

FISICA MODERNA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 23 de agosto de 2004

Índice general

VI. Caos	271
VI.1. Ecuación Logística	271
VI.1.1. Método gráfico para iterar la ecuación logística	274
VI.1.2. Cómo se genera el doblamiento de período	275
VI.1.3. Estabilidad de los puntos fijos	278
VI.1.4. Propiedades de la doble iteración	284
VI.2. Dimensión Fractal	290
VI.3. Atractores Extraños	294
VI.4. Mapeo de Lorenz	295
VI.5. Mapeo de Henon	299
VI.6. Exponente de Liapunov	303
VI.6.1. Separación de órbitas	303
VI.6.2. Exponente de Liapunov	306
VI.7. Ejercicios	310

Capítulo VI

Caos

VI.1. Ecuación Logística

La siguiente ecuación es conocida como la ecuación logística:

$$\frac{dN}{dt} = [B(N)] - D(N)], \quad \text{donde:} \quad (\text{VI.1})$$

B: tasa de nacimiento

D: tasa de mortalidad

N: # de habitantes.

Esta ecuación tiene su origen en un modelo propuesto para cuantificar las variaciones en el número de un grupo de seres vivientes. En general la población de un grupo de animales es afectada por los cambios que ocurren en su medio, ya sea por de falta de alimento, exceso de población, depredadores...etc.

En muchos sistemas biológicos, sociales y económicos, esta ecuación no se puede aplicar directamente porque existen variables que obedecen a las estaciones del año o a ciclos temporales pre-establecidos. En estos casos el tiempo no es una variable continua.

Si definimos el intervalo de tiempo Δt como la unidad de medida para el tiempo, entonces la ecuación logística se transforma en:

$$\frac{dN(t)}{dt} \equiv \frac{N_{t+1} - N_t}{\Delta t} = N_{t+1} - N_t = B_o N(t) - D_o N^2(t),$$

donde hemos supuesto que la tasa de crecimiento de la población es directamente proporcional a la población actual $B(N) = B_o \cdot N$, y la tasa de mortalidad proporcional al cuadrado de la población: $D(N) = D_o \cdot N^2$, entonces:

$$N(t+1) = N(t) + B_o N(t) - D_o N^2(t),$$

$$N(t+1) = [B_o + 1] N(t) - D_o N^2(t),$$

$$\text{Definiendo } b \equiv [B_o + 1], \quad D_o \equiv c, \text{ tenemos}$$

$$N(t+1) = b N(t) - c N^2(t), \quad \text{redefiniendo } N(t) \equiv \frac{b}{c} x(t) :$$

$$x(t+1) = b[1 - x(t)]x(t)$$

Esta última es la forma canónica de la ecuación logística, y la que nosotros utilizaremos a continuación.

Cuando $x(t+1)$ toma la forma x_{t+1} hablamos de un *mapeo* en lugar de un flujo.

Para llegar a esta expresión, tuvimos que *modelar* la tasa de crecimiento de la población de un cierto tipo de animales. Por ejemplo, supusimos que la tasa de crecimiento era directamente proporcional a la población del instante $N(t)$. Analogamente, la tasa de mortalidad la supusimos proporcional al cuadrado de la población $N(t)^2$. Estos son supuestos que describen, en primera aproximación, el comportamiento de algunos grupos de animales. Tiene además la ventaja de tener un comportamiento bastante más complejo de lo que uno se imagina.

La importancia de esta ecuación radica, como ya se mencionó, en la riqueza y generalidad de sus resultados. Las propiedades que aparecen con esta iteración, se repiten en otras ecuaciones que no tienen gran semejanza con ésta. La única condición que debe cumplirse para obtener un comportamiento similares, es que la función estudiada tenga segunda derivada negativa en la vecindad del máximo.

Si graficamos el mapeo $x_{t+1} = f(x_t)$, se encuentra que la conducta depende fuertemente del valor que toma el parámetro b . De hecho,

- si $0 < b < 1$, $x_t \rightarrow 0$ con $t \uparrow$ rápidamente
- si $4 < b$, $x_t \rightarrow +\infty$ con $t \uparrow$

Ejercicio

Demostrar (o dar un argumento de plausibilidad) que justifique las dos afirmaciones anteriores.

Nos restringiremos a valores del parámetro b comprendidos entre $1 < b < 4$. En esta región es donde ocurre la parte interesante de esta función. En consecuencia: $0 \leq x_t \leq 1, \forall t$. De esta forma el mapeo copia el intervalo $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$. El teorema del punto fijo, garantiza que en estas condiciones existe un punto x tal que $x = f(x)$.

Veamos gráficamente donde sucede esto. Los puntos fijos están determinados por la intersección entre la línea recta que bisecta el primer cuadrante: $y_1 = x$ y la parábola $y = bx(1-x)$.

El valor de este punto fijo \bar{x} , se obtiene igualando ambas ecuaciones $y_1 = y$:

$$\bar{x} = b\bar{x}(1-\bar{x}) \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{x} = 1 - \frac{1}{b}$$

$$b = 1 \Rightarrow \bar{x} = 0 \quad b = 2 \Rightarrow \bar{x} = 1/2$$

$$b = 4 \Rightarrow \bar{x} = 3/4$$

El máximo de la iteración se produce para $x = 1/2$

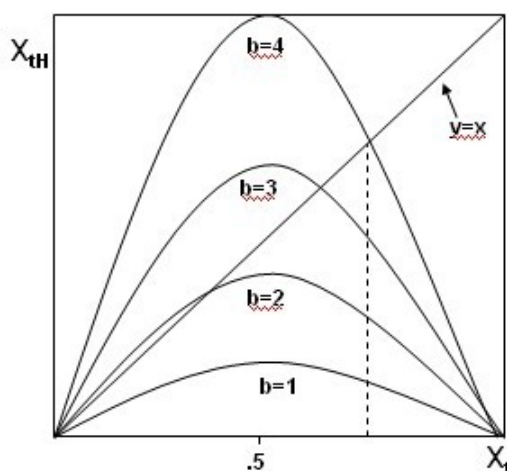


Figura VI.1: La recta que aparece en la Figura, constituye una herramienta muy útil para representar el mapeo de la ecuación logística en forma gráfica. Se incluye la función $x(t)$ para distintos valores de b .

$$\frac{df}{dx} = 0 = b - 2bx \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Para valores de $b < 3,6$ el sistema oscila con períodos 2, 4, Estos puntos se llaman atractores”. Para $b > 3,6$ el movimiento de x_{t+1} en el gráfico se torna caótico, pierde la periodicidad. Sin embargo existen islas, por ejemplo en $b = 3,84...$ se produce un movimiento periódico con $T = 3$.

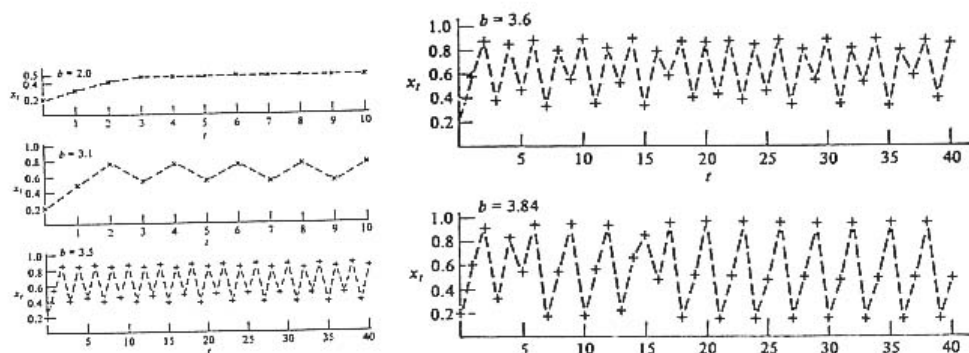


Figura VI.2:

VI.1.1. Método gráfico para iterar la ecuación logística

Examinemos gráficamente el comportamiento de la ecuación logística, $x_{t+1} = F_b(x_t)$, utilizando la bisectriz $y = x$. El punto de intersección de ambas curvas es el punto fijo. Para determinar el punto siguiente se opera de la siguiente forma:

- se ubica el punto de partida en el eje x y se levanta la vertical hasta alcanzar la curva proveniente de la ecuación logística,
- desde dicho punto, se traza una horizontal para llegar al eje vertical y así determinar $x(t+1)$.
- A partir de este punto se traza la horizontal hasta llegar a la bisectriz $y = x$. Con esto determinamos automáticamente la posición de $x(t+1)$ en el eje x .

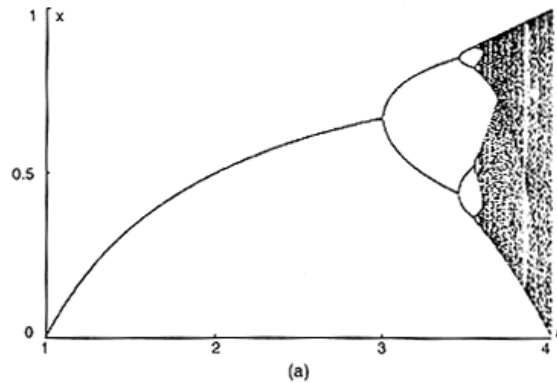


Figura VI.3:

• Desde esta intersección trazamos una línea *vertical* (hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del caso) hasta tocar la curva logística. Con esto hemos determinado $x(t+2)$. Ahora se vuelve al segundo punto de esta iteración, y así sucesivamente...

En resumen: a partir de un punto de la ecuación logística siempre se debe trazar una horizontal buscando el eje ordenado. Del eje ordenado siempre una horizontal buscando la bisectriz. De la bisectriz siempre una vertical para interceptar la curva logística.

