.2. Las ecuaciones de Euler–Lagrange con vínculos.	119
III.5. Ejercicios	131

Capítulo III

Cálculo Variacional

Para introducir este tema obtendremos la ley de Snell a partir del siguiente principio: el trayecto seguido por un rayo de luz entre dos medios diferentes, es aquel que utiliza el tiempo mínimo para cubrir la distancia que separa ambos eventos.

Este principio es conocido en Mecánica Clásica como el Principio de Fermat.

Pierre de Fermat (1607-1665) [1] era abogado de profesión y sólo un matemático aficionado. Es el autor del Último Teorema de Fermat que generó importantes desarrollos en matemáticas. La teoría de números fue la pasión de Fermat. Su interés en esta área nació de la traducción del latín del libro de Diofantes *Aritmética* (250 AdeC). A diferencia de otros campos en los cuales contribuyó, Fermat no tiene publicaciones formales en teoría de números. Sus resultados, y algunas indicaciones muy vagas de sus métodos fueron conocidos a través de sus comentarios en los márgenes de la traducción mencionada. De hecho, al enunciar el Último Teorema escribió en el margen: Tengo una demostración maravillosa de esta proposición, pero el margen no alcanza para incluirla. Nunca publicó esta demostración y, en alguna correspondencia posterior se refirió sólo a los casos $n = 2$ y $n = 3$. Esto ha hecho pensar a algunos prominentes matemáticos que la demostración, válida para cualquier entero no la tenía.

La aplicación de la ley de Snell no se restringe a la óptica geométrica, se aplica en cualquier ejemplo donde se necesite minimizar (o, en general, encontrar un extremo). Ilustraremos la ley de Snell con el ejemplo de un salvavidas que quiere llegar lo más pronto posible al lugar del accidente.

Ejemplo

Un salvavidas se desplaza con una rapidez v_1 en la arena y v_2 en el agua. Encuentre la trayectoria que debe seguir para ir desde A hasta B de modo que el tiempo utilizado sea mínimo.

Si designamos s , como el camino recorrido y v la velocidad con la cual transita dicha trayectoria, entonces, el tiempo que demora:

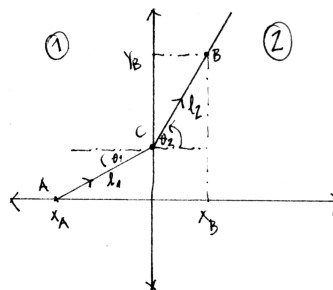


Figura III.1:

$$T = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v} = \frac{\ell_1}{v_1} + \frac{\ell_2}{v_2},$$

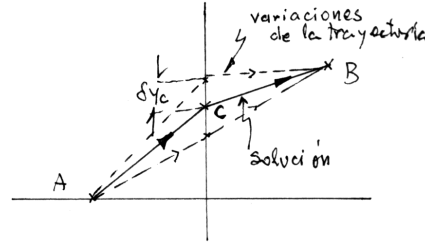
donde ℓ_1 y ℓ_2 son las distancias recorridas en el medio 1 y 2, respectivamente. Hemos supuesto -correctamente-, que la línea recta constituye la trayectoria más corta entre dos puntos ubicados en un mismo medio homogéneo, como lo es 1 y 2. Este resultado se demostrará en un ejemplo incluido más adelante.

Para determinar la trayectoria basta fijar la posición del punto C de la Figura anterior. La posición óptima para C se obtiene por un procedimiento semejante al utilizado para encontrar el extremo de una función: ubicar el o los puntos en los cuales una pequeña variación de las coordenadas en la vecindad del punto, no altera el valor de la función. En este caso debemos encontrar una función tal que al hacer una pequeña variación de ella el valor del funcional¹ –denominado T en este ejemplo–, no cambia a primer orden en la variación aplicada.

¹Denominamos función a un mapeo de un conjunto de los números reales en otro. Un

La pequeña variación en la trayectoria consiste –en este caso específico–, en mover el punto C de la Figura a lo largo de la línea que separa los dos medios.

Si al realizar una pequeña variación en la trayectoria, el tiempo total T no varía a primer orden en la variación impuesta $\delta T \approx 0$, entonces hemos ubicado un extremo de este funcional T .



$$\delta T = \frac{\delta \ell_1}{v_1} + \frac{\delta \ell_2}{v_2}, \quad \ell_1 = \delta \{(x_A^2 + y_C^2)^{1/2}\},$$

$$\delta \ell_1 = \delta \{(x_A^2 + y_C^2)^{1/2}\} = \frac{y_C \delta y_C}{\sqrt{x_A^2 + y_C^2}}$$

$$\delta \ell_1 = \delta y_C \sin \theta_1.$$

$$\delta \ell_2 = \delta \{(x_B^2 + (y_B - y_C)^2)\} =$$

$$= -\frac{(y_B - y_C) \delta y_C}{\sqrt{x_B^2 + (y_B - y_C)^2}}$$

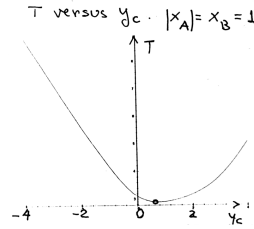
$$\delta \ell_2 = \delta y_C \sin \theta_2,$$

Figura III.2: Posibles trayectorias de un rayo de luz determinadas por el valor escogido de y_C . Uno de estos valores minimiza el tiempo de recorrido.

$$\delta T = 0 = \left[\frac{\sin \theta_1}{v_1} - \frac{\sin \theta_2}{v_2} \right] \delta y_C.$$

Como δy_C es arbitrario, se obtiene:

$$\boxed{\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}}.$$



Esta expresión es la misma que se utiliza para determinar funcional es una operación que asocia a una función a un número. Si cambia la función, cambia el número.

Figura III.3: El gráfico muestra el valor de y_C que hace mínimo el valor del tiempo empleado por el salvavidas entre los dos puntos señalados.

la trayectoria de un rayo de luz que pasa de un medio con índice de refracción $n_1 = c/v_1$ a otro $n_2 = c/v_2$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \text{Ley de Snell}$$

Usando este ejemplo y la Figura [III.2] podemos explicar qué es un funcional. En la Figura, la línea quebrada ACB, representa una función a la cual asociamos (vía la integral) un número: T_{ABC} . Al variar el punto $C \rightarrow C'$, la trayectoria queda representada por otra función a la cual le asociamos, mediante las integrales indicadas, otro número: $T'_{AC'B}$. El extremo de este funcional ocurre cuando estos números no cambian a primer orden bajo una variación pequeña de CC' . Es similar al extremo de una función, éste no cambia si nos desplazamos una cantidad muy pequeña alrededor del extremo.

Ejercicio

Utilizando el mismo principio, encuentre la ley que determina el valor de los ángulos de incidencia y reflexión en un plano, para un rayo de luz rebotando en un espejo.

(Puede utilizar la Ley de Snell y geometría para obtener este resultado o, hacerlo directamente).

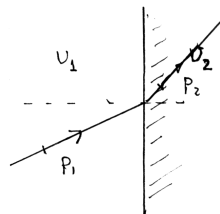


Figura III.4:

Ejemplo

Estudiemos la trayectoria de una partícula de masa m y velocidad v_1 que incide con un ángulo θ_1 sobre una región donde existe un cambio abrupto en el valor del potencial, de U_1 a U_2 .

Encuentre la trayectoria de la partícula y compárela con el caso de la luz estudiado anteriormente.

La trayectoria de la partícula va a estar determinada por las ecuaciones de Newton (o la conservación de la energía). Al viajar la partícula en uno de los medios la velocidad es constante puesto que no hay fuerzas externas (U_1 es constante). En la interfase, la componente de la velocidad (o el momento) paralela a la superficie no sufre cambios, puesto que la derivada del potencial a lo largo de dicha dirección es nula. Entonces tenemos:

$$v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2.$$

Para conocer qué sucede con la otra componente nos conviene utilizar la conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + U_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + U_2, \implies \frac{1}{2} m v_1^2 \left[1 - \left(\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right)^2 \right] = U_2 - U_1,$$

donde introducimos la primera ecuación en la conservación de la energía para despejar v_2 . Ordenando y aislando la expresión angular, obtenemos:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{m v_1^2} (U_1 - U_2)}.$$

Si ambos potenciales son iguales, la partícula viaja en línea recta, como era de esperar. Si $\theta_2 = \pi/2$ necesariamente $U_2 > U_1$.

Comparando la ecuación III y la ley de Snell, se desprende que la trayectoria de la partícula no corresponde a una que ocupe el tiempo mínimo. A continuación proponemos un ejemplo en que aumentamos el número de condiciones exigidas: que el tiempo utilizado sea mínimo y que la partícula se mueva inmersa en el potencial gravitacional de la Tierra. Este problema marcó el inicio del cálculo variacional, Se denomina el problema de la Braquistócrona y fue propuesto por Johann Bernouilli como un desafío a la comunidad científica en general y a su hermano mayor Jakob, en particular, a quien consideraba un inepto. Esto ocurrió en 1696. El problema fue resuelto por Newton -se dice que lo hizo la misma noche que lo recibió-, y por Jakob, el hermano aludido, entre otros.

A continuación incluimos el enunciado del problema.

Se tienen dos puntos A y B en un plano vertical unidos por un alambre y a lo largo del cual se desliza, sin roce, una argolla de masa m.

Encuentre la forma que debe tener la curva que une estos puntos para que al deslizar la argolla entre ellos, cubra la distancia que los separa en el menor tiempo posible.

Como vemos el enunciado es similar a áquel del principio de Fermat analizado anteriormente, sólo que en este caso existe aceleración y de este modo la velocidad de la partícula cambia punto a punto a lo largo de su trayectoria.

Ejemplo

Usaremos una aproximación variacional para estudiar las soluciones perturbativas en el caso de una ecuación no lineal como la de Duffing (ver en capítulo anterior, la sección perturbaciones). En particular encontraremos la variación de la la velocidad angular ω en función de la amplitud. Éste es un método alternativo a los propuestos en el capítulo anterior.

Este método consiste en elegir un conjunto de funciones, que denominaremos ψ_k que satisfacen, cada una de ellas, las condiciones iniciales del problema. Esta condición es la primera exigencia que se impone sobre la función propuesta. Una buena elección de ψ_k es importante en este método. Conviene que responda a alguna característica física del problema que se pueda intuir sin conocer la solución exacta de la ecuación diferencial.

Cada una de estas funciones ψ_k es multiplicada por una constante C_k introducidas y se considera como función de prueba la superposición de estas funciones.

Al utilizar esta función de prueba en la ecuación diferencial propuesta, obviamente no la satisface. El término que se obtiene lo denominamos función de error $e(t)$. Representa cuán alejados está la función de prueba de la solución exacta. El protocolo es entonces usar el cuadrado de esta función $e(t)^2$, integrarlo en un período y minimizar la expresión resultante ajustando los parámetros disponibles. Este es el método de los mínimos cuadrados.

Ejemplo

Consideremos la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = 0, \quad (\text{III.1})$$

Nos proponemos aplicar este método para resolver, aproximadamente esta ecuación.

Escribamos una función $x(t)$, que representa nuestra aproximación a la solución buscada. De acuerdo a lo propuesto en el método, utilizamos una superposición de funciones $\psi_i(t)$. Éstas deben satisfacer las condiciones iniciales para que puedan ser utilizadas con este método.

$$x(t) = \sum_{i=1}^N C_i \psi_i(t), \text{ con } N \text{ arbitrario.}$$

obteniendo la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^N C_i \ddot{\psi}_i + \omega_o^2 \left[\sum_{i=1}^N C_i \psi_i(t) - \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^N C_i \psi_i \right)^3 \right] \equiv e(t).$$

Hemos eliminado el uso del término μ puesto que en esta nueva estrategia ya no necesitamos seguir la pista a los términos perturbativos. La función $e(t)$ incluida al final proviene del hecho que las funciones utilizadas no son soluciones exactas de la ecuación diferencial. Representa lo que nos hemos alejado de la solución exacta.

La estrategia es calcular el cuadrado de la función $e(t)$ en un intervalo dado, es decir:

$$I[e(C_k); b, a] = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^2(t) dt. \quad (\text{III.2})$$

y posteriormente minimizar esta expresión como se indica más adelante.

Esta forma permite evaluar el error introducido por la función de prueba ψ . Al elevar al cuadrado la diferencia $e(t)$ entre ambas funciones, eliminamos la posibilidad de considerar como aceptable funciones que oscilan y que de esa forma den un promedio nulo.