VI.1.2. Cómo se genera el doblamiento de período

En el gráfico de la Figura, al aumentar el parámetro b , lentamente el punto fijo (estable) \bar{x} se desplaza y la pendiente de la curva comienza a ubicarse en la vecindad de (-1) . Al continuar aumentando b , logra alcanzar este valor (-1) . En ese instante, como se indica en la Figura, desde cualquier punto $x(0)$ que uno comience, después de un cierto número de iteraciones se queda atrapado en el rectángulo que se indica. P y Q se ubican en una línea perpendicular a $y = x$, de forma que su intersección con $y = x$ sea el punto medio de PQ . Entonces PQ son los vértices de un cuadrado y las ordenadas correspondientes son los puntos entre los que oscila $F_b(x)$. Se incluyen otras figuras a continuación para ilustrar

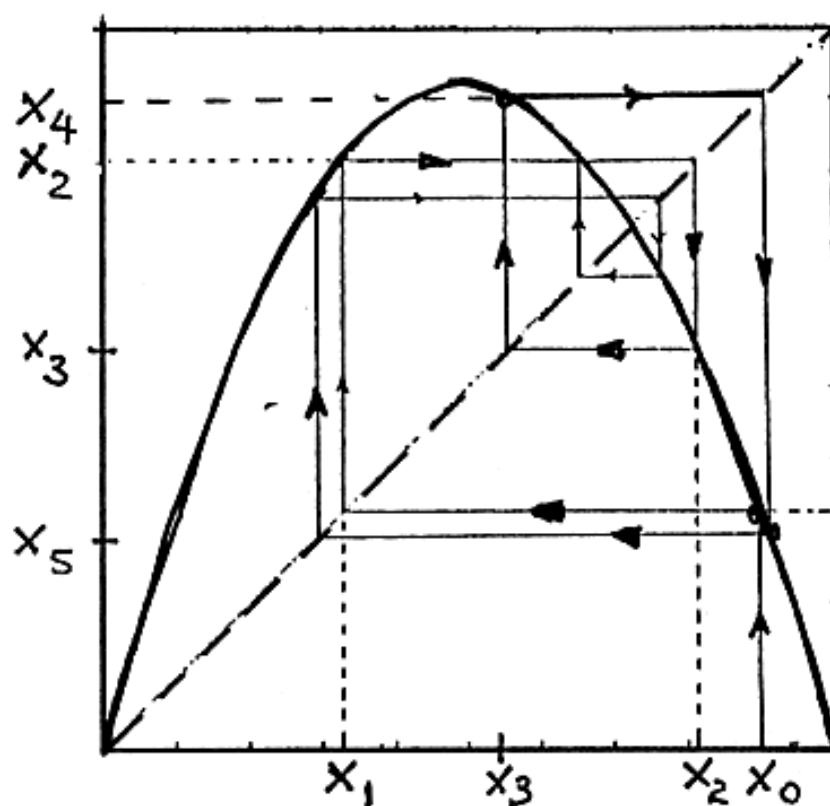


Figura VI.4:

cómo opera este mecanismo y qué sucede con la doble iteración, que es el tema de la siguiente sección.

Ver Figuras extraídas de Los Alamos Science 1, 4-27 (1980) Mitchell J. Feigenbaum, *Universal Behavior in Nonlinear Systems*.

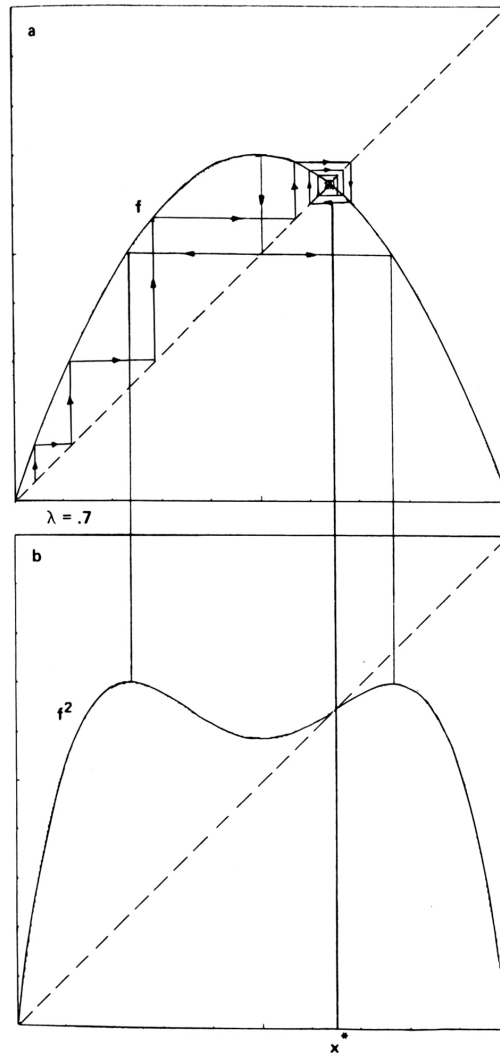


Figura VI.5: Se muestra el punto fijo estable, en la figura superior y el mismo punto en la doble iteración. también es estable. La iteración converge al punto fijo desde cualquier punto inicial.

A continuación estudiaremos la *estabilidad de los puntos fijos* y como el sistema evoluciona desde un punto fijo hacia otro par de puntos fijos y así sucesivamente hasta tornarse caótico.

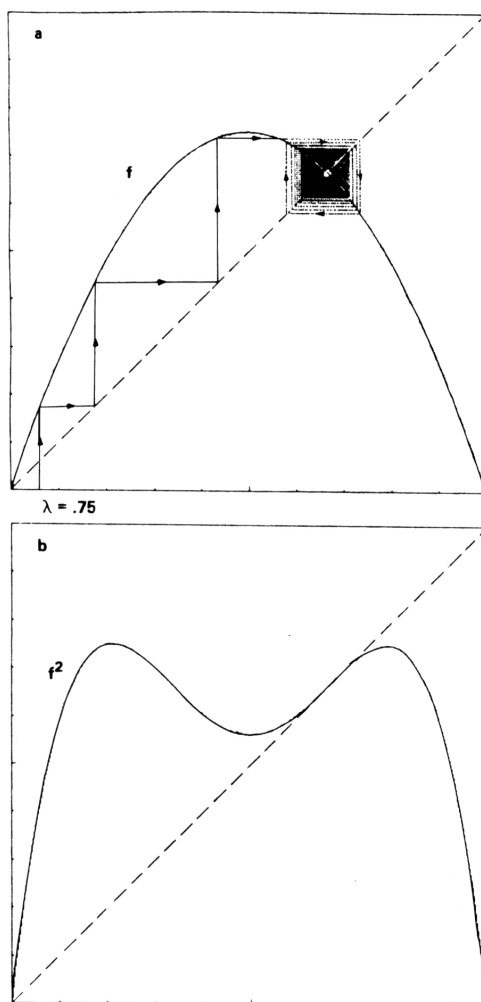


Figura VI.6: Al aumentar el valor de b , la iteración se torna inestable. Demora en alcanzar el punto fijo. En la doble iteración, la pendiente en el punto fijo alcanza el valor crítico: pendiente unidad.

VI.1.3. Estabilidad de los puntos fijos

Para estudiar la estabilidad debemos operar en forma similar al empleado en los sistemas autónomos: se desarrolla la ecuación (o las ecuaciones, si hay más de una) en serie de Taylor alrededor del punto fijo, se trunca el desarrollo en serie al

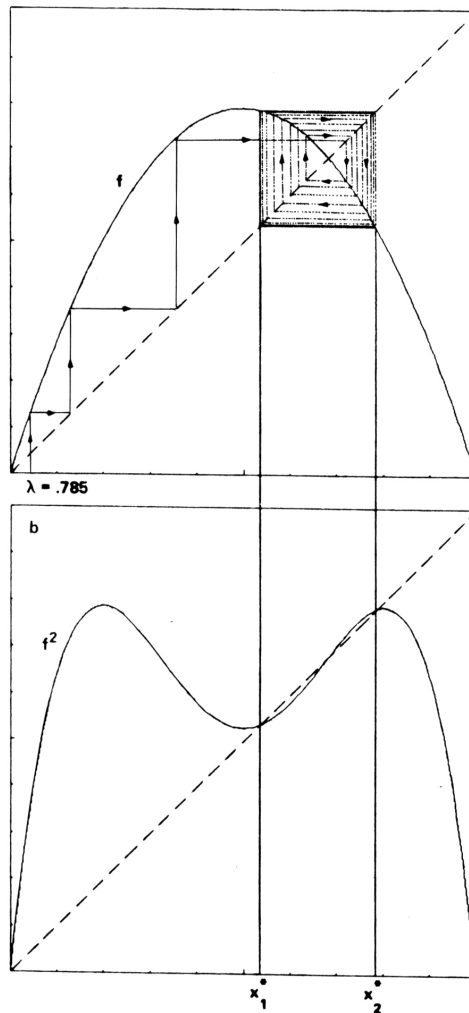


Figura VI.7: Al aumentar b , el punto fijo de la iteración directa se torna inestable. En cambio el de la doble iteración (cruce de la diagonal con f^2) es estable y la iteración adquiere el período doble.

primer orden y se estudia cómo evoluciona la iteración. Si crece rápidamente, el punto fijo es inestable. Al contrario si la iteración tiende asintóticamente al punto fijo éste es estable.

Procedamos con la iteración:

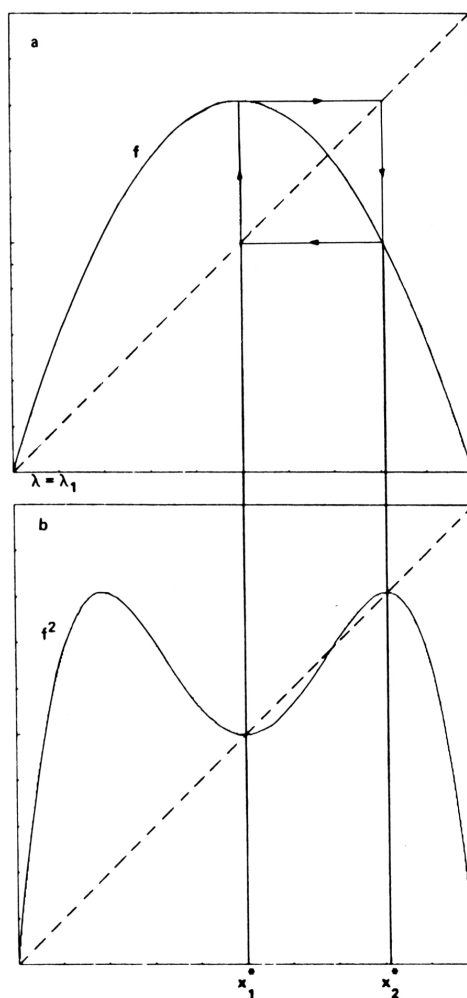


Figura VI.8: La doble iteración alcanza un equilibrio superestable.

$$F_b(x_t) \equiv bx_t(1 - x_t) = x_{t+1},$$

Como se quiere encontrar la estabilidad del punto fijo, usamos un desarrollo de Taylor en su vecindad. Tomemos un punto $x = x_t$ cercano al punto fijo que identificamos con \bar{x} .

$$F_b(x_t) \simeq F_b(\bar{x}) + F'_b|_{\bar{x}}(x_t - \bar{x}) + O[(x_t - \bar{x})^2],$$

$$F_b(x_t) \equiv x_{t+1} \simeq \bar{x} + F'_b|_{x=\bar{x}} \cdot (x_t - \bar{x}),$$

$$(x_{t+1} - \bar{x}) = \alpha(x_t - \bar{x}), \quad \left(\alpha \equiv \frac{dF_b}{dx} \Big|_{x=\bar{x}} \right),$$

$$y_{t+1} = \alpha y_t, \quad \text{donde se definió } y_t \equiv x_t - \bar{x},$$

$$y_{t+2} = \alpha^2 y_t,$$

$$y_{t+n} = \alpha^n y_t \Rightarrow \begin{array}{ll} |\alpha| < 1 & \text{ESTABLE} \\ |\alpha| > 1 & \text{INESTABLE} \end{array}$$

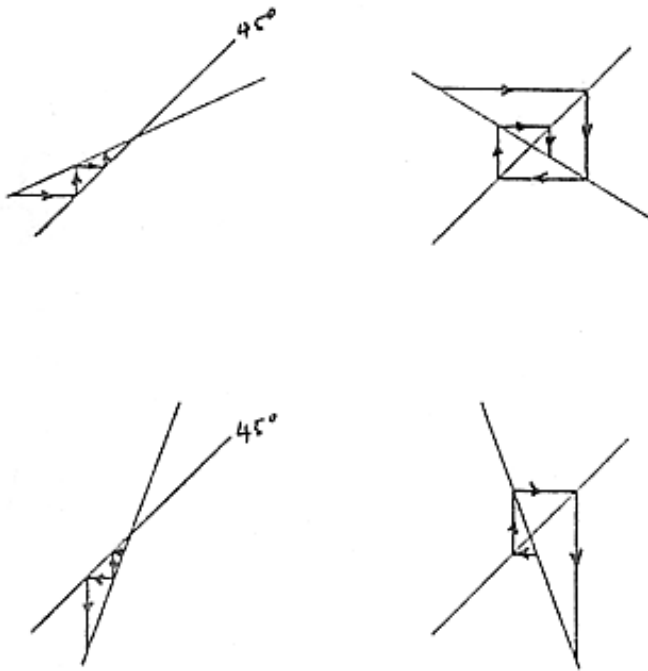


Figura VI.9:

Calculemos el valor de F'_b para el punto fijo y así establecer el rango de b para el cual los puntos fijos permanecen estables.

$$F'_b = b - 2bx,$$

$$F'_b|_{\bar{x}} = b - 2b \left(1 - \frac{1}{b}\right) = -b + 2,$$

$$F'_b|_{\bar{x}} > 1, \quad |2 - b| > 1 \Rightarrow b > 3, \quad \text{INESTABLE}$$

$$|2 - b| < 1 \Rightarrow b < 3 \quad \text{ESTABLE.}$$

Antes de llegar al valor $b = 3$, la iteración rápidamente se acomoda en un punto fijo y se establece allí. Al superar $b = 3$ este punto fijo se torna inestable y la iteración comienza a oscilar entre dos puntos fijos. Al seguir aumentando lentamente el valor de b , comienzan a aparecer desdoblamientos sucesivos de los puntos fijos. Finalmente desaparecen los puntos fijos, no mantiene la periodicidad y comienzan a cubrir densamente el intervalo $[0, 1]$. Este es el régimen caótico.

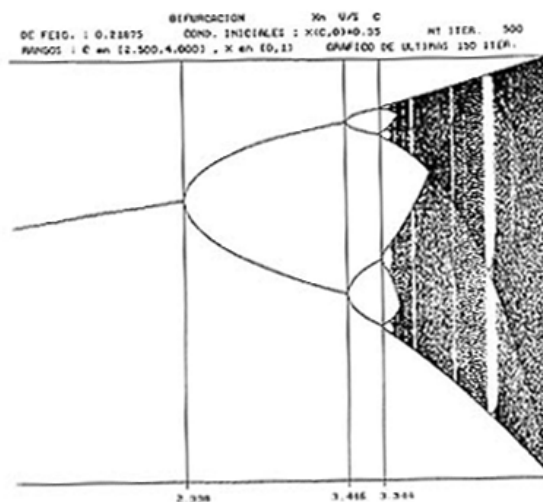


Figura VI.10:

Dentro del régimen caótico vuelven a aparecer ventanas con puntos fijos periódicos que desaparecen al aumentar b , pero que presentan una estructura de desdoblamiento similar a la mencionada para valores más bajos de b .

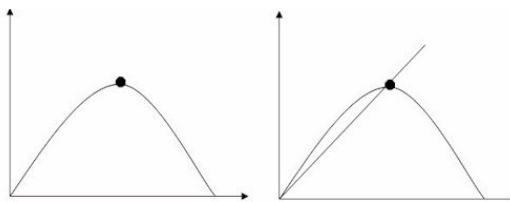


Figura VI.11:

Ejemplo

Analicemos cómo evoluciona la ecuación logística en la vecindad de un punto denominado *superestable*.

Un punto superestable es aquél que cumple los siguientes requisitos:

$$F'_b|_{\bar{x}} = 0, \quad \bar{x} = F_b(\bar{x})$$

Se denomina superestable porque en el desarrollo en serie de Taylor es necesario incluir términos hasta segundo orden. Ocurre en los puntos fijos de las composiciones de funciones $f(f(x))$ o $f(f(f(f(x))))...$, que son precisamente el origen de las bifurcaciones y los doblamientos de periodo. Más adelante incluiremos otros gráficos donde se ilustran situaciones más complejas.

$$F_b(x_t) = \bar{x} + F'_b|_{\bar{x}}(x_t - \bar{x}) + F''_b|_{\bar{x}} \frac{(x_t - \bar{x})^2}{2} + 0[(x_t - \bar{x})^3]$$

$$F_b(x_t) \equiv x_{t+1} \approx \bar{x} + 0 + F''_b|_{\bar{x}} \frac{(x_t - \bar{x})^2}{2},$$

$$x_{t+1} - \bar{x} = -\beta \frac{(x_t - \bar{x})^2}{2}, \quad \beta \equiv -F''_b|_{\bar{x}}, \text{ de esta forma } \beta > 0$$

pues, $F''(x) < 0$ para $0 < x < 1$.

$$y_{t+1} = -\frac{\beta}{2} y_t^2$$

La solución de esta ecuación es:

$$y_t = -\frac{a^{2^t}}{\beta}, \quad (y_0 = -\frac{a}{\beta} \Rightarrow a) \quad \square$$

VI.1.4. Propiedades de la doble iteración

Para averiguar cómo el sistema se aleja de un punto fijo y se establece en otros dos puntos fijos, debemos estudiar las propiedades de la doble iteración, y en esta ecuación imponer la condición de punto fijo. Las soluciones obtenidas corresponderán al par de puntos fijos x_1 y x_2 encontrados al iterar la ecuación logística para un cierto valor del parámetro b . En seguida podemos aplicar los métodos gráficos para estudiar la estabilidad de dichos puntos.

La ecuación de la iteración doble es:

$$F_b^2(x_t) = F_b(F_b(x_t)) = F_b(bx_t(1-x_t)) = b[bx_t(1-x_t)][1-bx_t(1-x_t)],$$

donde en la última igualdad hemos hecho actuar el operador $F_b(x_t)$ sobre la expresión $bx_t(1-x_t)$, obteniendo el resultado indicado. Olvidándonos de los índices, que en el siguiente paso son irrelevantes podemos considerar esta expresión como una función:

$$F_b^2(x) = b^2x(1-x)(1-bx+bx^2),$$

este es un polinomio de cuarto grado. Para encontrar los puntos fijos debemos imponer que $x = F_b^2(x)$:

$$x = F_b^2(x) = b^2x(1-x)(1-bx+bx^2)$$

Como esta ecuación tiene una raíz trivial $x = 0$, se transforma en una de tercer grado:

$$0 = -\frac{1}{b^2} + (1-x)(1-bx+bx^2).$$

Este polinomio puede tener una raíz real y dos complejas conjugadas o tres soluciones reales. En la Figura se indican las raíces encontradas en forma geométrica.

En la Figura se indica la forma de la doble iteración (izquierda) y de la triple iteración (derecha). Los tres puntos obtenidos al interceptar la recta $y = x$ con la doble iteración se obtienen tres puntos fijos, incluyendo el origen. Sólo dos de ellos son estables.

¿Qué sucede con $F_b^2(x)$ en la vecindad del punto fijo de $F_b^1(x) = bx(1-x)$?

A continuación demostramos que, en el caso de periodicidad doble, es decir cuando hay dos puntos fijos, la estabilidad de ambos puntos cambia de la misma forma en ambos.

La importancia de este resultado es que al variar b , la estabilidad de *ambos* puntos se destruye *simultáneamente*. De otra forma al variar b uno de los puntos permanecería fijo y el otro desaparecería y de esta forma no tendríamos el fenómeno del doblamiento de periodo.