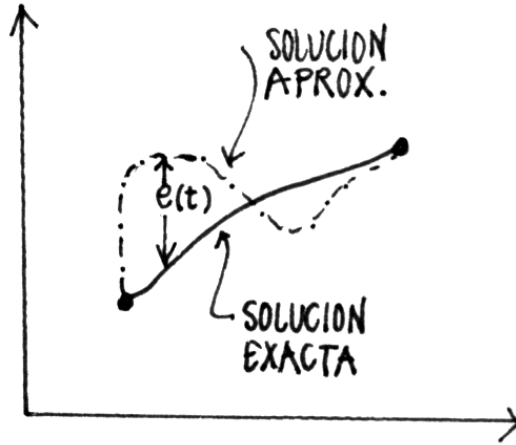


Figura III.5:
de esa forma den un promedio nulo.

Como las funciones $\psi_i(t)$ son *dadas*, y los límites de la integral son fijos, lo único que podemos ajustar para acercarnos a la función exacta, son las constantes C_k . Con este objeto calculamos la variación del valor de la integral III.2 al usar un valor para C_k y después $C_k + \delta C_k$, donde δC_k representa una pequeña variación de los valores de los coeficientes. Formalmente escribimos esto como:

$$\delta I = \frac{1}{b-a} \int_a^b 2e \delta e dt, \quad \text{a primer orden.}$$

Donde la expresión δe se define:

$$\delta e = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{\partial e}{\partial C_k} \delta C_k \quad (\text{puesto que los } \psi_i \text{ son fijos}).$$

Para encontrar el valor de los distintos coeficientes C_k que minimizan el valor de la integral III.2, imponemos la condición que al variar los coeficientes C_k , el valor de la integral permanezca estacionario:

$$\delta I = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{extremos de } I.$$

De aquí se obtienen N ecuaciones, una por cada coeficiente c_k , puesto que cada uno de ellos es independiente del resto:

$$\delta I = \sum_{k=1}^{k=N} \left\{ \frac{2}{b-a} \int_a^b e \frac{\partial e}{\partial C_k} dt \right\} \delta C_k = 0 \quad (\text{III.3})$$

Esta es la condición que se debe cumplir para minimizar el error introducido por las funciones de prueba.

La expresión que se obtiene al imponer la condición anterior no es trivial debido a la presencia de términos no lineales en la ecuación original. Con el objeto de ilustrar el método sin complicaciones excesivas, utilicemos una sola función:

$$\psi_1 = C \sin(\omega t), \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0 \dots$$

Note que hemos utilizado una frecuencia diferente: $\omega \neq \omega_0$. Éste es un condición necesaria. Si utilizamos ω_0 con la función de prueba propuesta, estamos resolviendo la parte lineal de la ecuación III.1, y como estamos utilizando un sólo término, el resultado sería trivial: $C = 0$. Cuando se escriba la ecuación resultante quedará clara esta afirmación.

ω es un parámetro adicional cuyo valor desconocemos. Podemos adelantar entonces que, dado que tenemos un parámetro, se obtendrá una ecuación. Ésta relacionará ω y C . Esto es lo que hemos obtenido anteriormente y nos permitirá juzgar la bondad de este método.

Al reemplazar $C \sin \omega t$ en la ecuación diferencial original, obtenemos:

$$e(t) = (\omega_o^2 - \omega^2 - \frac{\omega_o^2}{8} C^2) C \sin \omega t + \frac{\omega_o^2}{24} C^3 \sin 3 \omega t.$$

Los límites de integración son: $a = 0$, $b = T = \frac{2\pi}{\omega}$. de esta forma obtenemos:

$$\int_0^T e \frac{\partial e}{\partial C} dt = \int_0^T \left\{ (\omega_o^2 - \omega^2 - \frac{\omega_o^2}{8} C^2) C \sin \omega t + \frac{\omega_o^2}{24} C^3 \sin 3 \omega t \right\} \times \\ \left\{ (\omega_o^2 - \omega^2 - \frac{3\omega_o^2}{8} C^2) \sin \omega t + \frac{\omega_o^2}{8} C^2 \sin 3 \omega t \right\} dt = 0.$$

Esta ecuación representa una condición sobre C y ω^2 . Una solución trivial es $C = 0$, otra posibilidad es:

$$\omega^4 - 2(1 - \frac{1}{4} C^2) \omega_o^2 \omega^2 + \omega_o^4 \left(1 - \frac{1}{2} C^2 + \frac{5}{96} C^4 \right) = 0.$$

Nota: Esta expresión se obtiene a partir de los términos $\sin^2 \omega t$ y $\sin^2 3 \omega t$, puesto que la integral del otro término: $[\sin 3 \omega t][\sin \omega t]$ se cancela.

La solución de esta ecuación cuártica [III] para ω^2 es:

$$\omega^2 = \omega_o^2 \left[1 + \left(-\frac{1}{4} \pm \frac{1}{10} \right) C_1^2 \right]$$

Se puede verificar que el signo $+$, corresponde al mínimo de la integral.

Notemos que en el cálculo realizado con teoría de perturbaciones [??], tomando ω como una función de la amplitud, obtuvimos:

$$\omega^2 \simeq \omega_o^2 \left(1 - \frac{1}{8} C^2 \right),$$

donde reemplazamos $(\mu = -\frac{1}{6} \omega_o^2)$.

Si comparamos este resultado con el obtenido ahora mediante el método variacional, también denominado de Rietz:

$$\omega^2 \simeq \omega_o^2 \left(1 - \frac{3}{20} C^2\right).$$

vemos que la coincidencia es aceptable. Este es un buen resultado considerando que empleamos la aproximación más simple que se nos permitía. El método variacional permite una evaluación más directa de la estimación de los errores.

Supongamos que las condiciones iniciales en este caso son: $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = A$. Esta ecuación, con la obtenida para minimizar el error, determina el valor de la constante C y queda todo determinado.

+++++

Más adelante incluiremos un método para resolver este problema. Por ahora nos restringimos a un análisis más bien intuitivo del problema de la Braquistócrona.

Ejemplo

Supongamos que sobre la superficie de la Tierra queremos enviar una partícula desde A hasta B , dos puntos que no están alineados verticalmente, empleando el menor tiempo posible.

Analicemos tres trayectorias posibles que se puedan utilizar para viajar de A a B . Este ejercicio previo nos permitirá tener una idea más concreta del significado de la braquistócrona.

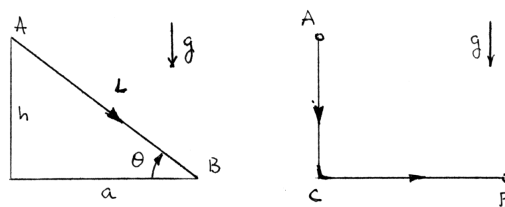


Figura III.6: *Dos caminos posibles entre los puntos A y B . El tiempo empleado por una partícula al ir desde A hasta B depende del ángulo θ .*

i) Comencemos por el caso donde A y B están unidos por una línea recta AB .

El tiempo empleado en este caso es:

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}} \quad (\text{III.4})$$

ii) La partícula cae hasta C , en ese punto cambia la dirección de su velocidad (pero no su magnitud) y viaja hasta alcanzar el punto C . Hemos supuesto que existe una curvatura muy grande en C y que la partícula no pierde rapidez al cambiar su dirección allí. Esta trayectoria parece favorecer el tiempo mínimo puesto que aprovecha al máximo la magnitud de la aceleración gravitacional y posteriormente, en el segundo tramo viaja (sin roce) por un alambre horizontal y con velocidad constante. También, es preciso notar que el tiempo en caída libre es menor.

El tiempo total es la suma del empleado en cada una de las trayectorias:

$$T = T_{AC} + T_{CB}.$$

En el tramo de caída libre:

$$T_{AC} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v_c = \sqrt{2gh},$$

en el siguiente, con velocidad constante

$$T_{CB} = \frac{a}{\sqrt{2gh}}.$$

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{a}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{2L}{g}} (\sin \theta) + \frac{L \cos \theta}{\sqrt{2g L \sin \theta}}$$

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g}} \left[\sqrt{\sin \theta} + \sqrt{\frac{\cos \theta}{2 \sin \theta}} \right].$$

la razón entre los tiempos empleados en ambas trayectorias: la compuesta por una caída

Universidad de Chile

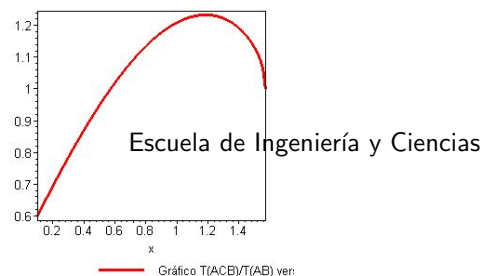


Figura III.7: Para un ángulo θ mayor que (aprox-

libre y posterior desplazamiento horizontal y el deslizamiento por un plano inclinado, se incluye en el gráfico que se acompaña. Para ángulos menores que 32° , el plano inclinado ocupa el menor tiempo. Para ángulos mayores que este valor, la trayectoria quebrada es la más rápida.

Note que en el gráfico para $\theta = \pi/2$ la razón entre los tiempos es la unidad, como debería ser, pues ambos caminos coinciden en ese límite.

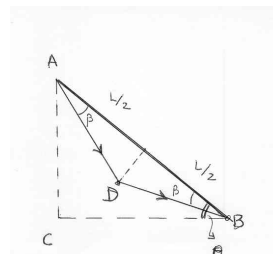
iii) El resultado del gráfico anterior indica que ninguna de las dos trayectorias se perfila como una solución. Necesitamos una nueva. Esperamos que la trayectoria solución se ubique en una zona intermedia entre las estudiadas, puesto que ambas eran extremas. Es obvio que, por ejemplo en el caso del plano inclinado, una trayectoria con una cumbre intermedia sólo aumentará el tiempo de recorrido.

Es natural entonces calcular el tiempo empleado cuando la caída ocurre en dos etapas: desde A hasta D , donde recorre una distancia $b = L/(2 \cos \beta)$ y desde allí hasta el punto B , donde recorre la misma distancia b .

Usando el resultado de la parte i) III.4, para el trayecto desde A hasta D . El resultado es :

$$T_{AD} = \sqrt{\frac{L}{g \cos \beta \sin (\theta + \beta)}},$$

Recordando que al calcular el tiempo para el trayecto desde D a B , debemos



Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Figura III.8: Se indican los valores de los parámetros asociados al trayecto que pasa por D . Dividimos la hipotenusa del triángulo rectángulo en dos tramos iguales, para sim-

considerar que la partícula tiene una velocidad inicial en D . Usando las ecuaciones de cinemática tenemos $b = V_D T_{DB} + a T_{DB}^2/2$, de donde podemos obtener el valor de T_{DB} :

$$T_{DB} = -V_D/a + \sqrt{(v_D/a)^2 + 2b/a},$$

reemplazando aquí

$$V_D = \sqrt{g L \sin(\theta + \beta) / \cos \beta}, \quad a = g \sin(\theta - \beta) \quad \text{y} \quad b = L/(2 \cos \beta),$$

obtenemos:

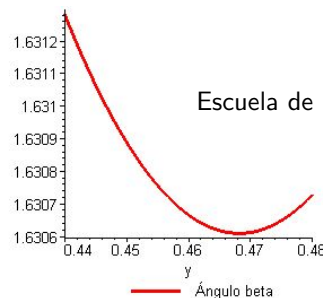
$$T_{DB} = \sqrt{\frac{L \sin(\theta + \beta)}{g \cos \beta}} \left(\frac{1}{\sin(\theta - \beta)} \right) \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\theta + \beta)}} \right].$$

El argumento indicado en este último caso permite encontrar un valor de β que minimiza el tiempo localmente. Ahora esta partición puede ser extendida en forma individual a cada uno de los lados AD y DB, y así sucesivamente con cada uno de los segmentos que van apareciendo. De este modo podemos encontrar el camino que es necesario seguir para minimizar el tiempo para viajar desde A hasta B. Si tratamos el caso de una curva continua debemos encontrar el extremo de la siguiente integral:

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v(s)} = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx}{\sqrt{2gy}}, \quad (\text{III.5})$$

donde hemos usado la conservación de la energía para

Universidad de Chile



Escuela de Ingeniería y Ciencias

escribir $v(s)$ en función de y . A continuación debemos probar distintas funciones $y(x)$ que cumplan las condiciones de borde y evaluar T asociado a cada una de ellas. La función que minimiza este valor es la trayectoria que debe seguir la partícula.