Comencemos recordando las propiedades de los puntos fijos dobles:

$$F_b^2(x_1) = x_1 \quad \text{por otra parte} \quad F_b^2(x_2) = x_2,$$

$$\text{tambi'en} \quad F_b(x_1) = x_2, \quad F_b(x_2) = x_1.$$

Ahora escribamos la derivada de la doble iteración evaluada en $x = x_2$, utilizando explícitamente la composición de funciones que se da en la doble iteración y, en seguida, la regla de la cadena en la derivación:

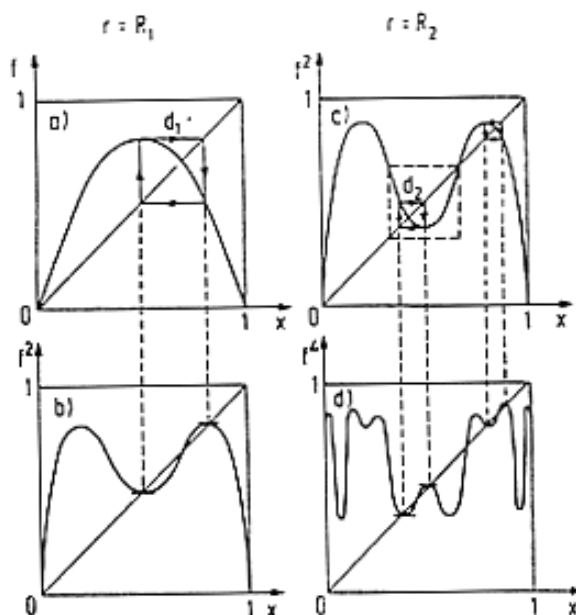


Figura VI.12:

$$\left. \frac{dF_b^2(x)}{dx} \right|_{x=x_2} = \left. \frac{dF_b(F_b(x))}{dx} \right|_{x=x_2} = \left. \frac{dF_b(F_b(x))}{dF_b(x)} \right|_{x=x_2} \left. \frac{dF_b(x)}{dx} \right|_{x=x_2}.$$

En la segunda igualdad se utilizó la regla de la cadena.

A continuación haremos uso de las relaciones que existen entre los dos puntos fijos –ya establecidas más arriba–, para relacionar la derivada en $x = x_2$ con aquella en $x = x_1$.

$$\left. \frac{dF_b(F_b(x))}{dF_b(x)} \right|_{x=x_2} \left. \frac{dF_b(x)}{dx} \right|_{x=x_2} = \left. \frac{dF_b(x)}{d(x)} \right|_{x=x_1} \left. \frac{dF_b(x)}{dx} \right|_{x=x_2}.$$

Aquí hemos reemplazado $F_b(F_b(x))$ evaluado en x_2 , por $F_b(x_1)$, de acuerdo a las propiedades de la doble iteración. Enseguida, con el objeto de dejar todo el término de la derecha en función de x_1 , realizamos un cambio al inverso del caso anterior:

$$\left. \frac{dF_b(x)}{d(x)} \right|_{x=x_1} \left. \frac{dF_b(x)}{dx} \right|_{x=x_2} = \left. \frac{dF_b(x)}{d(x)} \right|_{x=x_1} \left. \frac{dF_b(F_b(x))}{dF_b(x)} \right|_{x=x_1}.$$

Lo que hemos logrado hasta ahora es que:

$$\left. \frac{dF_b^2(x)}{dx} \right|_{x=x_2} = \left. \frac{dF_b(F_b(x))}{dF_b(x)} \right|_{x=x_1} \left. \frac{dF_b(x)}{d(x)} \right|_{x=x_1},$$

utilizando nuevamente la regla de la cadena:

$$\left. \frac{dF_b^2(x)}{dx} \right|_{x=x_2} = \left. \frac{dF_b(F_b(x))}{dx} \right|_{x=x_1}$$

Finalmente:

$$\left. \frac{dF_b^2(x)}{dx} \right|_{x=x_2} = \left. \frac{dF_b^2(x)}{dx} \right|_{x=x_1}.$$

Con este resultado hemos demostrado que la derivada de la función $F_b^2(x)$, evaluada en los puntos x_1 y x_2 tiene efectivamente el mismo valor y que por lo tanto las inestabilidades de estos puntos al variar b afecta simultáneamente a ambos.

Lo mismo sucede en órdenes más altos, ya que también en esos casos la inestabilidad se instala en ambos puntos. El ejercicio propuesto al final de esta sección ilustrar esta afirmación.

Ejemplo

Demostraremos la igualdad entre las derivadas de la doble iteración utilizando un método más corto y formal.

Utilizando las igualdades $F_b^2(x_1) = x_1$, $F_b^2(x_2) = x_2$, y $F_b(x_1) = x_2$, $F_b(x_2) = x_1$, tenemos:

$$F_b^{2'}(x_1) = F_b'(F_b(x_1)) F_b'(x_1) = F_b'(x_2) F_b'(x_1) = F_b^{2'}(x_2).$$

Ejercicio

Si $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ forman un n-ciclo, tal que:

$$\bar{x}_{r+1} = F(\bar{x}_r), \text{ para } r = 1, 2, \dots, n-1, \text{ y tal que } \bar{x}_1 = F(\bar{x}_n),$$

Entonces, *cada uno* de ellos es un punto fijo de $F_b^n(x)$ con derivadas idénticas, es decir

$$\bar{x}_r = F_b^n(\bar{x}_r) \text{ y } F_b^n(\bar{x}_r)' = F_b^n(\bar{x}_1)' = \dots = F_b^n(\bar{x}_n)'. \square$$

Resumiendo: al aumentar el valor de b , $|F_b(\bar{x})'|$, aumenta hasta superar –en valor absoluto– a la unidad y desaparece la estabilidad. En este punto la iteración se aleja de \bar{x} . ¿Cuánto se aleja? Esto se determina por la conducta de $F_b^{(2)}(x)$, la doble iteración. Como se ve en la Figura correspondiente. Note que en la bifurcación ocurrida al aumentar b , aparecen tres puntos fijos, pero aquel ubicado en el centro es inestable y aquellos de los extremos x_1^* y x_2^* son estables: su derivada $|F_b^{(2)'}(x)| < 1$.

Para este nuevo valor de b aparece la estabilidad en x_1 y x_2 y la iteración es *atraída* hacia dichos puntos. Al seguir aumentando b –cada vez con variaciones más pequeñas en su valor–, x_1 y x_2 se tornan inestables y debemos considerar el comportamiento de la cuarta iteración $F_b^{(2)} \circ F_b^{(2)} = F_b^{(4)}$ y así sucesivamente hasta que la iteración cesa de oscilar entre un número finito de valores y comienza a recorrer *todos* los valores que le son permitidos, sin repetirlos, en este punto decimos que el comportamiento de la ecuación logística se volvió caótica. (La

iteración no se detiene en un punto fijo sino recorre un tramo sin repetir ningún número en especial). Para ciertos valores muy particulares (3.84 ... por ejemplo) la iteración repentinamente adquiere una periodicidad triple, que corresponde a los puntos fijos $x = F_b^3$. Al variar muy lentamente b , se aprecia la aparición de la misma estructura con que se inició el gráfico para $b > 3$. Debido a este fenómeno se dice que esta ecuación tiene una estructura de *fractal*. Consiste que entre dos números cercanos de b se repite la estructura de bifurcaciones que se observa en el gráfico global de b *versus* puntos fijos.

Al final de esta sección daremos una idea más cuantitativa de esta idea.

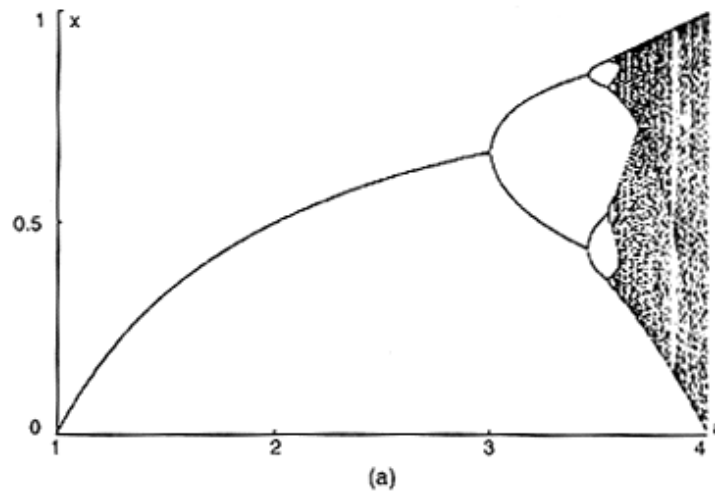


Figura VI.13:

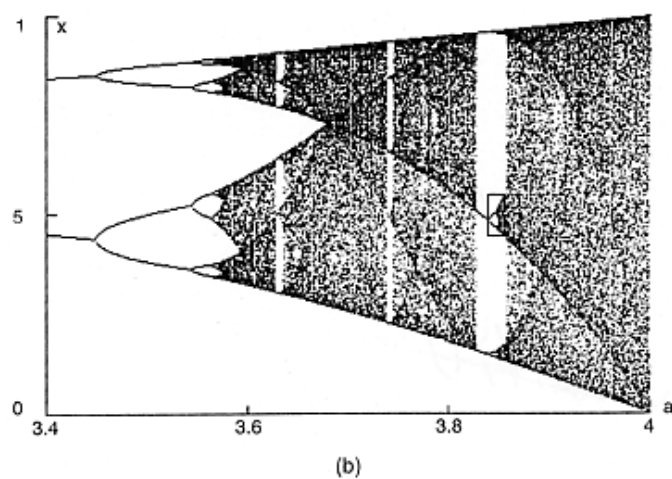


Figura VI.14:

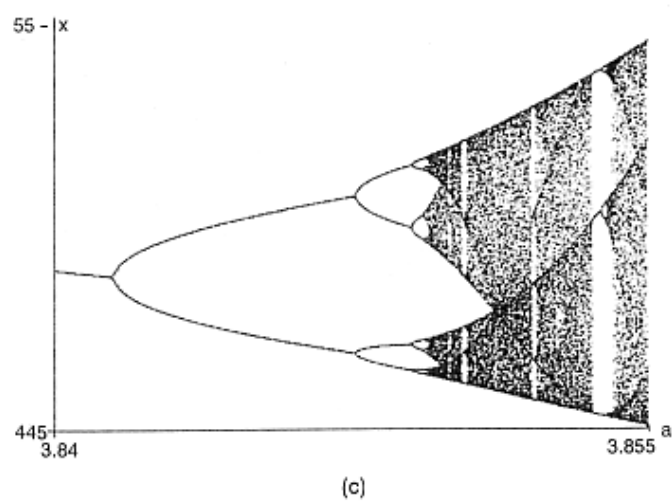


Figura VI.15:

VI.2. Dimensión Fractal

En la Figura que se incluye, aparece un región de la costa de Noruega. El problema que se plantea es medir el *largo* de la línea costera. El método propuesto por Mandelbrot es el siguiente: construya unos cuadrados de lado δ y con ellos cubra toda la costa, sin excluir ningún tramo. Repita esta operación un número grande de veces, siempre disminuyendo el valor de δ . Finalmente, grafique el logaritmo del número de cuadrados versus el logaritmo del valor del lado δ del cuadrado correspondiente. Suponiendo que el método converge, calcule la pendiente de la recta obtenida, el resultado es *por definición* la dimensión fractal de la línea quebrada.

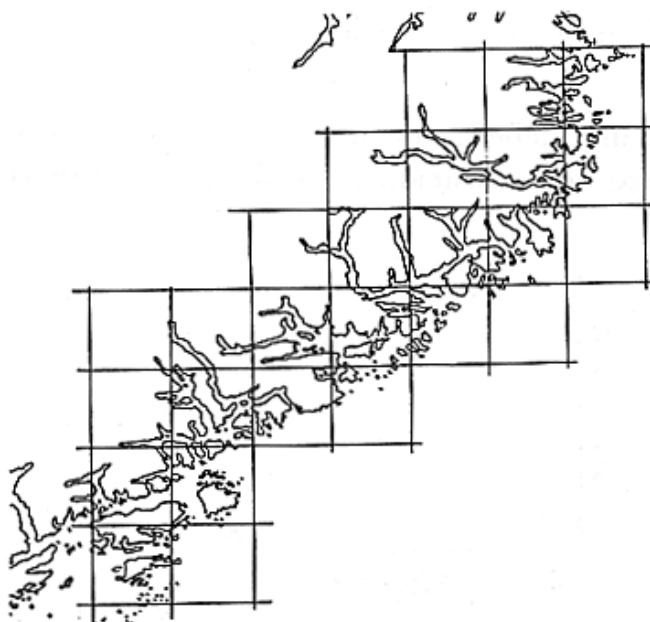


Figura VI.16:

Esta definición tiene sentido porque coincide con el valor esperado para las figuras geométricas conocidas: puntos, líneas rectas, áreas..

Se denomina fractal porque –siendo una extensión de la idea de dimensión usual– su resultado puede ser un número fraccionario.

Uno espera que esta definición sea de interés en casos como el una línea que ocupa una región finita del espacio pero tiene un largo infinito.

La definición de *dimensión fractal* es:

$$D \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right\},$$

donde ε es el tamaño de la celda a usar en la medida y $N(\varepsilon)$ el número de celdas utilizadas al cubrir el objeto.

Otra forma de establecer esta dimensión es decir que el número mínimo de celdas ($N(\varepsilon)$) de lado ε necesario para cubrir un conjunto de puntos varía como ε^{-D} .

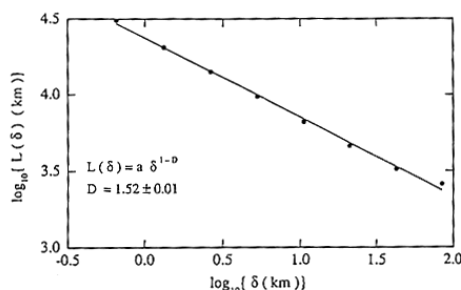


Figura VI.17:

$$D \equiv \frac{\ln \varepsilon^{-D}}{\ln(1/\varepsilon)} = D.$$

Ejemplo

Calcule la dimensión fractal de un punto una recta y un área y compruebe que se obtienen los valores conocidos.

a) En el caso de un punto, $N(\varepsilon) = 1$; para cualquier ε basta con un cubo. Como $\ln 1 = 0$, $\Rightarrow D = 0$.

b) Para una línea, el número de trazos de largo ε es:

$$N(\varepsilon) = \frac{L}{\varepsilon}, \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\ln L}{\ln 1/\varepsilon} + \frac{\ln 1/\varepsilon}{\ln 1/\varepsilon} = 0 + 1, \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0$$

c) Para una superficie el número de cuadrados es $A/(\varepsilon^2)$, si el valor del área es A :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln A/\varepsilon^2}{\ln 1/\varepsilon} \Rightarrow D = 2. \square$$

Hasta aquí no hay nada nuevo y esta definición aparece como una expresión más engorrosa de un resultado conocido.

Ejemplo

Calcule la dimensión fractal del conjunto de Cantor.

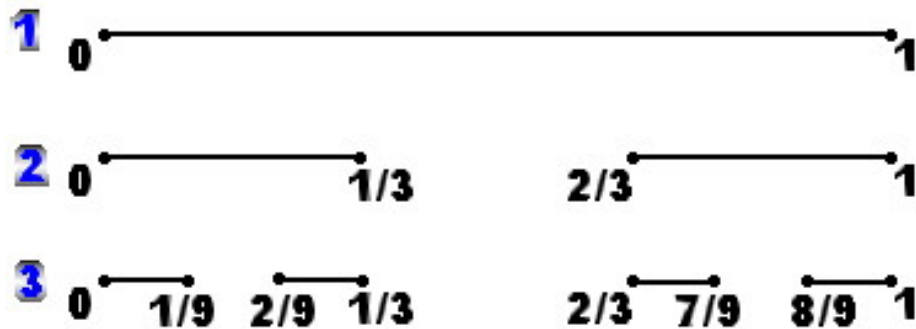


Figura VI.18:

El conjunto de Cantor es un conjunto infinito de puntos desconectados cuya dimensionalidad varía entre 0 (un punto) y 1 (una línea continua).

Se construye de la siguiente forma:

Dado un segmento de largo L , se procede a dividirlo en tres tramos iguales y eliminar el central. Se repite esta operación hasta infinito. El valor de la dimensión fractal para este caso, suponiendo $L = 1$, es:

$$\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad N(1) = 1 = 2^0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad N\left(\frac{1}{3}\right) = 2$$

$$\varepsilon = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad N\left(\frac{1}{9}\right) = 2^2$$

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^m \quad \Rightarrow \quad N\left(\frac{1}{3^m}\right) = 2^m$$

$$D \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \sim 0,63. \quad \square$$

Ejemplo

Calcule la dimensión de la figura de Koch. Esta figura triangular tiene un largo infinito y ocupa un espacio finito. Uno espera que su dimensión sea mayor que la unidad y menor que dos.

Para construirla se procede en forma similar al caso anterior: un segmento de largo L , se divide en tres tramos iguales, se desprende el interior y en su lugar se instala un par de lados del mismo largo que el que se desprendió, formando un ángulo de 60° entre ellos.



Figura VI.19:

$$\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad N(1) = 1 = 4^0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad N\left(\frac{1}{3}\right) = 4$$

$$\varepsilon = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad N\left(\frac{1}{9}\right) = 4^2$$

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^m \quad \Rightarrow \quad N\left(\frac{1}{3^m}\right) = 4^m$$

$$D \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \sim 1,26 \quad \square$$

VI.3. Atractores Extraños

Al estudiar la ecuación logística encontramos que para ciertos valores de b , el sistema se establecía en dos puntos fijos, cualquiera fueran los puntos iniciales. Este es un *atractor*. Lo mismo podemos afirmar a medida que van apareciendo las bifurcaciones.

Un *atractor extraño* tiene las siguientes dos características:

a) Es un atractor en un sentido más general que el recién mencionado: todas las órbitas que parten de una cierta región finita del espacio de fase son atraídas en forma asintótica —es decir cuando $t \rightarrow \infty$ —, hacia un valle de atracción que tiene una estructura compleja. El atractor en sí mismo no permite ser dividido en regiones: la trayectoria frecuenta cada uno y todos los puntos del valle a medida que transcurre el tiempo.



Figura VI.20:

b) El calificativo de *extraño* hace referencia a la sensibilidad demostrada a la variación en las condiciones iniciales. A pesar de la contracción en volumen que los caracteriza, ésta no implica que todas las longitudes sufran un acortamiento,

puntos que inicialmente se encontraban arbitrariamente cerca llegan a estar exponencialmente separados en el valle atractor para tiempos suficientemente largos.

Estas son las condiciones que debe cumplir un atractor para ser llamado extraño. Todos los atractores extraños conocidos tienen dimensión fractal. Este último concepto será definido más adelante.

En realidad el proceso de contracción es complejo, simultáneamente existe un doblamiento de la superficie inicial que ubica como vecinos a puntos que inicialmente se encontraban desconectados. En este sentido este es un proceso disipativo.

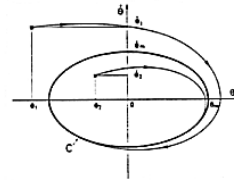


Figura VI.21:

VI.4. Mapeo de Lorenz

El meteorólogo E. Lorenz estaba interesado en el estudio del problema de la convección de un fluido entre dos placas paralelas que se mantienen a temperaturas diferentes. En 1963 publicó un trabajo en el cual analizaba el comportamiento de un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias cuadráticas y acopladas. Las tres variables contenidas en estas ecuaciones representaban la temperatura (dos de ellas) y la velocidad. Los parámetros que aparecen en ellas son: σ el número de Prandtl, r el número de Reynolds, b el parámetro de aspecto de las placas utilizadas en el experimento. Todos estos parámetros son positivos.

Después de un análisis de las ecuaciones hidrodinámicas asociadas a este problema, Lorenz logró reducir el problema a un conjunto de tres ecuaciones, que se incluyen a continuación:



Figura VI.22:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

El volumen inicial del fluido se contrae en a medida que el sistema evoluciona, como se demuestra a continuación:

$$\nabla \cdot \vec{V} = -(\sigma + 1 + b), \quad \text{donde } V \text{ es la velocidad del sistema.}$$

Los valores de los parámetros utilizados en las figuras que se muestran corresponden a: $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$.

Los puntos fijos de este sistema dependen de los valores de los parámetros, como se especifica a continuación:

$$x = y = z = 0, \quad \text{para } 0 < r < 1.$$

El origen es el único punto fijo y tiene una estabilidad hiperbólica. En $r = 1$, uno de los atractores es nulo y los otros dos son $-b$ y $-(1 + \sigma)$. Como todas las cantidades son positivas, los atractores son estables.