Existe un método para encontrar esta función. Ése es el tema de la siguiente sección.

III.1. Ecuaciones de Euler–Lagrange

El nacimiento del cálculo de variaciones ocurre con la aparición del libro de Euler en 1744: *Un método para descubrir curvas que poseen la propiedad de ser máximos o mínimos, o la solución del problema isoperimétrico en su sentido más amplio*. Aquí apareció por primera vez la fórmula que se denomina de Euler–Lagrange y que obtendremos en las siguientes secciones. Este libro de Euler contiene una colección de 66 problemas y fue catalogado por su editor, Carathéodory, como uno de los libros más fascinantes que se hayan escrito.

La inspiración de Euler [5] provino de de la geometría y del principio de mínima acción, de acuerdo al cual la naturaleza evoluciona en la forma más económica posible.

Lagrange llevó la teoría de Euler mucho más lejos. C. G. J. Jacobi (1804–1851), destaca este hecho, en la siguiente afirmación acerca de este trabajo: *generalizando el método de Euler, logró obtener su notable fórmula que*

contiene, en una sola línea, la solución de todos los problemas de mecánica analítica...

Lagrange inventó el método de las variaciones que estudiaremos a continuación. También introdujo el símbolo δ que utilizamos en el desarrollo del ejemplo resuelto anteriormente.

Definamos la siguiente expresión:

$$S = \int_{t_o}^t L(x, \dot{x}; t) dt,$$

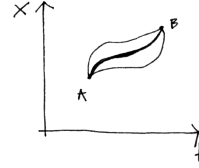


Figura III.10:

donde S lo denominamos como la *acción* y L el *Lagrangiano*. Hemos supuesto que L depende explícitamente de x y \dot{x} , e implícitamente de t , por esta razón incluimos un punto y coma (;) antes de la variable t en la expresión anterior. Esta es la convención que usaremos para indicar que el Lagrangiano depende en forma implícita de t .

El problema que deseamos resolver consiste en encontrar qué condiciones debe cumplir L para que la integral S sea un extremo. Lo que haremos es dar una pequeña variación a la función $x(t)$ y simultáneamente imponer que la acción S permanezca invariante a primer orden, al sufrir esta variación. Este cambio de $x(t)$ es pequeño pero *arbitrario*. Para satisfacer esta restricción, $\delta S \approx 0$, la función L debe cumplir ciertas condiciones, establecidas en lo que se denomina como la ecuación de Euler-Lagrange.

Encontremos esta ecuación.

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_o}^{t_1} L(x, \dot{x}; t) dt \right)$$

$$\delta \left(\int L dt \right) \equiv \int_A^B L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}; t) dt - \int_A^B L(x, \dot{x}; t) dt = \int_A^B \delta L(x, \dot{x}; t) dt$$

$$\text{Como, } \delta L \approx \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}, \quad \text{a primer orden,}$$

$$\text{y } \delta \dot{x} \equiv \dot{\bar{x}} - \dot{x} = \frac{d}{dt}(\bar{x}) - \frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}(\bar{x} - x) \implies \delta \dot{x} = \frac{d}{dt}(\delta x).$$

Es decir, el operador δ conmuta con la derivada temporal. $\delta x(t)$ es la pequeña variación que imponemos a la trayectoria solución.

Introduciendo este resultado en la expresión de δL :

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt}(\delta x),$$

Integrando por partes :

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right) - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x$$

$$\delta L = \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x + \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \right].$$

La integral queda:
$$\delta S = \int_A^B \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x + \frac{d}{dt} \left(\delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right\} dt,$$

veamos que el segundo término del integrando es una derivada total con respecto al tiempo, de modo que:

$$\delta S = \int_A^B \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt + \left(\delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_A^B.$$

Exigimos que la variación de δx se anule en los extremos de integración.

$$\boxed{\delta x = 0 \text{ en A y B.}}$$

Con esta condición, la expresión para δS se convierte en:

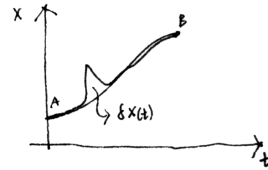


Figura III.11:

$$\delta S = \int_A^B \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt.$$

Recordemos que $\delta x = \delta x(t)$ es una función de t , que toma sus valores entre los puntos A y B , anulándose en ellos. Así, la podemos escribir como $\delta x = \eta(t)$ por ejemplo. La letra δ nos recuerda que es una variación pequeña.

El extremo de la acción $\delta S = 0$, con δx arbitrario, se obtiene al cumplirse que:

Ecuación de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Como $\delta x(t)$ es arbitraria, podemos elegir $\delta x(t) = 0$ en todos los puntos *excepto* entre el intervalo t_1 y t_2 (ver Figura). De esta forma, para que δS se anule, debe necesariamente cumplirse las condiciones establecidas anteriormente.

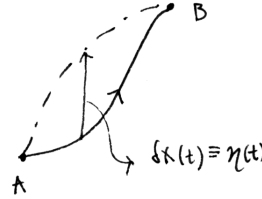


Figura III.12:

Si el sistema tiene más grados de libertad, se tienen más ecuaciones pero el tratamiento es el mismo.

Ejercicio

Demostrar que para 2 grados de libertad la ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Con $L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}; t)$. Generalice estas ecuaciones para el caso de n -dimensiones.

Respuesta: Si $L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t)$, entonces:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0 \quad \sigma = 1, 2, \dots, n.$$

Ejercicio

Encontrar la ecuación de Euler–Lagrange en caso que el Lagrangiano depende de la segunda derivada del tiempo: $L(q, \dot{q}, \ddot{q}; t)$

Proceda del mismo modo que en el caso anterior, La respuesta es :

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

III.2. Aplicaciones

La importancia de los principios variacionales es que tiene aplicación en prácticamente todas las áreas de la física: para obtener las ecuaciones de Maxwell, de la Relatividad General de Einstein, las ecuaciones que describen el comportamiento de las partículas elementales, de fluidos...etc.

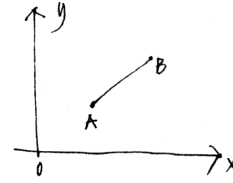


Figura III.13:

Ejemplo

Encuentre la curva que minimiza la distancia entre dos puntos de un plano.

Un elemento de arco situado en un plano está dado por:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2}.$$

El largo total de la curva $y = y(x)$ que une dos puntos arbitrarios: $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, situados en el plano es:

$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$$

Para que esta curva sea un extremo, debemos identificar ℓ con lo que denominamos la acción y $f(y, y') \equiv \sqrt{1 + y'^2}$, como el Lagrangiano del formalismo estudiado al comienzo. La ecuación de Euler-Lagrange para $y(x)$ es:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

Como $\partial f / \partial y = 0$, entonces $\partial f / \partial y'$ es constante, es decir

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

de donde se obtiene

$$y' = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} = \text{Cte}$$

así: $y(x) = ax + b$, con a y b dos constantes que se obtienen de imponer que $y(x_1) = y_1$ y que $y(x_2) = y_2$. Está claro que en este caso el extremo corresponde a un mínimo. De este modo, la distancia más corta entre dos puntos ubicados sobre un plano, es una línea recta. Las líneas que corresponden a la distancia máxima o mínima entre dos puntos de una superficie cualquiera, se denominan *geodésicas*.

Ejemplo

Encuentre la curva que representa la distancia más corta entre dos puntos ubicados sobre una esfera. Otra forma de este enunciado es: encontrar la familia de geodésicas sobre una esfera.

Es intuitivo que la solución de este problema no depende del radio de la circunferencia; las geodésicas de dos esferas de diferente radio similares. Suponemos entonces que el radio de la esfera es la unidad.

El elemento de arco sobre una esfera de radio unitario es:

$$ds = \sqrt{d\theta^2 + d\phi^2 \sin^2 \theta} = d\theta \sqrt{1 + (d\phi/d\theta)^2 \sin^2 \theta}$$

Donde describimos la curva buscada mediante la función $\phi = \phi(\theta)$. Debemos encontrar el extremo de:

$$S = \int_A^B ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{1 + \phi'^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

Reconocemos entonces la función $L = \sqrt{1 + \phi'^2 \sin^2 \theta}$ como la función que cumple el rol del Lagrangiano, y por lo tanto debe satisfacer

$$\frac{\partial L}{\partial \phi'} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial L}{\partial \phi'} \right) = 0$$

obteniéndose

$$\frac{\phi' \sen^2 \theta}{\sqrt{1 + \phi'^2 \sen^2 \theta}} = b,$$

con b una constante. De aquí se despeja $\phi'(\theta)$,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\phi} &= b \csc^2 \theta / \sqrt{1 - b^2 \csc^2 \theta} \\ &= b \csc^2 \theta / \sqrt{1 - b^2 - b^2 \cot^2 \theta} \\ &= \beta \csc^2 \theta / \sqrt{1 - \beta^2 \cot^2 \theta} \end{aligned}$$

con $\beta \equiv b/\sqrt{1 - b^2}$. Recordando que

$$\frac{dx}{d \arcsin x} = 1/\sqrt{1 - x^2}, \quad \frac{dx}{d \cot x} = -\csc^2 x$$

Podemos integrar la ecuación para ϕ , obteniendo:

$$\phi(\theta) = \alpha - \arcsen(\beta \cot \theta) \Rightarrow \sen(\alpha - \phi) = \beta \cot \theta. \quad (\text{III.6})$$

Transformamos este resultado a coordenadas cartesianas para evitar los problemas de indefinición de ϕ para $\theta = 0, \pi$:

$$\begin{aligned} x &= a \sen \theta \cos \phi \\ y &= a \sen \theta \sen \phi \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

$$z = a \cos \theta \quad (\text{III.8})$$

Al reemplazar estas expresiones en la ecuación [III.6], obtenemos

$$\boxed{\beta z = x \sen \alpha - y \cos \alpha}.$$

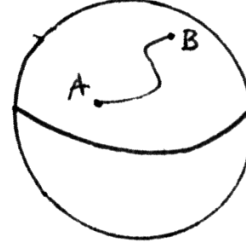


Figura III.14:



Figura III.15:

Esta ecuación sumada a la restricción de ubicar todos los puntos de la trayectoria sobre la esfera, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, nos permite encontrar la curva solución. La primera ecuación restringe los puntos a ubicarse sobre un plano que pasa por el origen (el centro de la esfera). La segunda condición selecciona los puntos ubicados sobre una esfera. Para cumplir ambas condiciones, la curva debe ser un círculo máximo de la esfera.

Está claro que las soluciones son dos y que una es un máximo y la otra un mínimo.

Ejemplo

Consideremos un medio con simetría esférica, en el cual el índice de refracción n , depende solamente del radio: $n = n(r)$. Este es un modelo rudimentario de la atmósfera de un planeta como el nuestro [4].

- i.- Utilizando el Principio de Fermat, encontrar una ecuación diferencial que describa la trayectoria de un rayo de luz en este medio.
- ii.- Suponga que $n(r) = n_o = \text{constante}$. Encuentre la trayectoria de este rayo dada una condición inicial. Interprete físicamente el significado de la condición inicial.

La velocidad de la luz en un medio está dada por $v = c/n$, con c la velocidad de la luz en el vacío. Luego:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{c}{n} \\ \Rightarrow dt &= \frac{n}{c} ds, \end{aligned}$$

de esta forma podemos escribir t como una función de la posición. Integrando la última ecuación, se obtiene:

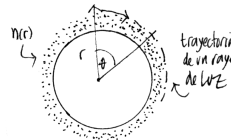


Figura III.16:

$$t = \int_a^b \frac{n}{c} ds,$$

t debe ser un mínimo para los rayos de luz.