Si $r > 1$, aparece una bifurcación y los nuevos valores de los puntos fijos son:

$$x = y = \pm[b(r - 1)]^{1/2}; \quad z = r - 1.$$

Estos puntos fijos no triviales son estables para

$$1 < r < \bar{r}, \quad \text{con } \bar{r} = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{(\sigma - b - 1)}.$$

Para $r > \bar{r}$, todos los puntos fijos son inestables. Para los valores establecidos $b = 8/3$ y $\sigma = 10$, se obtiene $r \approx 24,74$. Los diagramas están hechos con $r = 28$. A pesar de ser inestables el diagrama de fase es complejo, aparece una trayectoria caótica que oscila entre dos espiras sin repetir su órbita:

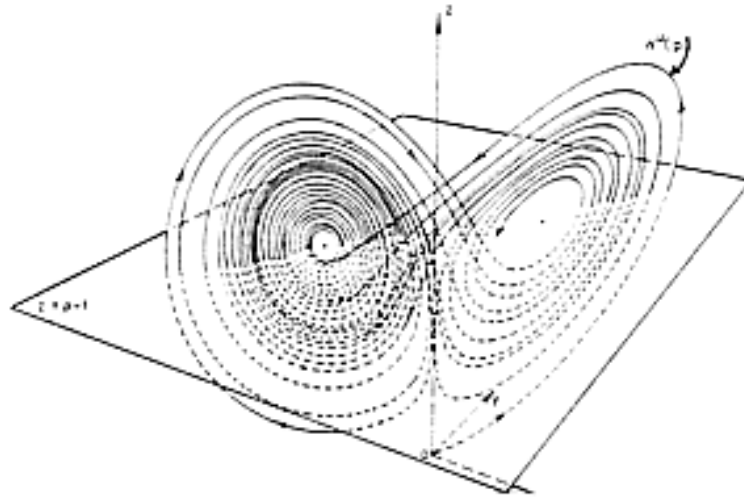


Figura VI.23:

A continuación se incluye un esquema que indica los caminos que pueden seguir las órbitas mientras se dan vueltas alrededor de este atractor extraño.

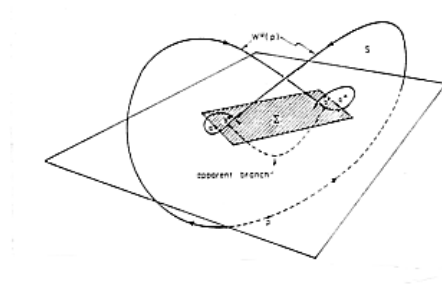


Figura VI.24:

Otra alternativa para analizar las órbitas consiste en graficar z_{k+1} versus z_k , donde z_k corresponde al máximo valor de z en cada una de las vueltas que describe en el espacio: es una sucesión de máximos de z_k para $r = 28$, que se obtienen con $\frac{dz_k}{dt} = 0$.

La estructura que se obtiene es la que aparece en la siguiente Figura. Más abajo se incluye un modelo más simple, un triángulo, que modela este comportamiento.

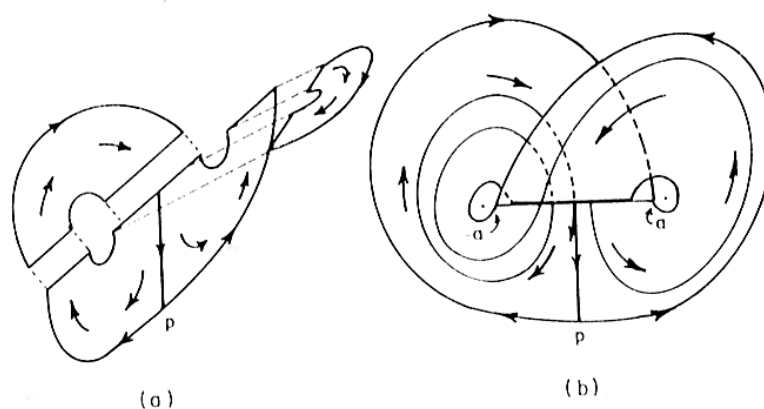


Figura VI.25:

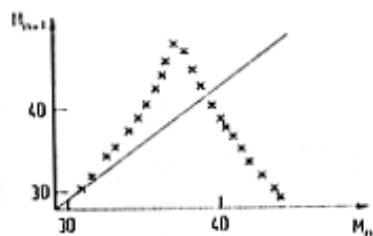


Figura VI.26:

Este mapeo de Poincare realizado en el sistema de Lorenz permite presumir que éste es un sistema caótico, ya que el sistema más simple propuesto como alternativa al gráfico z_{k+1} versus z_k , el triángulo lo es para $a > 1$. Las ecuaciones del mapeo triangular son:

$$x_{n+1} = \begin{cases} ax_n, & x_n \in [0, 1/2], \\ a(1 - x_n), & x_n \in [1/2, 1] \end{cases}$$

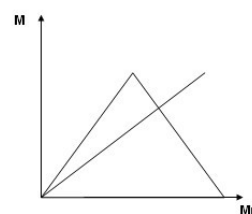


Figura VI.27

En resumen, para los parámetros utilizados aquí, la trayectoria es muy sensible a los valores que tomen las condiciones iniciales, es decir es *caótica*. Además es atraída a una región del espacio de fase y de acuerdo al cálculo realizado el volumen de este atractor se contrae a cero. Esto indica que el volumen del flujo del sistema tridimensional de Lorenz genera un conjunto de puntos cuya dimensión es menor que tres. Uno puede pensar que la dimensión correcta es dos, sin embargo de acuerdo al teorema de *Poincare–Bendixson* (que nosotros no hemos incluido aquí) esto es imposible. Usando la definición de dimensión fractal que estudiaremos en otra sección, se puede demostrar en forma numérica que la dimensión correcta de este sistema es $d = 2,06$.

VI.5. Mapeo de Henon

Este mapeo puede ser considerado como una extensión bidimensional de la ecuación logística. Las ecuaciones que lo rigen son:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

Los parámetros toman el siguiente rango de valores: $a > 0$, $0 < b < 1$.

Entre sus propiedades podemos destacar que es invertible, podemos expresar y_n y x_n en función de y_{n+1} y x_{n+1} .

Veamos el Jacobiano de esta transformación:

$$J = \frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial(x_n, y_n)} = \begin{vmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b,$$

si $b > 0$ sabemos que el área encerrada por esta transformación se contrae. Los atractores tienen área nula.

Es instructivo incluir aquí el efecto que tiene esta transformación sobre una figura como una elipse por ejemplo. Descomponemos la transformación de Henon en tres transformaciones sucesivas, definidas con la letra T_i .

Preservación de Area

$$T_1 : \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= 1 - a x^2 + y. \end{aligned}$$

Contracción en el eje x

$$T_2 : \begin{aligned} x'' &= b x', \\ y'' &= y'. \end{aligned}$$

Rotación en 90 grados

$$T_3 : \begin{aligned} x''' &= y'', \\ y''' &= -x''. \end{aligned}$$

Los puntos fijos se determinan en la forma usual:

$$y_n + 1 - a x_n^2 = x_n, \quad b x_n = y_n.$$

La solución de estas ecuaciones da el siguiente resultado:

$$x_{\pm}^* = \frac{1}{2a} \{ -(1-b) \pm [(1-b)^2 + 4a]^{1/2} \},$$

$$y_{\pm}^* = b x_{\pm}^*.$$

La estabilidad de estos puntos se especifica a continuación:

$$(x_-^*, b x_-^*)$$

es siempre inestable,

$$(x_+^*, b x_+^*)$$

es inestable si $a > \frac{3}{4}(1-b)^2$.

Los resultados numéricos incluidos aquí corresponden al caso $b = 0,3$ y $a = 1,4$.

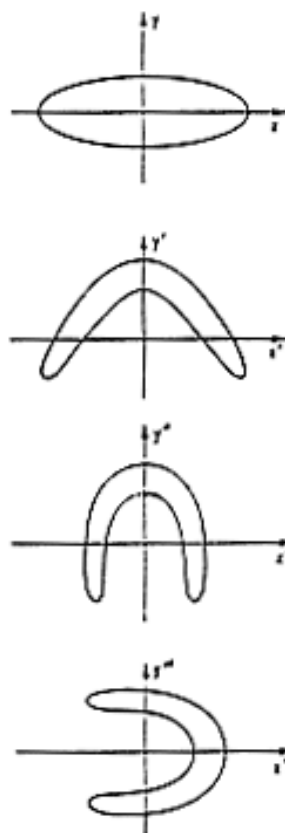


Figura VI.28:

A modo de curiosidad incluimos, sin explicaciones, la existencia de números universales: números que se repiten en distintos modelos que contienen caos. La aparición de estos números tiene una interpretación geométrica. Aquí sólo incluiremos la receta.

En el mapeo de Henon, si $a > a_1 = 0,3675$ los puntos fijos se tornan inestables y aparece un desdoblamiento del periodo. Para $a > a_2 = 0,9125$ el 2-ciclo se torna inestable y aparece un 4-ciclo, y así sucesivamente. Con el conjunto de valores donde aparece el desdoblamiento, a_n , se puede obtener una razón geométrica que converge a un número universal:

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4,6691. \quad (\text{VI.2})$$

Este es el *mismo número* que se puede obtener usando el mapeo logístico y relacionando los distintos valores de b_n que provocan un desdoblamiento de los puntos fijos en esa ecuación. Por esto este número, denominado por convención δ se le llama universal. Mencionamos esta propiedad como una curiosidad, mayores detalles y la existencia de otro número universal, puede ser encontrada en las referencias dadas.

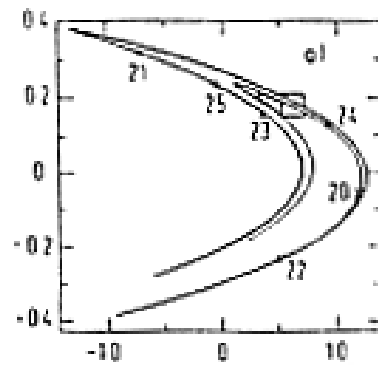


Figura VI.29: El mapeo de Henon, en el rango de a mayor que 0,3675 adquiere una estructura como la que se indica en la Figura. Al aumentar la resolución de la iteración, aparece un conjunto de tres líneas que vuelve a repetirse al seguir aumentando la resolución.