Debido a la simetría radial del medio, no se pierde generalidad si consideramos la órbita contenida en un plano determinado por el centro del cuerpo, el punto de partida y la dirección de la velocidad del rayo. En coordenadas polares, el elemento de arco en este plano es:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = dr \sqrt{1 + r^2 (d\theta/dr)^2}$$

donde la curva se parametrizó con el radio $\theta = \theta(r)$. De esta manera el tiempo que toma el rayo en recorrer la curva $\theta = \theta(r)$ entre r_1 y r_2 es (para el caso $n = n(r)$):

$$t[\theta] = \frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} n(r) \sqrt{1 + r^2 \theta'^2} dr$$

El principio de Fermat establece que t debe ser un extremo, es decir $\delta t = 0$ a primer orden. Al usar las ecuaciones de Euler–Lagrange debemos identificar a la variable r como el equivalente del tiempo en el caso dinámico. La variable θ es la única variable adicional que aparece en este problema. El Lagrangiano en este caso es $L(\theta(r), r) = n(r) \sqrt{1 + r^2 \theta'^2}$. La ecuación de Euler-Lagrange para la variable θ es:

$$\frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial(\theta')} L = 0 \quad (\text{III.9})$$

ya que no existe dependencia explícita en θ . Derivando la expresión anterior obtenemos:

$$\frac{n r^2 \theta'}{\sqrt{1 + r^2 \theta'^2}} = \ell, \quad (\text{III.10})$$

donde ℓ representa la condición inicial de este ejemplo: la relación que deben satisfacer $\theta'(r_0)$ y la posición r_0 en el punto de partida. Despejando $\theta' \equiv \frac{d\theta}{dr}$, tenemos:

$$\theta'^2 r^2 (n^2 r^2 - \ell^2) = \ell^2, \quad \frac{d\theta(r)}{dr} = \pm \frac{\ell}{r \sqrt{n^2 r^2 - \ell^2}}. \quad (\text{III.11})$$

La constante ℓ debe tener dimensión de longitud. Recuerde que $n(r)$ es una razón entre velocidades y por tanto no tiene dimensiones. Podemos definir una nueva variable $u(r) \equiv r/\ell$. La ecuación diferencial se transforma en:

$$\frac{d\theta(u)}{du} = \pm \frac{1}{u \sqrt{n^2 u^2 - 1}}.$$

que, al resolverla, nos entrega $\theta(u)$ (o $u(\theta)$). Si se invierte la expresión) para la trayectoria del rayo.

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \frac{1}{u \sqrt{n^2 u^2 - 1}}. \quad (\text{III.12})$$

esta es la ecuación de movimiento requerida en el ejemplo.

Si $n(r) = n_0$ la ecuación III.12 se puede integrar para todo r . La solución es $r = \frac{\ell}{n_0 \sin \theta}$ si escogemos el signo negativo en la ecuación diferencial. esta solución corresponde a una línea recta pasando a una distancia ℓ/n_0 del origen.

Debemos recordar que $n \geq 1$ para no tener velocidades mayores que la velocidad de la luz.

Ejercicio

Estudie el comportamiento de los rayos de luz si

$$n(r) = 1 + \frac{r_0^2}{r^2}.$$

III.3. El origen de $L = T-V$ en la mecánica de Newton

Nota: Esta sección está extraída de los apuntes de Sistemas dinámicos del Profesor Lincoyán González, quien generosamente permitió incluirlos aquí.

III.3.1. Trabajo Virtual

Los conceptos de *desplazamiento virtual* y de *trabajo virtual* se han mostrado de gran utilidad en el desarrollo de la mecánica. Se define como desplazamiento virtual un desplazamiento infinitesimal, arbitrario, ficticio, no necesariamente relacionado con el movimiento real que pueda tener el sistema, durante el cual las fuerzas y el tiempo no varían. A fin de no confundir un desplazamiento real $d\vec{r} = \vec{v} dt$, con un desplazamiento virtual, a este último se le representa por $\delta\vec{r}$. Si el punto de aplicación de una fuerza \vec{F} experimenta un desplazamiento virtual $\delta\vec{r}$, se dice que la fuerza realiza un *trabajo virtual*

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$$

Si el desplazamiento virtual *respeto* las ligaduras que suponemos sin roce, las fuerzas de ligadura no trabajan. Por ejemplo, imaginemos que una partícula está obligada a recorrer una superficie lisa; la fuerza de restricción será la reacción normal, y cualquier desplazamiento virtual que respete las ligaduras deberá ser tangente a la superficie; por lo tanto, el trabajo virtual δW será nulo ya que la fuerza de restricción y el desplazamiento virtual son ortogonales. De ahora en adelante, sólo consideraremos *fuerzas de ligadura sin roce que no trabajan si los desplazamientos virtuales no violan las ligaduras*.

III.3.2. Componentes Generalizadas de la Fuerza

Supongamos un sistema de N partículas sin restricciones cuya configuración queda determinada por las coordenadas cartesianas $\vec{x} = x_1, x_2, \dots, x_{3N}$ y también, por las coordenadas generalizadas $\vec{g} = g_1, g_2, \dots, g_{3N}$. Las componentes cartesianas de la fuerza aplicada serán $\vec{F} = F_1, F_2, \dots, F_{3N}$, las que en un desplazamiento virtual realizan un trabajo virtual $\delta W = \sum F_j \delta x_j$. Se definen como *componentes generalizadas de la fuerza* al conjunto de funciones $\vec{G} = G_1, G_2, \dots, G_{3N}$ que satisfacen el requisito de que $\sum G_i \delta g_i$ sea igual al trabajo virtual de las fuerzas que actúan sobre el sistema. O sea,

$$\delta W = \sum_i^{3N} G_i \delta g_i. \quad (\text{III.13})$$

Nótese que las dimensiones de G_i no son necesariamente las de una fuerza; si las dimensiones de δg_i son las de un ángulo, entonces las de G_i serán las de un torque.

Como el sistema no tiene restricciones, las $3N$ coordenadas son independientes y las componentes generalizadas de la fuerza quedan determinadas en forma única. Para calcular G_i basta elegir un desplazamiento virtual que haga variar sólo g_i ; entonces G_i se obtendrá dividiendo el trabajo virtual por el desplazamiento virtual:

$$G_i = \frac{\delta W}{\delta g_i}$$

donde δW es el trabajo virtual realizado por las fuerzas aplicadas.

Si el sistema no es libre y existen R ecuaciones de ligadura holónomas y $l = 3N - R$ grados de libertad, sólo l de las $3N$ coordenadas generalizadas \vec{g} son independientes y por lo tanto, las fuerzas generalizadas no quedan determinadas en forma única. Sin embargo, si llamamos $\vec{q} = q_1, q_2, \dots, q_l$ al conjunto de l coordenadas generalizadas independientes, podemos definir sin ambigüedad al conjunto de funciones $\vec{Q} = Q_1, Q_2, \dots, Q_l$ como las componentes generalizadas de la fuerza, si *elegimos desplazamientos virtuales arbitrarios, sin roce y que respeten las ligaduras*. De este modo, podremos escribir

$$\delta W = \sum_i^l Q_i \delta q_i. \quad (\text{III.14})$$

Además, como en un desplazamiento virtual sin roce que respeta las ligaduras, las fuerzas de restricción no realizan trabajo, δW representa solo el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas. Ahora, si elegimos un desplazamiento virtual del punto de aplicación de una fuerza de restricción, como su trabajo es nulo, resulta de inmediato de la Ec. III.14 que *la componente generalizada de una fuerza de ligadura es nula*.

De ahora en adelante, sólo consideraremos sistemas holónomos e imaginaremos desplazamientos virtuales que respetan las restricciones que suponemos sin roce. Analicemos entonces un sistema de N partículas con l grados de libertad, sobre el que actúa la fuerza aplicada $\vec{F} = F_1, F_2, \dots, F_{3N}$, expresada en sus componentes cartesianas. La configuración del sistema la suponemos descrita por las coordenadas cartesianas $\vec{x} = x_1, x_2, \dots, x_{3N}$ y

también por las coordenadas generalizadas $\vec{q} = q_1, q_2, \dots, q_l$. Finalmente, suponemos conocida la ecuación de transformación de coordenadas

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_l, t) \equiv x_i(\vec{q}, t), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 3N.$$

Para encontrar Q_i tenemos dos caminos:

- imaginar un desplazamiento virtual que sólo haga variar q_i de modo que sólo trabaje Q_i ; esta componente generalizada de la fuerza Q_i será igual a $\delta W/\delta q_i$, como indicáramos anteriormente;
- o podemos expresar Q_i en función de las componentes cartesianas de la fuerza aplicada, como demostramos a continuación.

De la ecuación de transformación de coordenadas calculamos

$$\delta x_j = \frac{\partial x_j}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_j}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial x_j}{\partial t} \delta t.$$

Sin embargo, el último término es nulo, pues δt es nulo ya que por definición el tiempo no varía en un desplazamiento virtual. Luego,

$$\delta x_j = \sum_i^l \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Reemplazando en la expresión del trabajo virtual, se obtiene

$$\delta W = \sum_j^{3N} F_j \delta x_j = \sum_j^{3N} F_j \sum_i^l \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_i^l \sum_j^{3N} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Comparando directamente con la Ec. III.14 que define las componentes generalizadas de la fuerza

$$\sum_i Q_i \delta q_i = \sum_i \left(\sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i,$$

obtenemos que

$$Q_i = \sum_j^{3N} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad (\text{III.15})$$

expresión que a menudo se considera como la definición de la componente generalizada Q_i de la fuerza.

III.3.3. Las ecuaciones de Lagrange

A partir de las ecuaciones de transformación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas generalizadas calculemos

$$\frac{dx_i}{dt} \equiv \dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \equiv \dot{x}_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t). \quad (\text{III.16})$$

De inmediato resulta que

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (\text{III.17})$$

Ahora, calculemos

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial q_j \partial t}.$$

Si cambiamos el orden de las derivadas parciales se obtiene

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Pero, $\partial x_i / \partial q_j$ es función de \vec{q} y t solamente, por lo que el segundo miembro de la expresión anterior no es otra cosa que el desarrollo de $(d/dt)(\partial x_i / \partial q_j)$. Luego,

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \quad (\text{III.18})$$

Por otra parte, la componente i -ésima de la Segunda Ley de Newton nos da

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) = F_i + F_i^{lig},$$

donde F_i representa la componente respectiva de la fuerza aplicada. De la expresión de la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{x}_j^2$$

obtenemos

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i.$$

Si reemplazamos en la ecuación del movimiento resulta

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = F_i + F_i^{lig}.$$

Si multiplicamos por $\partial x_i / \partial q_j$ y sumamos sobre i se tiene

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_i F_i^{lig} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

En el segundo miembro, de acuerdo con la Ec. III.15, la primera sumatoria representa la componente Q_j de la fuerza aplicada generalizada; la segunda sumatoria representa la componente j de la fuerza de ligadura generalizada y que es nula. Por lo tanto, la relación anterior se reduce a

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = Q_j. \quad (\text{III.19})$$

Teniendo presente que

$$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A \frac{dB}{dt},$$

transformamos el primer miembro de Ec. III.19, resultando

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = Q_j.$$

Si reemplazamos las ecuaciones III.17 y III.18 en la anterior, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = Q_j,$$

que es lo mismo que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial q_j} = Q_j.$$

La relación anterior representa un sistema de l ecuaciones diferenciales de segundo orden para un sistema holónomo con l grados de libertad que se conocen como *ecuaciones del movimiento de Lagrange*.

Supongamos ahora, que las fuerzas del sistema derivan de un potencial que no depende de las velocidades $V = V(\vec{x}, t)$, de modo que

$$F_i = - \frac{\partial V(\vec{x}, t)}{\partial x_i}.$$

Entonces, la componente Q_j de la fuerza generalizada, de acuerdo con la Ec. III.15, será

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \\ &= - \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \\ Q_j &= - \frac{\partial V(\vec{q}, t)}{\partial q_j}. \end{aligned} \tag{III.20}$$

Para este sistema se define una función escalar L llamada *función de Lagrange o Lagrangiano*, de la siguiente manera

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - V(\vec{q}, t), \quad (\text{III.21})$$

de modo que podemos expresar las Ecuaciones de Lagrange en función del Lagrangiano. Puesto que $V(\vec{q}, t)$ no depende de las velocidades $\dot{\vec{q}}$, se cumple que

$$\frac{\partial V(\vec{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} = 0.$$

Reemplazando en la ecuación de Lagrange, Ec. III.3.3, y teniendo presente la Ec. III.20, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0,$$

o sea,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial q_j} = 0.} \quad (\text{III.22})$$

Esta segunda forma de las ecuaciones de Lagrange es aplicable sólo a sistemas holónomos, cuyas fuerzas derivan de un potencial que no depende de las velocidades.

En la sección anterior estudiamos el caso de un lagrangiano con una dependencia funcional específica: $L(\dot{x}, x; t)$. Esta dependencia es la más recurrente y, en particular, nos permite recuperar las ecuaciones de Newton y de este modo enfrentar problemas de dinámica.

No existe un único Lagrangiano para un problema determinado. Existen varios equivalentes (en el sentido de conducir a las mismas ecuaciones de movimiento).

El Lagrangiano que genera las ecuaciones de Newton es el siguiente:

$$L \equiv T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -V'(x) \equiv F(x), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} = F(x).$$

Aquí hemos usado $V(x)$ como el potencial que genera la fuerza $F(x)$.

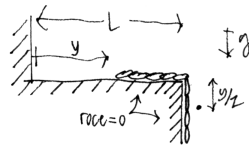
En una sección posterior, estudiaremos el origen de este resultado. Por ahora nos limitaremos a ejercitarnos usando este método.

Ejemplo

Calcular la ecuación de movimiento de la cadena de la Figura. No existe roce entre la mesa y la cadena. La masa por unidad de largo de la cadena es μ y su longitud es L .

La energía cinética está dada por: $T = \frac{1}{2}(\mu L)\dot{y}^2$. La energía potencial es: $V(y) = -\mu g \frac{y}{2} y$. Aquí hemos usado que el largo de la cuerda es igual a la distancia entre el borde de la pared y el extremo del punto desde donde la cadena comienza a caer.

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\mu L)\dot{y}^2 + \mu g y^2/2$$



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \mu L \ddot{y} - \mu g y = 0.$$

Figura III.17:

$$y(t) = A \exp\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{L}} t\right).$$

$\mu \equiv$ masa/(unidad de largo) y $L \equiv$ largo de la cadena. Las condiciones de borde del problema permiten determinar los valores de A y B .

De esta forma hemos indicado cómo los problemas de mecánica se reducen a calcular correctamente la energía cinética y la energía potencial asociada y a

derivar correctamente. De preferencia, los sistemas que estudiaremos con este método son aquellos que conservan la energía, para evitar una dependencia explícita en el tiempo.

Nota: Recordemos que al no investigar el signo de la segunda derivada funcional de la acción S , no sabemos si la ecuación de Euler nos conduce a un máximo, un mínimo o a un punto indiferente. En general en los problemas físicos y geométricos esta condición es evidente y por esta razón no prestamos mayor atención a este punto.

Constantes del Movimiento

Se llama constante del movimiento cualquier función $\phi(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ que se mantiene invariable durante el movimiento del sistema.

III.3.4. El Momentum Generalizado Conjugado

Si el Lagrangiano no depende explícitamente de la coordenada generalizada q_j , se dice que esta coordenada es *cíclica* o *ignorable*, y del Lagrangiano se dice que es *cíclico* en q_j . En este caso, entonces

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

y de la ecuación de Lagrange, Ec III.22, se tiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0,$$

y por lo tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{constante}.$$

Se define el *momentum generalizado conjugado* p_j de la coordenada generalizada q_j como

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (\text{III.23})$$

De acuerdo con lo anterior, hemos encontrado que *si el Lagrangiano es cíclico en algunas de las coordenadas, los momenta conjugados respectivos son constantes del movimiento.*

III.4. Multiplicadores de Lagrange

El siguiente problema ilustra la necesidad de incorporar el formalismo de los multiplicadores de Lagrange a la ecuación de Euler–Lagrange obtenidas anteriormente.

Una cuerda de largo L fijo, se sostiene de sus dos extremos al eje x . Al girarla con respecto al eje x , adopta una forma que queda descrita por la ecuación $y = y(x)$. Encontrar el valor del máximo volumen que puede ser generado por esta rotación.

En este caso se desea encontrar la función $y = y(x)$ que hace máximo el valor del volumen encerrado por la cuerda.

Como es inextensible, esto obliga a que la siguiente integral sea igual al largo de la cuerda: $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = L$. De este modo la función $y(x)$ pierde un grado de arbitrariedad.

Para comenzar conviene plantear un problema de este tipo pero en forma general, sin referirnos explícitamente a la cuerda.

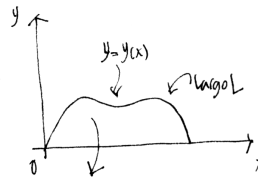


Figura III.18:

III.4.1. Extremo de una Función

Encontremos el extremo de una función $F(x, y)$, sujeta a la condición: $f(x, y) = 0$. Este no es el problema que deseamos resolver, pero nos facilitará la tarea de aceptar la solución propuesta al caso de un funcional.

Valor extremo de $F \Rightarrow 0 = \delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y$, simultáneamente se debe cumplir que $f(x, y) = 0 \Rightarrow \delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y$.

Como existe una condición entre x e y ($f(x, y) = 0$), ocurre que δx y δy *no* son independientes. Para encontrar el valor de δx compatible con el equivalente δy de modo que el desplazamiento suceda a lo largo de la curva $f(x, y) = 0$, o $y = y(x)$, despejamos δy en función de δx desde la última ecuación:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y.$$

Se reemplaza en la expresión de $\delta F = 0$ y recordando que ahora (δx) es *arbitrario*, el factor que multiplica (δx) debe ser necesariamente nulo.

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \left[-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \delta x \right] = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{(\partial f / \partial x)}{(\partial f / \partial y)} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Si intentamos realizar la misma operación con una función que tenga un número mayor de variables, este procedimiento se torna engorroso. Una alternativa que se puede generalizar para n -variables, se describe a continuación.

Manipulando la última ecuación, pero habiéndola ordenado previamente de una forma diferente, tenemos:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) / \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda, \quad (\text{III.24})$$

que se puede expresar como:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (\text{III.25})$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (\text{III.26})$$

a las cuales debemos sumar $f(x, y) = 0$.

Como este es un problema de máximos y mínimos de una función, tenemos tres incógnitas: \bar{x} , \bar{y} y λ . Como se observa, tenemos tres ecuaciones para determinarlas. La función $\lambda = \lambda(x, y)$, que es una incógnita extra incluida en el problema, se determina incluyendo una ecuación adicional: $f(x, y) = 0$.

Escritas de esta forma, las ecuaciones Euler–Lagrange con vínculos pueden generalizarse en forma directa a un caso con un número de dimensiones mayor que dos. Volvamos a obtener esta misma fórmula pero utilizando un método más geométrico.

Supongamos que δx y δy , son arbitrarios. Así, las ecuaciones previas se repiten igual:

$$\text{Si } \delta F = 0 = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y, \quad (\text{III.27})$$

$$\text{y además } \delta f = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y. \quad (\text{III.28})$$

Geom'etricamente esta expresión nos conviene mirarla como un producto escalar en el que participan tres vectores:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right], \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] \text{ y } [\delta x, \delta y].$$

Los dos primeros vectores deben ser perpendiculares al desplazamiento $[\delta x, \delta y]$. Como $F(x, y)$ está dado y no es igual a $f(x, y)$, sus gradientes no son necesariamente iguales. Sin embargo, para que se cumpla que $F(x, y)$ sea un mínimo, debemos encontrar un punto en el plano $[\bar{x}, \bar{y}]$, en cuya vecindad y a primer orden se cumpla que el gradiente de ambas funciones $F(x, y)$ y $f(x, y)$, sean proporcionales. La ecuación que deben cumplir los puntos $[\bar{x}, \bar{y}]$ es que en ellos se cumpla

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

¿Cómo encontramos λ ? Debemos usar la condición $f(x, y) = 0$. De esta forma tenemos tres ecuaciones para tres incógnitas \bar{x} , \bar{y} y λ .

Resumiendo, podemos decir que el problema se reduce a encontrar el extremo de la función:

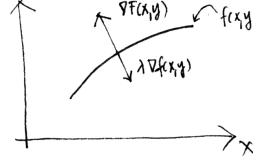


Figura III.19:

$$F(x, y) + \lambda f(x, y),$$

sujeta a la condición:
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y = 0,$$

y, en lugar de imponer una restricción entre δx , y δy , utilizamos $f(x, y) = 0$. De aquí se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ f(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{III.29}$$

En forma análoga podemos pensar en tres dimensiones con una restricción. Resumiremos el argumento para este caso. Los datos son: $f(x, y, z) = 0$ o $z = g(x, y)$ y $F(x, y, z)$, que es la función que queremos extremar bajo la restricción de $f(x, y, z)$. Suponemos el vector desplazamiento $\delta \vec{x}$, arbitrario: como el producto escalar entre los vectores $\nabla F(x, y, z)$ y $\nabla f(x, y, z)$ con $\delta \vec{x}$, debe ser nulo, entonces debe existir un punto (o varios puntos) en el cual ambos gradientes sean proporcionales. En este caso tengo tres ecuaciones: una

por cada componente. Como el punto solución debe satisfacer la ecuación $f(x, y, z) = 0$, esta es la ecuación adicional. Tenemos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas y el problema está determinado.

En general, si tenemos un función $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, que depende de n -variables, por lo tanto está descrita en un sistema de n -coordenadas y se desea encontrar un valor extremo, sujeta a m restricciones (con $m < n$):

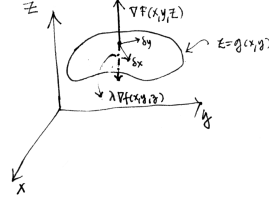


Figura III.20:

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m < n,$$

de acuerdo al método descrito, debemos introducir un multiplicador de Lagrange por cada función f_k . Es decir, el gradiente de $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ debe ser proporcional a una superposición de los gradientes de cada una de las restricciones $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Las ecuaciones que minimizan (o maximizan) esta función, son:

$$\frac{\partial F}{\partial x_\ell} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell} = 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, n, \quad \text{y} \quad (\text{III.30})$$

$$f_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (\text{III.31})$$

La introducción de los multiplicadores de Lagrange nos libera de la obligación de dividir arbitrariamente entre variables dependientes e independientes y extiende naturalmente el procedimiento utilizado para el caso sin restricciones.

III.4.2. Las ecuaciones de Euler–Lagrange con vínculos.

Cuando se trata de extremar integrales, adoptamos, sin demostración, un método similar. Si $F(x_1, \dots, x_n)$ es la función cuya integral se desea extremar sujeta a las condiciones $f_k(x_1, \dots, x_n) = 0$, con $k = 1, 2, \dots, m$, ($m < n$).

Al igual que la solución usada anteriormente podemos considerar la misma función utilizada en el caso anterior:

$$I = \int_A^B [F(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m] dt$$

Ahora realizamos una variación de I en la forma usual:

$$\delta I = 0 = \int_A^B \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_l} + \sum_k^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \right\} \delta x_l dt, \quad \text{con } l = 1, 2, \dots, n.$$

Para el extremo de I se cumple:

$$\frac{\partial F}{\partial x_l} + \sum_k^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_l} = 0 \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

A esto debemos sumarle las m ecuaciones $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ y tenemos el problema resuelto.

Si la función depende de las velocidades:

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t),$$

sujeta a las condiciones

$$f_k(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_n) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m < n.$$

Dentro de este esquema, asumimos, sin demostrarlo, que las ecuaciones de Euler-Lagrange son idénticas a las ya expresadas en el caso sin condiciones adicionales:

$$I = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \right] = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Además: } f_k(q_1, \dots, \dot{q}_n) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

con estas $(m + n)$ ecuaciones resolvemos $q_k(t)$ (n variables) y los λ_k (m variables) que como dijimos pueden ahora depender del tiempo.

(El detalle de estos resultados se puede encontrar en libros de Mecánica Clásica, como el de H. Goldstein, o en K. R. Symon, *Mechanics*, especialmente en el Capítulo 9.)

Ejemplo

A continuación indicamos cómo resolver el problema de maximizar el volumen utilizando una cuerda de largo fijo, propuesto al inicio de esta sección, recurriendo al formalismo recién establecido.

El elemento de volumen es la base por la altura de un cilindro infinitesimal: $dV = \pi y^2 dx$. La integral que debemos extremar es:

$$I = \int_0^L \bar{F}(y, y'; x) = \pi \int_0^L \left[y^2 - \lambda \sqrt{1 - y'^2} \right] dx.$$

Como \bar{F} no depende explícitamente de x y λ es constante, se conserva el equivalente de la energía en un problema mecánico, como demostraremos a continuación:

$$\frac{d}{dx} \bar{F}(y, y'; x) = \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} y' + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} y'' = \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} \right) \right] y' + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} y''.$$

Si los y y y' representan una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d\bar{F}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} y' \right), \text{ o mejor}$$

$$\frac{d}{dx} \left[y' \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} - \bar{F} \right] = 0$$

Como la derivada con respecto a x de esta cantidad es nula, la expresión al interior de la derivada es una constante:

$$\left[y' \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} - \bar{F} \right] = \text{Constante}$$

Nota: Si cambiamos x por t , y por q y y' por \dot{q} , veremos que esta expresión corresponde a la energía en un sistema mecánico. Volveremos a este punto al tratar el caso de un Hamiltoniano.

Aplicado a nuestro problema, la cantidad conservada es:

$$y^2 - \frac{\lambda}{\sqrt{1-y'^2}} = C.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos $y = y(x)$. La constante C y la nueva constante que aparece al integrar se despejan imponiendo las condiciones de borde $y(0) = 0$ e $y(a) = 0$. Reemplazando esta expresión de $y(x)$ en la integral $L = \int_0^a \sqrt{1-y'^2} dx$, obtenemos la otra ecuación para despejar el valor de λ .

A continuación resolveremos el problema de la catenaria aplicando dos puntos de vista diferentes. La catenaria es la forma que toma una cadena o cuerda que cuelga entre sus dos extremos. La cuerda, a diferencia de la viga no opone resistencia al torque. El caso de una viga será el 'ultimo ejemplo que analizaremos.

Ejemplo

Encontrar la forma que adopta una cuerda al colgar entre sus dos extremos. La curva solución se denomina una catenaria.

Resolveremos el problema de la catenaria de dos formas.

Supongamos primero que es una sucesión de barras pivoteadas en sus extremos. De acuerdo a este modelo imponemos la restricciones correspondientes. (Nota: este problema tal como está planteado no tiene primeras derivadas continuas, que es un requisito en el formalismo utilizado.

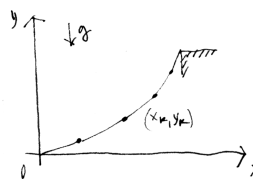


Figura III.21:

Cuando esto sucede pueden existir soluciones que no se logran obtener por este método. Ver H. Goldstein, 2ª edición, página 42).

Afortunadamente, como este problema es posible resolverlo por un método diferente, podemos asegurarnos que no hemos obtenido alguna de las soluciones no deseadas.

$$V_k = \frac{\sigma g}{2}(y_k + y_{k+1})\ell_k$$

Esta es la energía potencial del eslabón k -ésimo. Como siempre, instalamos el origen de coordenadas en el punto más bajo de la cuerda.

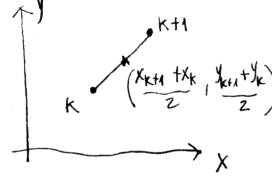


Figura III.22:

La restricción en este caso queda:

$$\{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2\}^{1/2} = \ell_k \quad k = 0, 1, \dots, N_1, \quad \Delta x_k \equiv x_{k+1} - x_k.$$

El problema consiste entonces en minimizar

$$V = \sum_{k=0}^{N-1} V_k + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k (\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2)$$

$\lambda_k \equiv$ multiplicadores de Lagrange, uno por cada eslabón.

Usamos entonces los resultados obtenidos y tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = 0, \quad \implies \quad \lambda_k \Delta x_k - \lambda_{k-1} \Delta x_{k-1} = 0.$$

La solución de esta ecuación es:

$$\lambda_k = \frac{C}{\Delta x_k} \quad (C = \text{constante}) \text{ independiente de } k.$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_k} = 0 = \frac{\sigma g}{2}(\ell_k + \ell_{k-1}) - 2\lambda_k \Delta y_k + 2\lambda_{k-1} \Delta y_{k-1} = 0$$

Reemplazando el valor de λ_k obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\sigma g}{4}(\ell_k + \ell_{k-1}) &= C \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} - \frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta x_{k-1}} \right) \\ \underbrace{\frac{\sigma g}{2} \left(\frac{\ell_k + \ell_{k-1}}{2} \right)}_{ds} &= C \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} - \frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta x_{k-1}} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma g}{2C} = \frac{1}{\Delta s} \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} - \frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta x_{k-1}} \right) \simeq \frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\sigma g}{2C}}$$

Antes de proseguir con esta ecuación diferencial, analicemos este problema como un continuo.

$$dV = \sigma g y ds$$

$$V = \sigma g \int_0^L y ds$$

(suponemos que la curva es simétrica con respecto al eje $x = 0$)

Debemos considerar la cuerda como *inextensible*, por lo tanto:

$$L = \int_0^L ds.$$

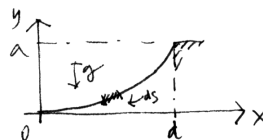


Figura III.23:

Debemos encontrar los extremos de la siguiente integral

$$\bar{V} = \sigma g \int_0^L (y - \lambda) ds$$

Como la función que debemos extremar no depende explícitamente de x , podemos encontrar en forma directa una constante en forma análoga al primer ejemplo de esta sección. Dejamos ese camino como ejercicio. Adoptaremos el camino más largo.

La experiencia indica que es conveniente escribir x e y en forma paramétrica:

$$\begin{aligned} y &= y(\tau) \\ x &= x(\tau) \\ ds &= \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{x}^2} d\tau \end{aligned}$$

$$\bar{V} = \sigma g \int_0^{\tau_0} (y - \lambda) \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{x}^2} d\tau \quad (\text{es necesario redefinir } \lambda)$$

Lo hemos transformado en un problema de dos variables.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(y - \lambda) \dot{x}}{\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{x}^2}} \right] = 0, \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(y - \lambda) \dot{y}}{\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{x}^2}} \right] - \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{x}^2} = 0. \end{aligned}$$

De aquí se obtiene la constante que mencionamos en un comienzo:

$$(y - \lambda) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \bar{c}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\bar{c}}{y - \lambda}, \quad \text{ya que} \quad ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\tau.$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$\frac{d}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\tau} \left\{ \frac{\bar{c}}{\left(\frac{dx}{ds} \right)} \left(\frac{dy}{ds} \right) \right\} = 1, \quad \text{obtenemos:}$$

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{c}}$$

Es posible comprobar que una solución es: $\frac{dy}{dx} = \sinh \alpha x$, $\alpha = \text{constante}$.

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \cosh \alpha x dx$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{\alpha} \sinh \alpha x$$

$$\alpha = \frac{1}{c}.$$

Las condiciones de borde son: $y'(x = 0) = 0$ y $s = L/2 = [\sinh(\alpha d)]$.

La primera indica que el punto más bajo corresponde a la derivada nula. Esto es natural ya que si es el punto más bajo, la pendiente en dicho punto debe ser horizontal. En la segunda condición hemos supuesto que el ancho del precipicio es $2d$ y su altura con respecto al punto más bajo h .

Con estas ecuaciones determinamos las dos constantes: α y λ . Esta última se obtiene reemplazando la solución $y(x) = [\cosh \alpha x]/\alpha - a$, con $a = \text{Constante}$. $y(d) = h = \cosh \alpha d/\alpha - a$. De aquí se despeja a . Si reemplazamos esta expresión en:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\bar{c}}{y - \lambda},$$

se encuentra la expresión para λ .

Ejemplo

Un problema similar lo constituye una barra elástica que se curva debido a una carga que suponemos continua. Como la curvatura de la barra es muy pequeña, consideramos *sólo* los términos lineales en sus derivadas, es decir

$$\sqrt{1 + y'^2} \simeq 1.$$

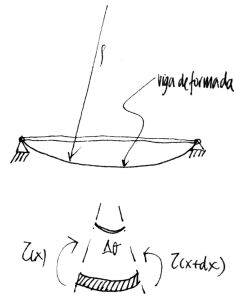
La diferencia con la cadena o cuerda, estudiada anteriormente, aparece porque la viga resiste con un gran torque el cambio de su forma original. Esto no es el caso de la cadena.

No vamos a deducir la energía de deformación de la viga en forma rigurosa. Sólo daremos argumentos que hagan plausible el hecho que debe ser proporcional a $(y'')^2$, donde $y = y(x)$ es la deformación de la viga: el cambio de altura con respecto a la horizontal (o la viga sin deformar).

Como la barra es elástica soporta esfuerzos de corte en sus extremos, 'estos a su vez generan un momento que deforma la viga. 'Este es el origen de la energía de deformación. La energía debe ser $dU = \tau(\theta)d\theta$, que es la fórmula usual para el trabajo de un par. Si recordamos que el torque $\tau(\theta)$ aumenta a medida que con el incremento del ángulo, entonces: $dU = \frac{1}{2}\tau(\theta_0)d\theta$. Recordemos la ley de Euler-Bernuilli:

$$\tau = \frac{k}{\rho}, \text{ donde } k \equiv EI.$$

$E \equiv$ es el módulo de Young.
 I es el momento de inercia de la viga evaluado con respecto a su línea neutra. ρ es el radio de curvatura de la viga. Como suponemos que la deformación es pequeña:



$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} \simeq y''$$

Figura III.24:

Además: $\rho d\theta = ds \simeq dx$. Entonces:

$$dU = \frac{1}{2} \frac{k}{\rho} d\theta,$$

Considerando las aproximaciones anteriores, tenemos:

$$dU \simeq \frac{1}{2} k y'' d\theta = k y'' \frac{dx}{\rho} \simeq k y''^2 dx.$$

El factor $\frac{1}{2}$ fue puesto porque la viga es cargada lentamente. Es el mismo caso que un resorte com'un, donde también aparece un factor $1/2$.

El Lagrangiano (o energía potencial ya que no existe energía cinética) es

$$V_1 = \frac{1}{2} k \int_0^L (y'')^2 dx.$$

Si el peso de la viga fuera relevante (en general no lo es), se debe añadir un siguiente término:

$$V_2 = -\sigma g \int y dx.$$

Finalmente, como hemos despreciado los términos proporcionales a $(y')^2$ no tiene sentido usar la restricción de que el largo de la viga permanece constante.

$$L = \int_o^L ds = \int_o^L \sqrt{1 + y'^2} dx \simeq \int_o^L dx = L \quad (\text{no restringe a la función } y(x))$$

$$V = \frac{1}{2} \int_o^L [(y'')^2 - \sigma g y] dx$$

Usemos la expresión siguiente: Si $L = L(\ddot{q}, \dot{q}, q; t)$ entonces la ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Con esta expresión podemos encontrar la ecuación que regula la deformación de una viga.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial V}{\partial y'} \right) + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

$$k y^{iv} + [-\sigma g] = 0,$$

$$y^{iv} = \left(\frac{\sigma_o g}{k} \right).$$

Sin embargo, la ecuación diferencial propuesta arriba implica ciertas condiciones en los bordes. Estas son:

$$\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial v}{\partial y'} \right) \right) \delta y + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y \right]_a^b = 0.$$

Estas se cumplen si δy y $\delta y'$ son dadas en los extremos.

Los diferentes casos posibles son:

- i) Extremos empotrados : $y(0) = y'(0) = y(\ell) = y'(\ell) = 0$
- ii) Extremos con un soporte : $y(0) = y(\ell) = 0$, se necesitan dos condiciones extras, $y''(0) = 0, y''(\ell) = 0$

Ejercicio

Demuestre que las condiciones de borde de $\delta I = 0$ en los extremos son:

$$k[-y''(\ell)\delta y(\ell) + y''(o)\delta y(o) + y''(\ell)\delta y'(\ell) - y''(o)\delta y'(o)] = 0$$

Ejemplo

Mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange, resolvamos el problema de dos masas m y M unidas por una cuerda, inextensible y sin masa, que pasa a través de una polea sin roce.

Comencemos describiendo este problema con una sola variable y . Esta es una coordenada generalizada puesto que describe unívocamente la posición del sistema. La energía potencial está dada por: $V = (m - M) y g$. El Lagrangiano asociado es:

$$L = \frac{1}{2} [(m \dot{y}^2 + M \dot{y}^2)] + (M - m) g y.$$

las ecuaciones de movimiento son:

$$(m + M)\ddot{y} - (M - m)g = 0,$$

despejando:

$$\ddot{y} = \left(\frac{M - m}{m + M} \right) g$$

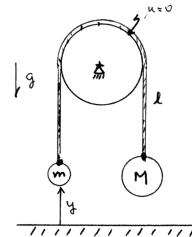


Figura III.25:

A continuación resolveremos el mismo problema pero utilizando dos coordenadas: y_1 e y_2 , con esto debemos imponer la condición adicional $y_1 + y_2 + \ell = 0$ y un multiplicador de Lagrange asociado a esta restricción. Nuestro

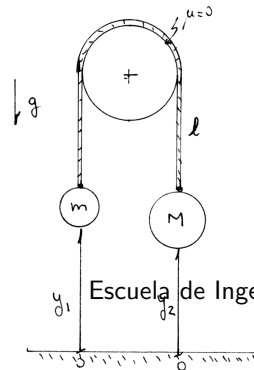


Figura III.26:

interés es descubrir la interpretación física del multiplicador de Lagrange.

La energía cinética está dada por:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_2^2$$

y la energía potencial es:

$$V = +m g y_1 + M g y_2.$$

La restricción sobre las coordenadas es:

$$y_1 + y_2 + \ell = 0.$$

Finalmente el Lagrangiano resulta ser:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_2^2 - m g y_1 - M g y_2 + \lambda(y_1 + y_2 + \ell)$$

y las ecuaciones de movimiento

$$m \ddot{y}_1 + m g - \lambda = 0$$

$$M \ddot{y}_2 + M g - \lambda = 0$$

$$y_1 + y_2 + \ell = 0$$

Restando las dos primeras ecuaciones $m \ddot{y}_1 - M \ddot{y}_2 + m g - M g = 0$ y utilizando la tercera de ellas, $y_2 = -\ell - y_1 \Rightarrow \ddot{y}_2 = -\ddot{y}_1$, se obtiene:

$$(m + M) \ddot{y}_1 = (M - m) g$$

$$\ddot{y}_1 = \left(\frac{M - m}{m + M} \right) g$$

$$\lambda = +m \ddot{y}_1 - m g = -\frac{(M - m) m}{m + M} g - \frac{m(m + M)}{(m + M)} g = -\frac{2 m M}{m + M} g$$

Para entender el significado físico del multiplicador de Lagrange, comparamos este último resultado con la resolución de las ecuaciones de Newton:

$$m \ddot{y}_1 = T - m g,$$

podemos apreciar de aquí que $\lambda \equiv$ a la tensión de la cuerda. Por lo tanto, si queremos encontrar una fuerza que corresponda a una ligadura, debemos relajarla introduciendo una coordenada adicional y el multiplicador de Lagrange estará asociado (no debe ser necesariamente igual, como en este caso) a la fuerza de ligazón.

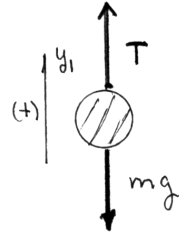


Figura III.27:

III.5. Ejercicios

- 1.- Para que un rayo de luz se enfoque en O' , el tiempo que demora en recorrer OO' debe ser igual al que demora en viajar a través de OPO' . De acuerdo a este principio, similar al que se ocupó en obtener la Ley de Snell, se puede recuperar la ley de los lentes:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Debe suponer que la distancia PQ es muy pequeña.

- 2.- Entre todas las curvas que unen dos puntos dados (x_o, y_o) y (x_1, y_1) , la que genera una superficie mínima al ser rotada en torno al eje x , es la catenaria. Sin embargo, si $|x_1 - x_o| \gg y_o$ y $|x_1 - x_o| \gg y_1$, entonces *no* es posible ajustar una catenaria entre estos dos puntos que denominamos A y B. De hecho no existe ninguna curva suave que genere al rotar, una superficie menor que la línea quebrada $Ax_o x_1 B$. La derivada de esta curva no es continua. La solución en estos casos es adoptar una curva cuya derivada no sea continua, es decir debemos encontrar dos funciones cuyas derivadas sean discontinuas.

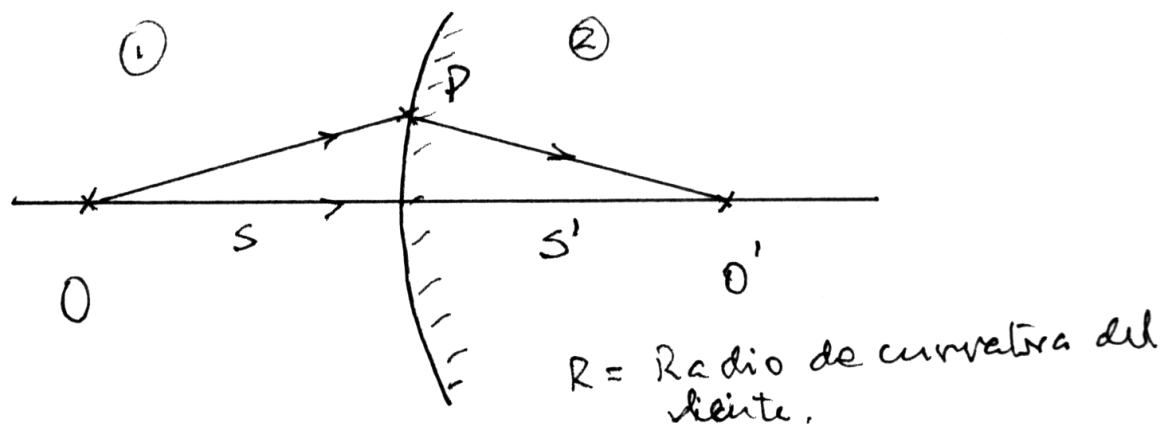


Figura III.28:

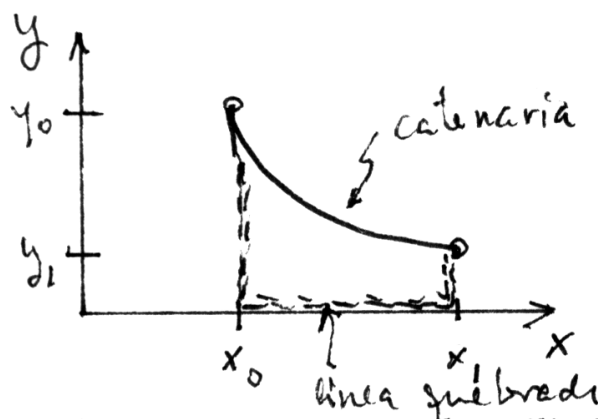


Figura III.29:

Un caso simple que ilustrar esta situación es el siguiente: dado el funcional

$$S[y] = \int_{-1}^{+1} y^2(1 - y')^2 dx, \quad \text{con } y(-1) = 0, \quad y(+1) = \sqrt{2},$$

demuestre que la función $y = y(x)$ que genera un extremo del funcional

$S[y]$ es:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & 1 \leq x < 0 \\ x(1+x) & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

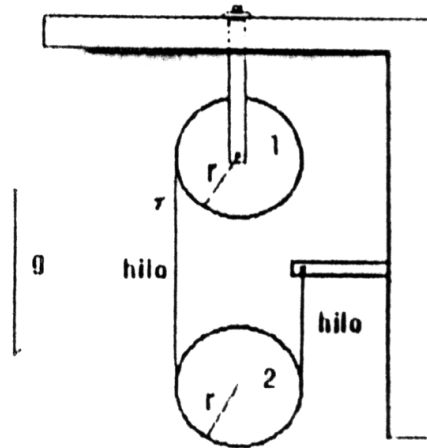


Figura III.30:

- 3.- En la Figura aparecen dos cilindros homogéneos, idénticos, de masa m , radio r y momento de Inercia $I = MR^2/2$. El hilo se encuentra enrollado al cilindro 1 y no se desliza. A su vez, este mismo hilo pasa por el cilindro 2, también sin deslizar. Las barras son fijas y el hilo no tiene masa. Utilizando el método de Lagrange, encuentre: par a) la aceleración del cilindro 2 par b) La tensión τ del hilo que une ambos cilindros.

Respuesta: $\ddot{\theta} = \frac{2g}{7a}$, $\tau = 4mga/7$.

- 4.- Considere un péndulo que oscila en el plano y cuya masa es m_2 . Su punto de suspensión posee una masa m_1 que puede desplazarse en el mismo plano sobre una recta horizontal.

Respuesta:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\ell^2\dot{\phi}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi) + m_2g\ell\cos\phi.$$

- 5.- En este caso, el punto de suspensión del péndulo plano:

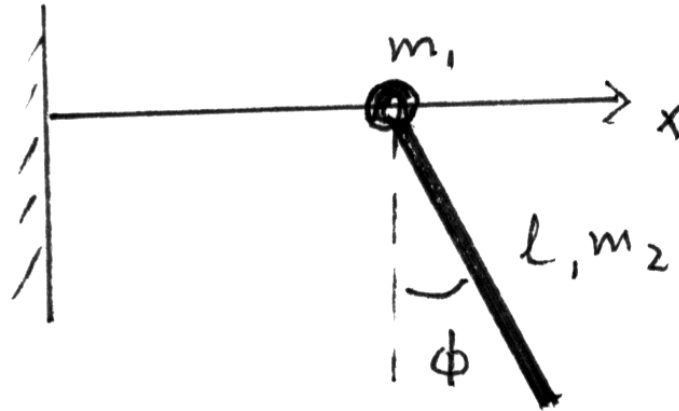


Figura III.31:

a) se deslaza uniformemente sobre una circunferencia vertical con una velocidad angular constante γ :

Respuesta:

$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\phi}^2 + m \ell a \gamma^2 \sin(\phi - \gamma t) + m g \ell \cos \phi.$$

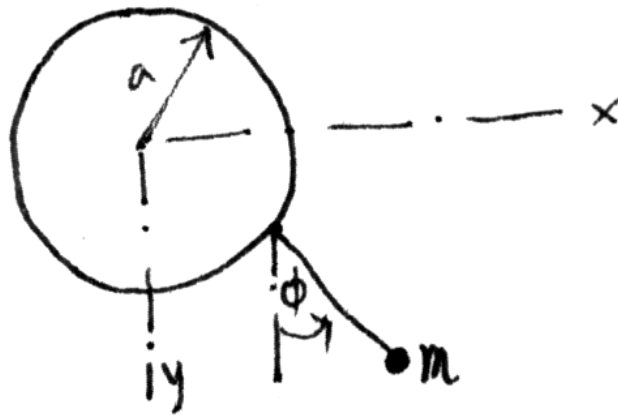


Figura III.32:

b) Oscila horizontalmente en el plano del péndulo de acuerdo a la expresión: $x = a \cos \gamma t$.

- 6.– Demuestre que los siguientes dos Lagrangianos son equivalentes, es decir, generan la misma ecuación de movimiento:

$$L(x, \dot{x}; t) \quad y \quad L' = L(x, \dot{x}; t) + \frac{df(t)}{dt},$$

donde $f(t)$ es una función diferenciable pero arbitraria.

- 7.– Una partícula de masa m , se mueve en un plano vertical a lo largo de la curva parametrizada: $z = h(\eta)$; $x = f(\eta)$ donde el eje z es vertical y apunta hacia arriba. La partícula se mueve bajo la acción de la gravedad. Considerando η como la coordenada generalizada, muestre que el Lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\eta}^2 \left[\left(\frac{dh}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 \right] - mgh(\eta).$$

- 8.– Encontrar el Lagrangiano para una partícula que oscila bajo el efecto de la gravedad y que se encuentra unida por medio de una cuerda de largo variable $\ell(t)$. Suponga que el movimiento se encuentra confinado a un plano vertical. (Ver Figura).

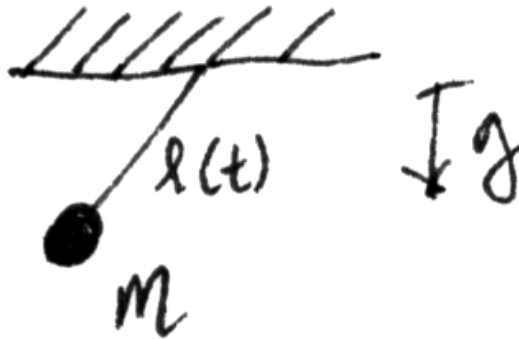


Figura III.33:

- 9.– Un péndulo de masa m_2 y largo L se puede mover en un plano. El punto de soporte está unido a una masa m_1 la cual puede moverse en una línea horizontal en el mismo plano. Encuentre el Lagrangiano

del sistema en función de las coordenadas de la figura. Obtenga las ecuaciones de movimiento.

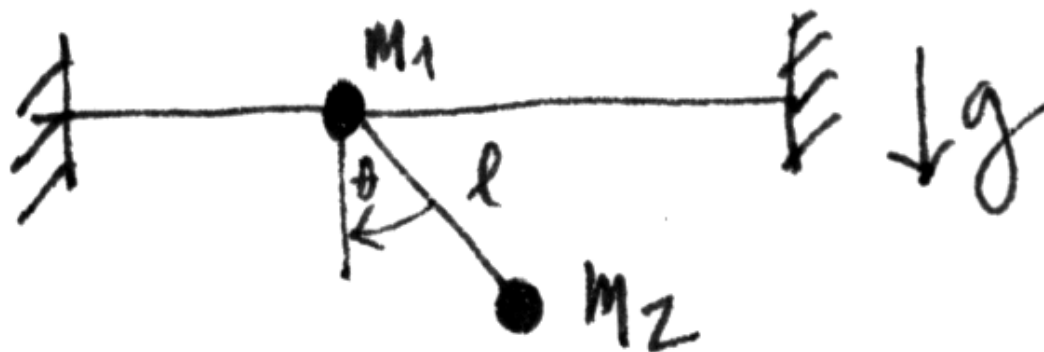


Figura III.34:

- 10.- Se construye un péndulo atando una masa m a una cuerda inextensible de largo ℓ . El otro extremo de la cuerda está fijo al punto más alto de un cilindro horizontal de radio R , con $R < 2\ell/\pi$, como se muestra en la Figura. Asumiendo que el movimiento está confinado a un plano vertical que pasa por A y es perpendicular al eje del cilindro y que la cuerda forma un ángulo ψ con la vertical, Encuentre el Lagrangiano del sistema. Demuestre que la frecuencia angular para oscilaciones pequeñas en torno al punto de equilibrio es:

$$\omega = [g/(\ell - \frac{1}{2}R\pi)]^{1/2}$$

- 11.- Una masa puntual m desliza sin fricción dentro de una superficie de revolución (en coordenadas cilíndricas) $z = \alpha \sin(r/R)$, cuyo eje de simetría apunta en la dirección de un campo gravitacional uniforme g . Considere $0 < r/R < \pi/2$.

Construya el Lagrangiano $L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$ y calcule las ecuaciones de movimiento para las coordenadas r y ϕ . ¿Existen órbitas circulares horizontales estacionarias?

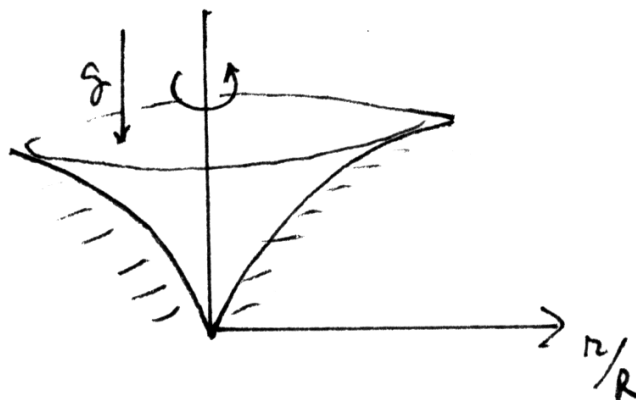


Figura III.35:

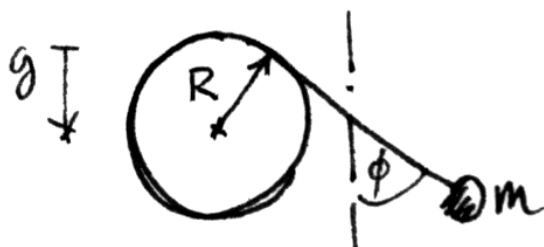


Figura III.36:

- 12.– En óptica geométrica, la trayectoria de los rayos de luz puede deducirse a partir del principio de Fermat. De acuerdo a este principio, la luz sigue la trayectoria que emplea el mínimo tiempo en ir desde un punto P a otro P' .

Suponga que en la zona $z < 0$ existe un medio dieléctrico en el que la velocidad de la luz vale $v = c/n$ ($c \equiv$ velocidad de la luz en vacío) con $n = n_0(1 + \alpha z)$.

Aplique el principio de Fermat para obtener la trayectoria $z(x)$ seguida

por un rayo de luz que incide en P y emerge en P' como muestra la figura, usando la aproximación ($\alpha \ll 1 \Rightarrow \alpha^2$ despreciable).

Note que: $\alpha \ll 1$ implica $v = c/n = c/(n_o(1 + \alpha z)) \approx (c/n_o)(1 + \alpha z)$.

(a) Obtenga la ecuación diferencial para la trayectoria del rayo de luz $z(x)$.

(b) Encuentre la función $z(x)$.

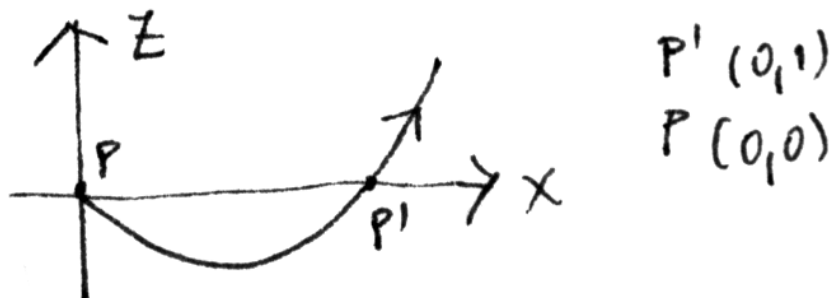


Figura III.37:

- 13.- La figura muestra un marco con momento de inercia con respecto al eje de giro igual a: $I_z = I$. En el plano del marco cuelga un péndulo que sólo puede oscilar en el mismo plano del marco solamente. El péndulo tiene largo ℓ y una masa m .

El marco puede girar libremente en torno al eje \hat{z} .

Encontrar el Lagrangiano del sistema y las ecuaciones de movimiento. Indicación: la energía cinética de un sólido rotando alrededor de un eje fijo con velocidad angular ω es:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- 14.- El Lagrangiano de una partícula de masa \mathbf{m} y carga \mathbf{q} viajando en un campo electromagnético está dado por:

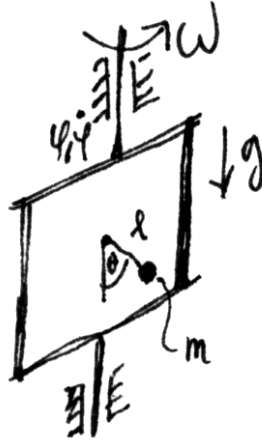


Figura III.38:

$$L = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] + \frac{q}{c}[\hat{A}_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}] - q\Phi.$$

donde \vec{A} y ϕ dependen sólo de las coordenadas x, y, z .

El campo magnético \vec{H} y el campo eléctrico \vec{E} están dados por:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi, \vec{H} = \nabla \times \vec{A}$$

Encontrar: a.- (2 puntos) Las ecuaciones de movimiento de la partícula.

Note que $\frac{dA_x}{dt} = \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}$, es decir, la derivada total de A_x con respecto al tiempo NO es nula. La derivada parcial con respecto al tiempo de A_x es nula. Lo mismo se repite para cada componente: A_y, A_z .

b.- (4 puntos) Encontrar la trayectoria de la partícula en función del tiempo para el caso: $\vec{H} = H_0\hat{k}$ y $\vec{E} = 0$. Las condiciones iniciales ($t = 0$) son: $v_y \equiv \dot{y}_0 = v_0$, y el resto de las componentes de la velocidad nulas en $t = 0$. La posición de la partícula en $t = 0$ es: $x = x_0$ y $z = y = 0$.

Indicaciones:

i.- Note que si $\vec{E} = 0$, entonces $\phi = \text{constante}$. Una constante no afecta las ecuaciones de movimiento (¿Por qué?).

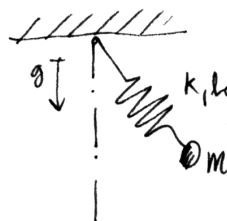
ii.- Note que $H_x = \hat{i} \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right], H_y = \hat{j} \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right], \dots$ como $H_z = \text{constante} = H_0$, compruebe que el potencial $A_y = H_0x$, genera un campo magnético constante.

Le conviene demostrar que la partícula permanece en el plano $z = 0$. En seguida procure demostrar que el movimiento es una circunferencia en este plano. Debe encontrar el radio de la circunferencia.

NOTA: Las ecuaciones escritas aquí para el campo eléctrico \vec{E} y el magnético \vec{H} en función de los potenciales, son válidas siempre que sean campos estáticos (independientes del tiempo).

Problema Resuelto

El péndulo de la figura está compuesto por un resorte de constante k , largo natural ℓ_o y una masa esférica m . Se pide encontrar las ecuaciones de movimiento en una vecindad a las posiciones de equilibrio.



Solución:

Coordenadas generalizadas. θ, r

Figura III.39:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

por lo tanto

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad U = \frac{1}{2} k (r - \ell_o)^2 - m g r \cos \theta,$$

donde

$$x = r \sin \theta$$

$$y = -r \cos \theta$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y} = -\dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\text{luego } \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2,$$

$$\text{Lagrangiano} \equiv L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{1}{2} k(r - \ell_o)^2 + m g r \cos \theta$$

Problema Resuelto

Un anillo de masa m desliza sin roce y bajo la acción del campo gravitacional, sobre una circunferencia de radio a . Esta circunferencia se ubica en un plano vertical como lo señala la Figura. Utilizando el cálculo variacional y las ecuaciones de Euler-Lagrange, calcule:

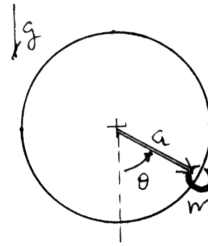


Figura III.40:

a) Las ecuaciones de movimiento de la partícula.

b) Escriba el Lagrangiano asociado a esta partícula moviéndose en un plano vertical e imponiendo -vía multiplicadores de Lagrange-, la restricción que su trayectoria se ajuste a la circunferencia de la Figura.

Escriba las ecuaciones de movimiento para este caso.

c) Utilizando estas ecuaciones determine el valor del multiplicador de Lagrange en función del ángulo θ e interprete su significado.

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad V = -m g r \cos \theta$$

$$\text{a) } r = a \quad L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + m g a \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow m a^2 \ddot{\theta} + m g a \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin \theta = 0$$

$$\text{b) } L = T - V + \lambda f \Rightarrow L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + m g r \cos \theta + \lambda (r - a)$$

$$f = 0 \Rightarrow r - a = 0$$

$$\boxed{r} : m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 - m g r \cos \theta - \lambda = 0$$

$$\boxed{\theta} : m(r^2 \ddot{\theta}) + m g r \sin \theta = 0$$

$$\boxed{f} : r = a$$

c) Imponiendo la última ecuación en las anteriores, se obtiene:

$$\lambda = -m a \dot{\theta}^2 - m g a \cos \theta$$

Pero, de la conservación de la energía

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{a} \cos \theta = \frac{E}{m a^2} \equiv E^* \quad \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a} \cos \theta + 2E^*}$$

$$\lambda = -m a \frac{2g}{a} \cos \theta - m g a \cos \theta - 2 m a E^*$$

$$\lambda = -3 m g a \cos \theta - 2 m a E^* = 3 m g a \cos \theta - 2 E^* / a$$

$$[\lambda] \equiv \text{Fuerza}$$

Bibliografía

- [1] **Mathematics Magazine**, **78**, N^0 1, February 2005, page 3-14.
- [2] **Mecánica**, L. D. Landau y E. M. Lifshitz, 1965, Editorial Reverté.
- [3] **Classical Mechanics** , H. Goldstein, 1980, Second Edition, Addison Wesley
- [4] **Fermat's principle and the variational analysis of ...** , M. Marklund, D. Anderson, F. Cattani, M. Lisak and L. Lundgren, Am. J. Phys. **70**, # 7, July 2002, page 680.
- [5] **The American Mathematical Monthly**, **110**, # 7, August-September 1994, pag. 674-678.
- [6] **Mathematical Methods of Classical Mechanics**, V. I. Arnold, 1980, Springer Verlag (Es un libro avanzado. Tiene ejemplos interesantes.)
- [7] **Calculus of Variations**, I. M. Gelfand, S. V. Fomin, 1963, Prentice Hall.
- [8] **Theoretical Mechanics of Particles and Continua**, A. L. Fetter and J. D. Walecka, 1980, McGraw-Hill book Company.
- [9] Casi todos los libros de mecánica incluyen al final una sección con estos temas: Symon, Synge and Griffiths, Schaum's: Theoretical Mechanics,...