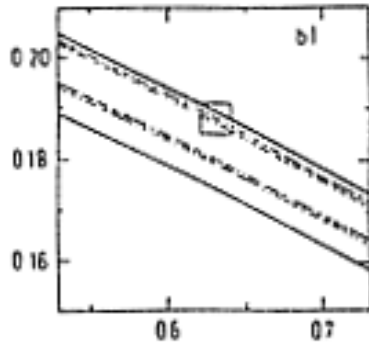


Figura VI.30: Se muestra la estructura de tres líneas obtenidas al aumentar la resolución de la iteración. estas líneas están escondidas en el gráfico anterior debido al número de decimales usados.

La dimensión fractal asociada a este mapeo es $d = 1,26$ para los valores de los parámetros $a = 1,4$ y $b = 0,3$.

VI.6. Exponente de Liapunov

VI.6.1. Separación de órbitas

Dos trayectorias inicialmente cercanos, al evolucionar en un sistema no-lineal comienzan a separarse.

Si las órbitas iniciales son estables, y el sistema es integrable (se conoce una solución exacta) la distancia entre

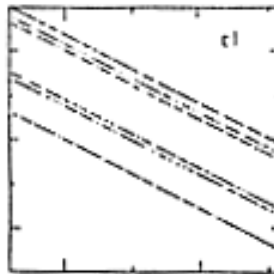


Figura VI.31:

ellas aumenta linealmente dentro del espacio de fase.

En un sistema no-integrable, uno debe hacer la simulación numérica. La experiencia indica que para una órbita regular (en oposición a caótica) la distancia también crece linealmente en el tiempo.

Ejemplo

El oscilador que se muestra a continuación se denomina la cadena de Toda. Los resortes tienen una rigidez exponencial, pero para pequeñas desviaciones se comportan como un resorte normal. Este es un sistema altamente no-lineal. Se incluye al final de esta sección un gráfico de la separación entre órbitas cercanas.

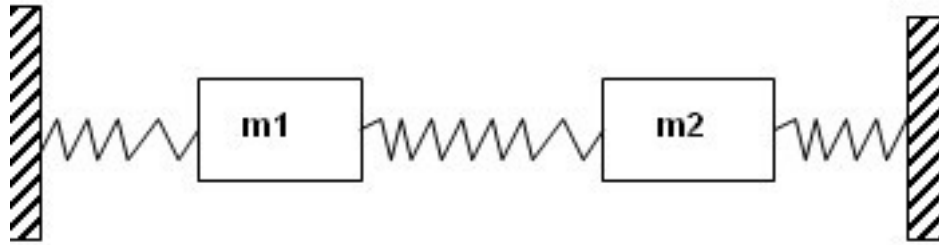


Figura VI.32:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{P_1^2}{m_1} + \frac{P_2^2}{m_2} \right) + e^{-x_1} + e^{(x_1-x_2)} + e^{x_2}.$$

Aproximación lineal:

$$1 - x_1 + \frac{x_1^2}{2} + 1 + (x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + 1 + x_2 + \frac{x_2^2}{2} \dots$$

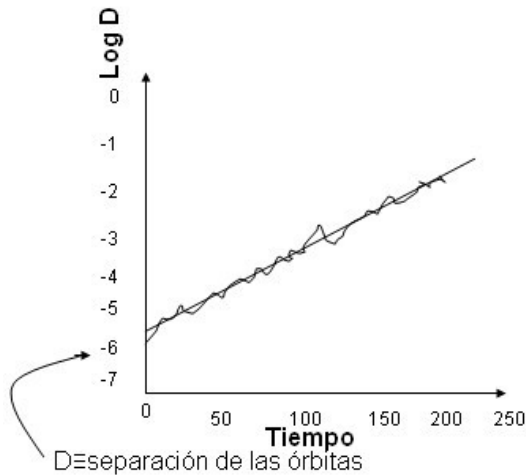


Figura VI.33: El gráfico de la izquierda representa la separación de dos órbitas en el régimen lineal. A continuación se acompaña la separación como ocurre en el régimen caótico. En este caso debe utilizarse una escala logarítmica. La separación es exponencial.

En cambio en el régimen caótico hay un crecimiento exponencial de la distancia entre dos órbitas en el tiempo.

Si existe un tamaño máximo del espacio de fase, la distancia alcanza un máximo y posteriormente las órbitas se parecen dos trayectorias sin otra relación que el azar el espacio de fase.

Existe un exponente, llamado exponente de Liapunov que caracteriza este alejamiento entre órbitas en régimen caótico ($e^{\lambda t}$)

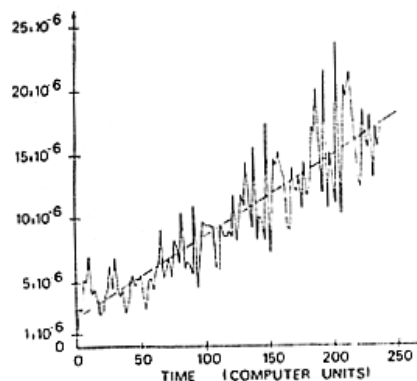


Figura VI.34:

Para estudiarlo primero fijamos una órbita : $x^*(t)$ y a continuación consideramos una segunda órbita como una perturbación de la inicial : $x^*(t) + u(t)$, con $u(o)$ pequeño. Uno experimenta con varios valores de $u(o)$. Los resultados numéricos obtenidos indican que el valor de λ *no* depende - dentro de fluctuaciones estadísticas - del valor de $u(o)$, en otras palabras λ caracteriza a la órbita $x^*(t)$.

Por otra parte un mismo valor de λ caracteriza **todas** las órbitas de una región caótica. λ representa de este modo una velocidad de separación promedio de esta región caótica.

Diferentes regiones caóticas, desconectadas, tienen en general distintos valores de λ .

VI.6.2. Exponente de Liapunov

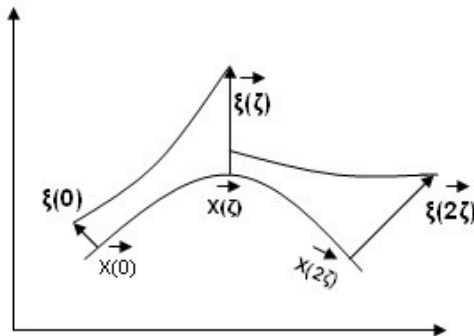
Una forma de diagnosticar el caos, como se señaló en la sección anterior, es midiendo la separación entre órbitas que inicialmente se encuentran muy cercanas. Para cuantificar esta separación definimos la siguiente expresión:

$$\delta x(t) \sim |\delta x(o)| e^{\lambda t}$$

$$\lambda \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta x(t)}{\delta x(o)} \right|, \quad \delta x(o) \rightarrow 0$$

En el caso de más de una dimensión, λ se define como el exponente de Liapunov más grande del conjunto.

$\lambda > 0$ garantiza la existencia de caos.



La idea básica es que pequeñas desviaciones ($\delta x(o)$) en los datos iniciales son aumentadas en forma exponencial en la iteración. De esta forma una órbita sólo puede ser calculada para tiempos t tales que se cumple la siguiente desigualdad

$$|\delta x(o)| e^{\lambda t} \ll L, \text{ Figura VI.35:}$$

$L \equiv$ dimensión del espacio de fase donde ocurre este movimiento.

Exponente de Liapunov (iteración unidimensional)

La idea es la siguiente. Calcule una órbita exacta partiendo de un punto x_o , de manera que podamos evaluar distintas derivadas en torno a dicha órbita. En seguida comience con un punto cercano $x_o + \delta x_o$ y linealice el mapeo alrededor de la órbita de referencia. Evalúe la separación entre ellas de acuerdo a la expresión que obtendremos a continuación.

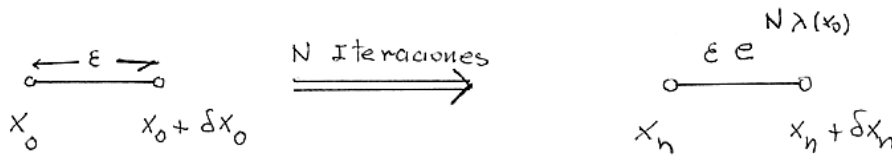


Figura VI.36: Definición gráfica del coeficiente de Liapunov.

De acuerdo a la definición indicada en la Figura, podemos obtener

$$\varepsilon e^{N \lambda(x_o)} = |f^N(x_o + \varepsilon) - f^N(x_o)|,$$

despejando $\lambda(x_o)$ de esta expresión y tomando –formalmente–, los límites $\varepsilon \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$, obtenemos la expresión para el coeficiente de Liapunov propuesta al comienzo.

$$\lambda(x_o) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1/N) \ln \frac{|f^N(x_o + \varepsilon) - f^N(x_o)|}{\varepsilon},$$

$$\lambda(x_o) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \ln \left| \frac{d f^N(x_o)}{d x} \right|_{x_o},$$

se entiende que las expresiones están evaluadas en x_o .

De acuerdo a la regla de la cadena:

$$\left. \frac{d f^N x}{d x} \right|_{x_{N-1}} = \left. \frac{d f^N(x)}{d f^{N-1}} \right|_{x_{N-1}} \times \left. \frac{d f^{N-1}}{d f^{N-2}} \right|_{x_{N-2}} \times \dots \times \left. \frac{d f}{d x_o} \right|_{x_o},$$

de esta forma

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{d f^N(x_o)}{d x} \right|_{x_o} = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \prod_{i=1}^N \frac{d f(x_{i-1})}{d x_{i-1}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \ln \left| \frac{d f(x_{i-1})}{d x_{i-1}} \right|.$$

Esta es la expresión para el exponente de Liapunov:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln |f'(x_{i-1})|_{x^*}|.$$

Empíricamente se ha encontrado que el límite existe y que es independiente de x_o

λ describe la separación exponencial de dos órbitas cercanas

$$|\delta x_N| \sim |\delta x_o| e^{\lambda N}$$

límite físico para λ

$$N \ll -\frac{\ln[|a - b|/|\delta x_o|]}{\lambda}, \quad \text{donde} \quad |a - b| \sim |\delta x_o| e^{\lambda N}.$$

que corresponde al tiempo de relajación: lo que se demora el sistema en perder toda la información que inicialmente poseía.

Dos dimensiones

En el caso de un sistema que tenga dos grados de libertad, debemos encontrar los autovalores de la matriz de 2×2 que representa la parte linealizada de la evolución y determinar si al menos uno de ellos es positivo. En este caso el mapeo es caótico. Si ambos son positivos, definimos como el exponente de Liapunov al mayor de ellos.

A continuación incluimos un ejemplo para ilustrar este método.

El sistema está caracterizado por las dos ecuaciones que se incluyen a continuación:

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

Calculamos, en general numéricamente, una órbita exacta. Linealizamos alrededor de esta órbita exacta: $(x_o, y_o) \rightarrow (x_1, y_1) \rightarrow (x_2, y_2) \rightarrow \dots$, de esta forma el error de propagación es:

$$\delta X_{n+1} = A_n \delta X_n, \quad \text{donde}$$

$$\delta X_n = \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x_n} & \frac{\partial \gamma}{\partial y_n} \end{pmatrix}, \quad \text{es la matriz de Jacobi.}$$

A_n se evalúa para cada iteración en el punto (x_n, y_n) en la trayectoria exacta. En forma similar al caso anterior unidimensional, calculamos δX_n en función de δX_o :

$$\delta X_n = A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_o \delta X_o \equiv J_n \delta X_o.$$

El índice de Liapunov estará dado por los autovalores de la matriz J_n :

$$\det |J_n - \mu(n)I| = 0,$$

sin embargo estos autovalores dependen del número de iteraciones n , puesto que la matriz cambia de acuerdo al número de iteraciones. Sin embargo, se puede esperar una convergencia de estos valores propios y, en este caso, los exponentes de Liapunov se definen como:

$$\mu_i(n) \sim e^{n\lambda_i}, \quad \text{con} \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{tal que}$$

$$\lambda_i \sim \frac{1}{n} \ln \mu_i(n) \quad \text{con} \quad n \rightarrow \infty.$$

$\lambda_i > 0 \Rightarrow$ expansión de pequeñas áreas a lo largo de $e_i(n)$, el vector propio asociado con este valor. Análogamente, $\lambda < 0$ implica contracción en dicha dirección.

La suposición que $\mu_i(n) \sim e^{\lambda_i n}$ no es necesariamente correcta, uno debe hacer los cálculos en un ejercicio concreto para verificar que es posible expresarla en esta forma.

Como las áreas transforman $\Delta A_n = \det |J_n| \Delta A_o$, donde ΔA_o es algún elemento de área escogido al inicio. Como $\det J_n = \mu_1 \mu_2$, entonces

$$\Delta A_n = e^{i n(\lambda_1 + \lambda_2)} \Delta A_o$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & : \text{preserva el área,} \\ \lambda_1 + \lambda_2 < 0 & : \text{contracción del área.}\end{aligned}$$

VI.7. Ejercicios

- 1.– Usando el método gráfico –es decir, apoyándose en las propiedades de la recta $y = x$ –, determine el rango a dentro del cual el sistema que representa la siguiente ecuación permanece estable.

$$x_{n+1} = \begin{cases} ax_n, & x_n \in [0, 1/2], \\ a(1 - x_n), & x_n \in [1/2, 1] \end{cases}$$

- 2.– Dada la ecuación $x_{n+1} = f(x_n) \equiv Ax_n(1 - x_n^2)$, encuentre:
- a) El valor de x para el cual ocurre el máximo de la función $f(x)$
 - b) Indique el valor máximo que puede tomar A , para que en la iteración x_n no se salga del rango establecido: $x \in [0, +1]$.
 - c) Calcule los puntos fijos de esta ecuación y el valor de A para el cual estos puntos se tornan inestables.
- 3.– El mapeo de Lorenz está definido mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz \quad \text{con } b > 0.\end{aligned}$$

Encuentre: a) los puntos fijos, b) determine su estabilidad en función del parámetro r . Demuestre que para un valor determinado de r , no existen puntos fijos estables. Determine el valor de r^* en función de σ, b .

- 4.– En el mapeo triangular:

$$\Delta(x) = r \left(1 - 2 \left| \frac{1}{2} - x \right| \right),$$

encuentre el valor de r que determina la estabilidad del sistema. Encuentre el exponente de Liapunov para este caso.

5.– Considere la transformación tipo tienda T_μ :

$$T_\mu(x) = \begin{cases} 2\mu x & \text{para } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2\mu(1-x) & \text{para } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- a) Para los rangos: $0 < \mu < 1/2$, $1/2 \leq \mu < 1$ y $1 \leq \mu < 2$, encuentre los puntos fijos y su estabilidad.
- b) A partir del diagrama de la primera iteración, dibuje esquemáticamente el diagrama para $T_\mu^{(2)}$. Se recomienda estudiar inicialmente el caso $\mu = 1$. Usando este gráfico infiera el número de puntos fijos que existen en este caso.
- c) Encuentre los puntos fijos para una iteración doble $T_\mu^{(2)}$. Compare con los valores de la iteración simple y deduzca su estabilidad.

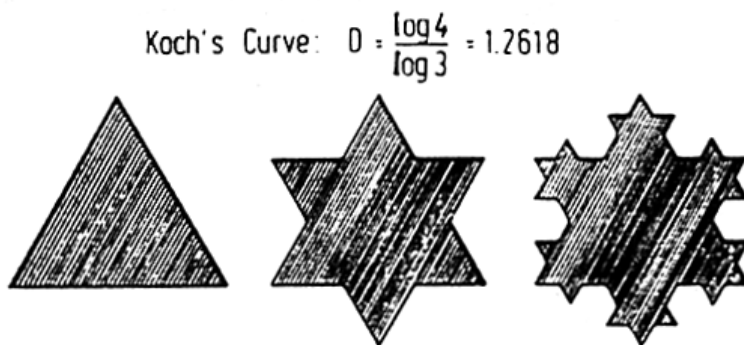


Figura VI.37:

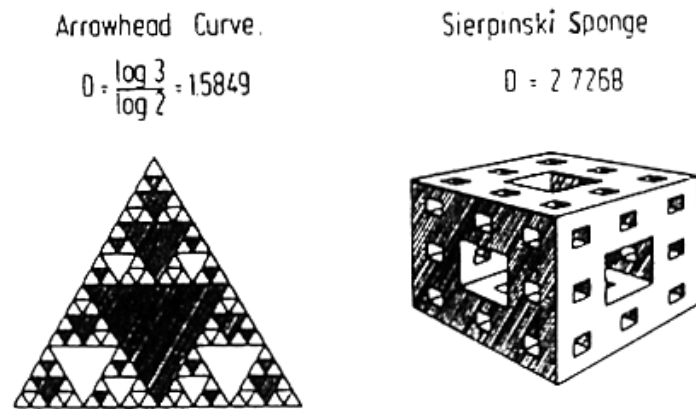


Figura VI.38:

Bibliografía

- [1] **Scientific American** July 87 (Sección: Computer Recreations)
- [2] **American Journal of Physics** Vol. 55, p' ag. 1023, Nov. 1987
- [3] **Chaos and Fractal Dynamics**, F. Moon, 1994.
- [4] **Chaos in Dynamical Systems**, Edward Ott, 1994.
- [5] **Chaos and non-linear models in economics: theory and Applications**, John Creedy, 1994. (En Biblioteca de Ing. Civil).
- [6] **Physica Scripta**. Vol. T20, 1988, *An introduction to Nonlinear Dynamics and Chaos Theory*, Joseph L. Mc Canley
- [7] **Phys. Reports**, Vol. **128**, #4 & 5, Nov. 1985, *Chaos in Quantum Optics*, J.R. Ackerhalt, P:W. Milonni and M.L. Shih.
- [8] **Order within Chaos**, P. Berge, Y. Pomeau and C. Vidal, Hermann and John Wiley Sons, 1984.
- [9] **Fractals**, Jens Fender, Plenum Press 1989
- [10] **Universality in Chaos**, P. Cvitanovic, Adam Hilger Ltd. Bristol, 1984 (Selected Papers on Chaos)
- [11] **Caos**, J. P. Crutchfield et al., **Investigación y Ciencia**, Febrero, 1987.
- [12] **Universal Behavior in Nonlinear systems**, Mitchell J. Feigenbaum, **los Alamos Science** **1**, 4–27 (1980).
- [13] **Deterministic Nonperiodic Flow**, E. N. Lorenz, **Journal of Atmospheric Sciences** **20**, 130-141, (1963).

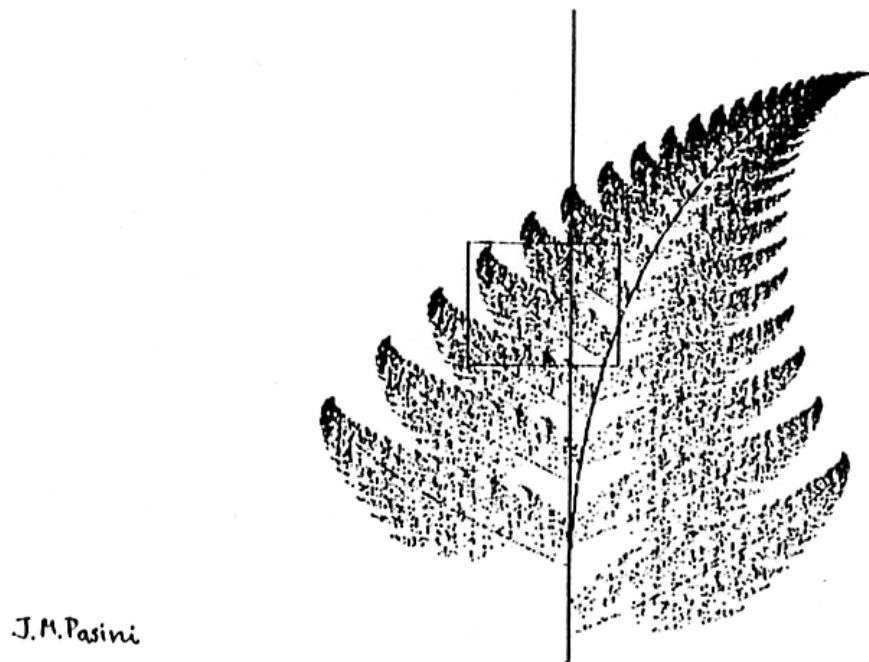


Figura VI.39: