

FISICA MODERNA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 24 de agosto de 2004

Índice general

V. SISTEMAS AUTÓNOMOS	167
V.1. Sistemas que no provienen de una función Hamiltoniana	167
V.2. Sistemas Autónomos	171
V.2.1. Sistemas Autónomos de Primer Orden	172
V.2.2. Sistemas Autónomos de Segundo Orden	174
V.3. Puntos Fijos y Estabilidad	176
V.3.1. Clasificación de los Puntos Fijos	177
V.4. Resumen de Estabilidad	195
V.5. Método de Liapunov	196
V.5.1. Definición de una función positivo definida	197
V.5.2. Teorema de Estabilidad de Liapunov	199
V.6. Bifurcaciones y cambio de estabilidad	206
V.7. Mapeo de Poincaré	211
V.8. Ejercicios	217

Capítulo V

SISTEMAS AUTÓNOMOS

V.1. Sistemas que no provienen de una función Hamiltoniana

A continuación estudiaremos un sistema dinámico cuya evolución está determinada por un sistema de ecuaciones de la forma:

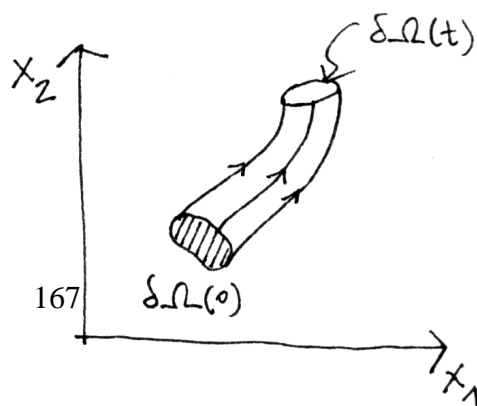
$$\dot{x}_k \equiv \frac{dx_k}{dt} = f_k(x, t), \quad \text{con } k=1..n. \quad (\text{V.1})$$

A diferencia de un sistema Hamiltoniano, en este caso no existe un potencial único para todas las funciones $f_k(x, t)$ que gobiernan la dinámica del sistema.

En esta sección analizamos la evolución en el espacio de fase de un sistema con estas características. El resultado obtenido en el ejemplo siguiente será utilizado para estudiar esta familia de ecuaciones.

Analizaremos los cambios que experimenta un elemento de área al desplazarse en el espacio de fase si las ecuaciones de movimiento no provienen de un Hamiltoniano.

Designamos un volumen en el espacio de fase como $\delta\Omega$. A



medida que el sistema evoluciona el volumen cambia se desplaza a lo largo del espacio de fase, deformándose. La ecuación diferencial que describe estos cambios se deduce a continuación:

$$\delta\Omega(t) = J(t)\delta\Omega(o),$$

donde $\delta\Omega(t)$ y $\delta\Omega(0)$ son los elementos de volumen en el instante t y $t = 0$ respectivamente.

La evolución del volumen en el espacio de fase se puede plantear como una transformación de coordenadas, donde las nuevas coordenadas Q se obtienen a partir de las antiguas a través de la ecuación de evolución del sistema: $Q = q + \dot{q} \Delta t$, $P = p + \dot{p} \Delta t$. La relación entre los dos volúmenes del espacio de fase es $J(t)$. Este es el determinante de la transformación de coordenadas entre las variables evaluadas en $t = 0$ y en el instante t , similares a las transformaciones canónicas asociadas en un sistema Hamiltoniano.

$$dq_1(o) \dots dq_N(o) dp_1(o) \dots dp_N(o) = \left| \frac{\partial q}{\partial Q} \right| dQ_1 \dots dQ_N dP_1 \dots dP_N$$

La teoría ergódica supone que las partículas se reparten en todo el espacio de fase a medida que transcurre el tiempo. Esta hipótesis no se ajusta al comportamiento de las partículas en muchos sistemas. No lo es para un sistema integrable, donde existe una trayectoria fija. Incluso en problemas de movimiento de n partículas, no sabemos la respuesta. En algunos sistemas no lineales el sistema (para un determinado valor de sus parámetros) **no** ocupa todo el espacio de fase.

Aquí nos interesa saber si el volumen ocupado inicialmente por el sistema en el espacio de fase se contrae, permanece igual o se dilata a medida que evoluciona. Sabemos que en un sistema Hamiltoniano, el volumen permanece igual. La ecuación que representa la evolución de elemento de área en el espacio de fase es:

$$\frac{d}{dt} \delta\Omega(t) = \frac{dJ(t)}{dt} \delta\Omega(o),$$

$J(t)$ representa el Jacobiano de una transformación de coordenadas tal, que define las nuevas coordenadas a partir de las ecuaciones de movimiento

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}) \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

con f_i una función no-lineal de las coordenadas x_k . Las coordenadas originales son $x_i(0)$, y las evolucionadas:

$$x_i(t) = x_i(0) + \dot{x}_i(0) \Delta t = x_i(0) + f_i \Delta t.$$

$$J \equiv \text{Jacobiano} \equiv \det|J_{ij}|, \quad J_{ij} = \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_j(o)}.$$

Ejercicio

Calcule el determinante J_{ij} para el caso de una partícula que cae en un campo gravitacional constante g .

Como este es un sistema Hamiltoniano, el determinante es la unidad. La ecuación de movimiento es $\ddot{y} = -g$. La solución de las ecuaciones se pueden escribir como:

$$V(dt) = V(0) - g dt, \quad X(dt) = X(0) + V(dt) dt,$$

$$\det J_{ij} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial X(dt)}{\partial X(0)} & \frac{\partial X(dt)}{\partial V(0)} \\ \frac{\partial V(dt)}{\partial X(0)} & \frac{\partial V(dt)}{\partial V(0)} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \approx 1 + \text{términos de segundo orden en } dt$$

El Jacobiano de esta transformación de coordenadas se puede escribir simbólicamente como:

$$J(t) = \frac{\partial(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial(x_1(o), x_2(o), \dots, x_n(o))}$$

y su derivada temporal como:

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \frac{\partial(\dot{x}_1(t), \dots, x_n(t))}{\partial(x_1(o), \dots, x_n(o))} + \frac{\partial(x_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial(x_1(o), \dots, x_n(o))} + \dots + \frac{\partial(x_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))}{\partial(x_1(o), \dots, x_n(o))}.$$

Aquí hemos aplicado la regla para derivar un determinante: se deriva como un producto de n funciones, de modo que surge una suma de n determinantes.

La regla de la cadena para los determinantes se define de la siguiente forma:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)}$$

Aplicando esta regla a uno de los términos que aparecieron con la derivada del Jacobiano, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[x_1(t) \cdots \dot{x}_j(t) \cdots x_n(t)]}{\partial[x_1(o), \dots, x_n(o)]} &= \frac{\partial[x_1(t) \cdots \dot{x}_j(t) \cdots x_n(t)]}{\partial[x_1(t) \cdots x_j(t) \cdots x_n(t)]} \cdot \frac{\partial[x_1(t), \dots, x_n(t)]}{\partial[x_1(o), \dots, x_n(o)]} \\ &= \frac{\partial[x_1(t) \cdots \dot{x}_j(t) \cdots x_n(t)]}{\partial[x_1(t) \cdots x_j(t) \cdots x_n(t)]} J(t) \end{aligned}$$

Otra propiedad de los determinantes es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, t)} &= \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & \dot{x} \\ 0 & \dot{y} \end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial t} \\ &\Rightarrow \frac{\partial[x_1(t) \cdots \dot{x}_j(t) \cdots x_n(t)]}{\partial[x_1(t) \cdots x_n(t)]} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Pero de acuerdo a las ecuaciones de movimiento, tenemos:

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_j},$$

y si definimos $\vec{v} \equiv \vec{f}$ y $\partial/\partial x_j \equiv \nabla$, podemos expresar en forma más compacta la derivada del jacobiano:

$$\frac{dJ}{dt} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i(t)}{\partial x_i(t)} \right) J(t) = (\nabla \cdot \vec{v}) J(t).$$

Volviendo a la ecuación de la cual partimos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \delta \Omega(t) &= \frac{dJ(t)}{dt} \delta \Omega(o), \\ &= (\nabla \cdot \vec{v}) J(t) \delta \Omega(0), \\ &= \\ \frac{d}{dt} \delta \Omega(t) &= (\nabla \cdot \vec{v}) \delta \Omega(t)\end{aligned}$$

Esta última expresión corresponde a la evolución de un sistema de partículas que viajan en el espacio de fase de acuerdo a las ecuaciones de movimiento $\dot{\vec{x}} = \vec{f}$.

Ejemplo

Dado un sistema lineal $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, donde $A \equiv$ es una matriz constante, es decir, que consta sólo de números, demuestre que:

$$J(t) = J(o) e^{t(Tr A)}$$

Podemos escribir las ecuaciones de movimiento de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k \\ \nabla \cdot \dot{\vec{x}} &= \sum_j \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (A_{jk} x_k) \right] = \sum_j \sum_k A_{jk} \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \sum_k \delta_{kj} A_{jk} = \sum_{k=1}^n A_{kk} \equiv Tr A, \\ \frac{dJ}{dt} &= (\nabla \cdot \vec{v}) J(t) \Rightarrow J(t) = e^{t(Tr A)} \quad \square\end{aligned}$$

V.2. Sistemas Autónomos

Se define un sistema autónomo como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden en su derivada temporal:

$$\dot{x}_k \equiv \frac{dx_k}{dt} = f_k(\vec{x}), \quad (V.2)$$

donde el conjunto de funciones $f_k(\vec{x})$, no dependen explícitamente del tiempo. La palabra autónomo indica que no existe un agente externo con el cual interactúe.

Estudiaremos sistemas en las cuales $f_k(\vec{x})$ son funciones no-lineales en las variables x_k y en los cuales $\nabla \cdot \vec{f} < 0$, es decir sistemas en los cuales existan familias de órbitas para las cuales el espacio de fase se comprima. Como no existe un método general para resolverlas en forma exacta, adoptamos el que se indica a continuación.

Primero se ubican los *puntos fijos* del sistema de ecuaciones. Los *puntos fijos* son aquellos valores de x_k que hacen $f_k(\vec{x}) = 0$. De forma que $\dot{x}_k = 0$.

A continuación se *linealiza* el sistema de ecuaciones en torno a cada uno de estos puntos.

Se resuelve la ecuación lineal y se estudia la estabilidad de la ecuación alrededor de estos puntos.

El comportamiento de la ecuación linealizada alrededor de los puntos de equilibrio da una idea –en la mayoría de los casos, pero no en todos– de la evolución de la ecuación no-lineal. Ilustraremos este punto con algunos ejemplos al final de este capítulo.

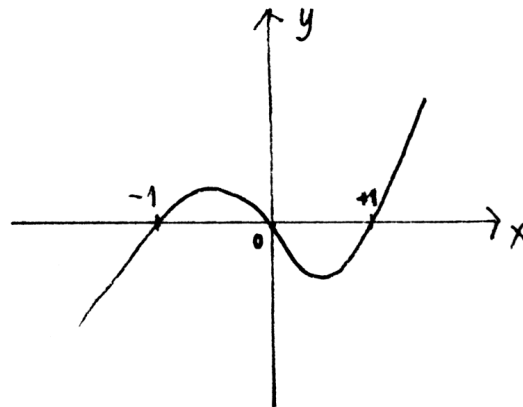
V.2.1. Sistemas Autónomos de Primer Orden

El orden se refiere al número de ecuaciones en el sistema: primer orden indica que existe una sola ecuación: $k = 1$.

Los *puntos fijos* son los ceros de la función $f(x)$, es decir: el conjunto de los x_k tal que $f(x_k) = 0$. En estos puntos el sistema detiene su evolución, puesto que $\dot{x} = 0$.

Determinar la estabilidad de los puntos fijos de la ecuación:

$$\dot{x} = f(x) \equiv -x + x^3.$$



Los puntos fijos: $f(x) = -x +$

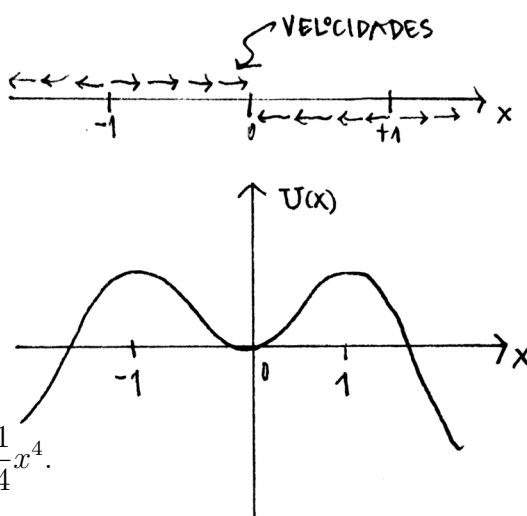
$x^3 = 0$, son $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

El gráfico de la función $f(x)$ nos indica que para $-1 < x < 0$, $f(x) > 0$ y la partícula tiende a moverse hacia el origen. De la misma forma, como $f(x) < 0$ entre 0 y 1, el sistema tiende a desplazarse hacia el origen. En resumen, el punto $x = 0$ es estable puesto que las partículas que orbitan alrededor en la zona $(-1, 1)$ tienden a ubicarse finalmente en el origen de coordenadas. En efecto una partícula desplazada del origen, vuelve a él.

No sucede lo mismo con los otros dos puntos, si una partícula se ubica en ± 1 y es levemente desplazada, comienza a alejarse de dicho punto, dirigiéndose hacia el origen, si fue desplazado en ese sentido, o hacia el infinito, si se alejó del origen.

Para visualizar este proceso, podemos definir un potencial para esta función de manera que:

$$f(x) = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4.$$



El movimiento de este sistema está restringido a tres regiones:

$$x \in (-\infty, -1),$$

$$x \in (-1, 0),$$

$$x \in (0, 1),$$

$$x \in (1, +\infty).$$

En cada uno de los puntos fijos el cuerpo queda detenido; no posee velocidad y por lo tanto no puede cruzar dichos puntos. \square

V.2.2. Sistemas Autónomos de Segundo Orden

Es un par de ecuaciones diferenciales de primer orden, que *no* dependen explícitamente del tiempo.

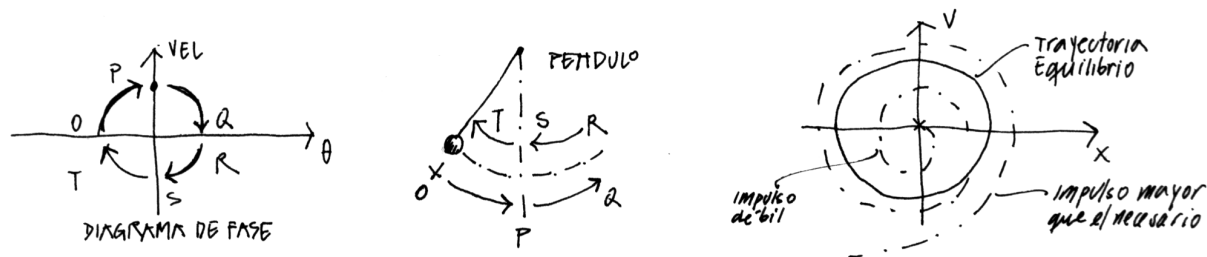
$$\dot{x}_1 = v_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = v_2(x_1, x_2)$$

Un ejemplo de un sistema dinámico no-lineal es el caso del péndulo de un reloj de pared. Este no es un péndulo usual en el sentido que existe un mecanismo que lo impulsa desde su punto de suspensión, de este modo su ecuación de movimiento posee términos que no están en la ecuación de movimiento de un péndulo ordinario.

Este efecto se hace notar cuando damos un impulso inicial al péndulo. Si es mucho mayor de lo necesario el péndulo, después de un par de oscilaciones, vuelve a su amplitud normal. En cambio si el impulso inicial es menor que la amplitud normal, éste vuelve a la posición de reposo, el eje vertical. Para estudiar estos sistemas *no-lineales*, utilizaremos el espacio de fase introducido en el capítulo anterior: es decir graficaremos la velocidad (o momentum) en la ordenada y la posición en la abscisa.

Estos diagramas permiten estudiar el movimiento alrededor del punto de equilibrio sin necesidad de resolver analíticamente el problema. (ver figuras)



Para encontrar la trayectoria en el espacio de fase (x_1, x_2) , debemos resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\frac{dx_1}{dt}}{\frac{dx_2}{dt}} = \frac{v_1(x_1, x_2)}{v_2(x_1, x_2)} \implies \frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2)}.$$

Este es un método rutinario, de hecho es la forma como se calculan las líneas de campo eléctrico en una configuración de carga dada.

Siempre es posible transformar un problema que tiene ecuaciones diferenciales de segundo orden a un sistema de ecuaciones de primer orden. Si es un sistema mecánico es necesario dar la representación Hamiltoniana. Si no lo es indicaremos a continuación un método válido para cualquier caso. Incluso una ecuación diferencial de orden n , se puede transformar en n ecuaciones de primer orden.

Ejemplo

Supongamos un sistema mecánico: $m \ddot{x} = F(x)$. A continuación mostramos la transformación que es necesario realizar para dejarlo como un sistema de ecuaciones de primer orden. (Sin utilizar el Hamiltoniano, para así poder extenderlo a cualquier sistema de ecuaciones.) Defino $\dot{x} \equiv y$ y de esta manera tengo dos ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \frac{F(x)}{m},\end{aligned}$$

Ahora, si $F(x) = -mg$, entonces tenemos $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -g$. El espacio de fase está definido por (x, y) , y las órbitas en este espacio son:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{y}, \implies y dy + g dx = 0,$$

integrando esta ecuación, tenemos:

$$\frac{1}{2} y^2 + gx = \text{constante}.$$

si en $t = 0$, $x_0 = h$, $y = 0$.

$$x(t) = h - \frac{1}{2g} y^2$$

Trayectoria en el espacio de fase que representa una partícula que se deja caer desde una altura h con velocidad inicial *nula*.

Como nos referiremos a la *estabilidad* de órbitas debemos estudiar los *puntos fijos*.

V.3. Puntos Fijos y Estabilidad

Nos interesa estudiar los puntos donde convergen las trayectorias de un sistema dinámico.

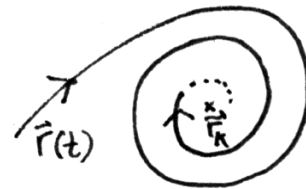
Si un sistema dinámico está bien definido entonces, las condiciones iniciales determinan *una sola trayectoria*. *La solución es única*. En consecuencia, si existe un punto al cual convergen varias trayectorias, al llegar allí, *no tienen* forma de determinar la dirección a seguir. La única solución a este problema es que el sistema *se detenga*: que el punto de convergencia de una familia de trayectorias sea un *punto fijo*.

La ecuación que determina los puntos fijos de un sistema es:

$$v_k(\vec{r}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad \leftrightarrow \text{Puntos Fijos}$$

\vec{r}_i designa el punto fijo i -ésimo

La *estabilidad* de un punto fijo indica que una órbita que se ubica en su vecindad, evoluciona manteniéndose al interior de una vecindad del punto fijo. Si al transcurrir el tiempo alcanza un punto al interior de esta región, la denominamos *asintóticamente estable*. Este punto se denomina un *atractor*.



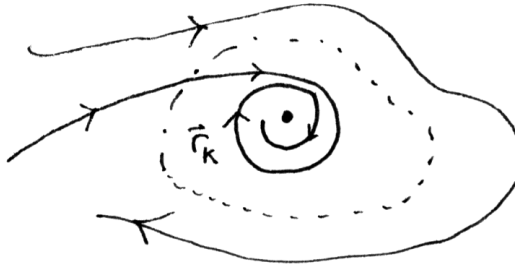
$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \vec{r}_i$$

Repitiendo esta definición de otra forma: designamos un sistema como *asintóticamente estable*, si existe un punto en el espacio de fase tal que cualquier trayectoria que pase a través de una vecindad de \vec{r}_i , termina irremediabilmente en \vec{r}_i . (El punto \vec{r}_i es un atractor para cualquier trayectoria que pase por una vecindad de \vec{r}_i .)

No todas las trayectorias estables, son asintóticamente estables.

Definición: si una región del espacio de fase R_1 contiene el movimiento proveniente de otra región $R_2(t = 0)$ y éste *permanece dentro de* R_1 para $t > 0$, entonces este movimiento se denomina *estable*.

Nos interesa encontrar los puntos asintóticamente estables porque a partir de esta condición podemos inferir propiedades del sistema no-lineal. Al contrario, si un sistema linealizado es sólo estable, no es posible predecir el comportamiento de este mismo sistema al incluir los términos no-lineales.



V.3.1. Clasificación de los Puntos Fijos

Con la idea de estabilidad en la vecindad de los puntos fijos ya definida, el siguiente paso consiste en aplicarla a distintos sistemas físicos y proceder a clasificarlos de acuerdo a esta propiedad. Es notable que un sistema con dos grados de libertad nos permita hacer esta clasificación de los puntos fijos en forma general. Ilustraremos este hecho con el ejemplo que se incluye a continuación.

Ejemplo

Supongamos que las siguientes ecuaciones describen la evolución de un sistema autónomo de segundo orden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2. \end{aligned} \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ constantes, reales,}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es directa:

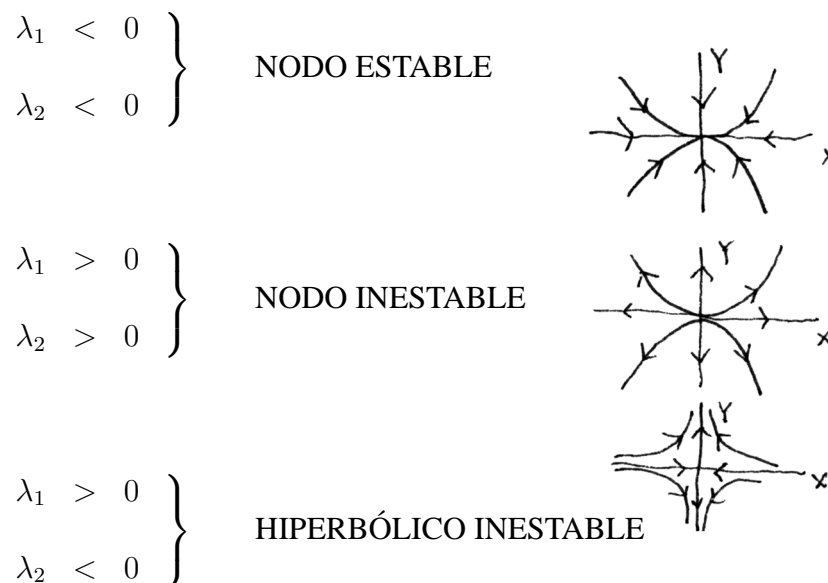
$$x_1 = x_0 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 \equiv y = y_0 e^{\lambda_2 t}$$

La trayectoria en el espacio de fase se encuentra eliminado t entre ambas ecuaciones:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\lambda_1}.$$

El *punto fijo* de este sistema es el origen de coordenadas. Siempre existe una transformación de coordenadas que ubica el origen con el punto fijo. *El comportamiento de las trayectorias, en la aproximación lineal, en la vecindad de este punto determina la estabilidad del sistema.* Este resultado acerca de la estabilidad se aplica al sistema no-lineal, también en una cierta vecindad del punto fijo. Esta regla tiene excepciones que las especificaremos más adelante.

A continuación se grafican las distintas soluciones de estas ecuaciones con sus respectivos nombres. En la clasificación sólo se consideran valores reales de λ , pero *la misma clasificación es válida para autovalores complejos, sólo que en el caso de los complejos nos referimos a su componente real que debe ser distinta de cero.* Estos otros casos los estudiaremos a través de ejemplos.



En esta clasificación basta

que uno de ellos sea positivo, para que el sistema sea inestable, es decir, apenas sea desplazado levemente de la posición de equilibrio, se *alejara de ella*.

En el caso de las coordenadas polares también se puede estudiar el sistema más simple para recuperar los distintos comportamientos posibles.

Ejemplo

Estudiar la trayectoria en el espacio de fase de un sistema dinámico cuyas ecuaciones son:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (x_1 &\equiv r) \\ (x_2 &\equiv \theta), \end{aligned}$$

La solución es:

$$r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta = \omega t + \theta_0,$$

Como las ecuaciones están desacopladas, las soluciones se pueden estudiar en forma independiente. Despejando el tiempo de ambas ecuaciones, se obtiene la trayectoria:



Figura V.2:

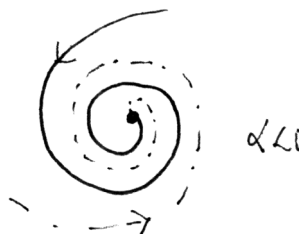


Figura V.1:

$$r = r_0 e^{\alpha(\theta - \theta_0/\omega)}.$$



De acuerdo a la clasificación anterior, tenemos que:
si $\alpha > 0$, el sistema se clasifica como inestable. Al contrario, si $\alpha < 0$, asintóticamente estable.

El signo de ω no es relevante, equivale a hacer girar el sistema en un sentido u otro: $\omega > 0$ o $\omega < 0$.

Procedimiento para determinar la estabilidad de un sistema

Un resumen de los pasos a seguir para determinar la estabilidad es el siguiente:

- Ubicar los puntos fijos del sistema de ecuaciones y hacer una transformación de coordenadas que haga coincidir el punto fijo con el origen de coordenadas.
- Hacer un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto fijo (o del origen, puesto que deben coincidir)
- Determinar los valores propios de la matriz numérica A (ver definición a continuación)

$$\det(A - \lambda I) = 0 (\Rightarrow \text{polinomio en } \lambda).$$

- Inspeccionar la parte real de estos valores propios para determinar la estabilidad del sistema

Si las ecuaciones del sistema dinámico son $\dot{x}_i = v_i(\vec{x})$, la matriz A está definida como:

$$A|_{\vec{x}_k} = [a_{ij}^{(k)}] \equiv a_{ij}^{(k)} = \left. \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right|_{x=\vec{x}_k}, \quad \vec{x}^k \equiv k - \text{ésimo punto fijo}.$$

Como ya mencionamos, el caso de dos dimensiones es fácil de tratar y representa el comportamiento de sistemas con más grados de libertad.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= v_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= v_2(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Debemos, como se estableció anteriormente, ubicar los puntos fijos y hacer una transformación de coordenadas que ubique el punto fijo que se va a estudiar en el origen. A continuación se desarrollan las funciones $v_i(x_1, x_2)$ en serie de Taylor en la vecindad del origen y se obtiene, conservando términos a primer orden:

$$\vec{v} \equiv \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = A \equiv \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{array} \right]_{u_k=0} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

donde hemos definido $u_k = (x - x_i^k)$, con x_i^k es la componente i -ésima del punto fijo k -ésimo.

Recordemos que $\vec{v}(0) = 0$, puesto que se trasladó el origen de coordenadas hasta el punto fijo.

La matriz A es una matriz de números. La expresión final del sistema (ya ubicado el sistema de coordenadas en el punto fijo) es:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a x_1 + b x_2 \\ \dot{x}_2 &= c x_1 + d x_2\end{aligned}$$

No es necesario diagonalizar esta matriz para obtener los valores propios, que son *invariantes* bajo transformaciones de similaridad como las que se indican a continuación.

Escribamos el sistema anterior como $\vec{\dot{u}} = A \vec{u}$. Sea M una matriz numérica de 2×2 , no singular e independiente del tiempo.

$$R \equiv M u \quad , \quad \dot{R} = M \dot{u},$$

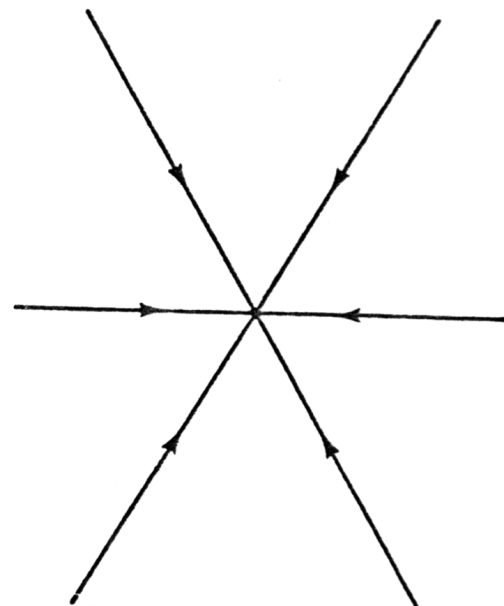
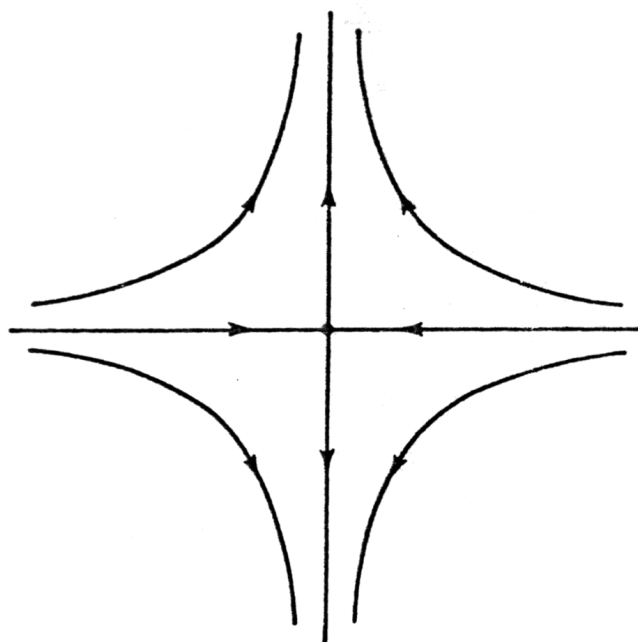
donde \vec{R} , es el vector que se obtiene después de transformar el vector \vec{u} con la matriz M .

$$\dot{R} = M A u = (M A M^{-1})R$$

$$\dot{R} = B R \quad \text{con} \quad B = M A M^{-1}$$

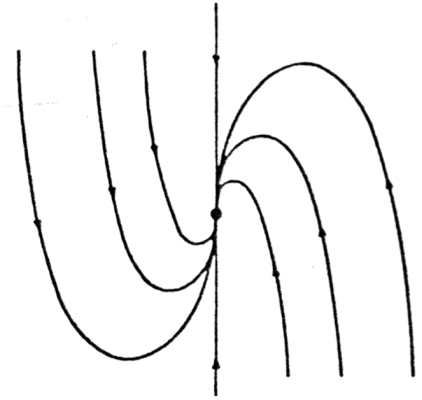
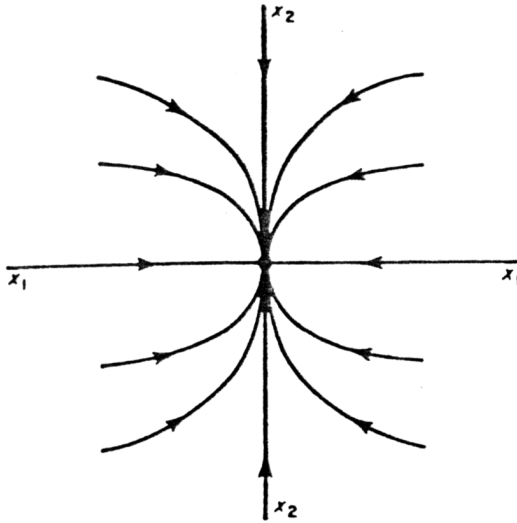
A continuación estableceremos la forma normal de Jordan que se refiere a todas las formas que puede adoptar una matriz. Por ahora examinemos el ejemplo de dos dimensiones para entender mejor las dificultades que se pueden presentar en este tipo de análisis.

TEOREMA: Dada cualquier matriz A , existe una transformación M tal que la matriz $B = M A M^{-1}$ puede tomar las siguientes formas:



$$a) \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

$$b) \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \lambda < 0$$



$$c) \ B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \qquad d) \ B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad \lambda < 0$$

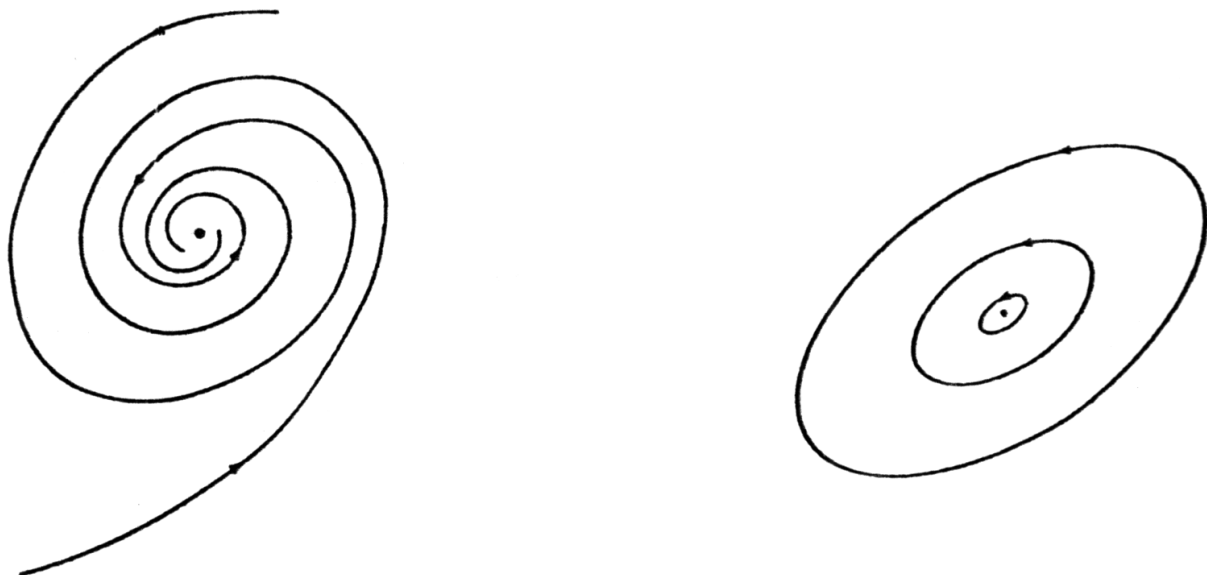
$$e) \ B = \begin{bmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix} \quad \lambda < 0 < \mu \qquad f) \ B = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \quad \mu > 0$$

y ocurren las siguientes posibilidades:

1) Si λ_1 y λ_2 , son reales y distintos, entonces al diagonalizar se llega a los casos a) y c) descritos. Si ambos autovalores son iguales, entonces se obtiene el caso b).

La estabilidad de este sistema se desprende de la figura asociada a cada caso. Más adelante incluimos otros ejemplos para ilustrar estas situaciones.

2) Si ambos autovalores λ_1 y λ_2 son iguales pero la matriz B no es diagonal, entonces una posibilidad es la indicada en el punto d). Este ejemplo será resuelto en detalle al final de esta sección. Otros casos serían los indicados en los punto e) y f).



Ejemplo

Estudiemos el caso de un sistema que presenta un par de ecuaciones correspondientes al caso d) indicado anteriormente.

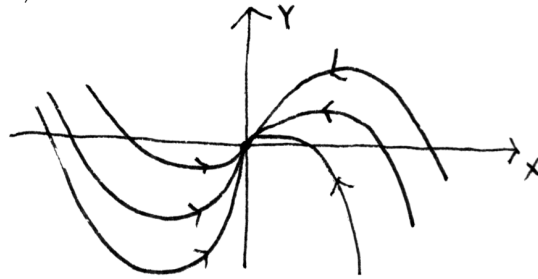
Supongamos que ya encontramos un punto fijo, lo ubicamos en el origen y las ecuaciones asociadas al sistema dinámico ya linealizado son:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x \\ \dot{y} &= \alpha x + \lambda y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= x_0 e^{\lambda t} \\ y &= (y_0 + d x_0 t) e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Para tiempos grandes comparado con el tiempo característico del sistema, $\alpha x_0 t \gg y_0$, entonces

$$\frac{y}{x} = \frac{\alpha}{\lambda} \ln \left| \frac{x}{x_0} \right|, \quad (t \gg 1).$$

Analicemos el caso $\lambda < 0$, $\alpha > 0$, $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$. Recordemos que $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) \rightarrow -x \rightarrow 0$.



$$\text{Si } x \rightarrow 0 - \varepsilon \Rightarrow y \rightarrow 0 - \varepsilon$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$y|_{t=\bar{t}} = 0 \quad \text{si} \quad y_0 + \alpha x_0 \bar{t} = 0. \quad (\alpha < 0)$$

Si λ es negativo el sistema es estable.

Ejemplo

Examinemos el caso del oscilador armónico:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{array} \right\} \quad \vec{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \omega^2 = 0$, $\lambda = \pm i\omega$. Ya hemos trabajado el diagrama de fase correspondiente a este sistema y, como adelantemos corresponde a una trayectoria elíptica. Si redefinimos el tiempo como $\tau = t\omega$ en la ecuación del oscilador, desaparece ω^2 de la matriz y los términos fuera de la diagonal se reemplazan con un ± 1 .

Ejemplo

Se pide estudiar los puntos de equilibrio de la siguiente ecuación diferencial ordinaria, no-lineal.

$$\ddot{x} - \dot{x}^2 + x^2 - x = 0.$$

Como es usual, se define

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = y^2 - x^2 + x \end{cases}$$

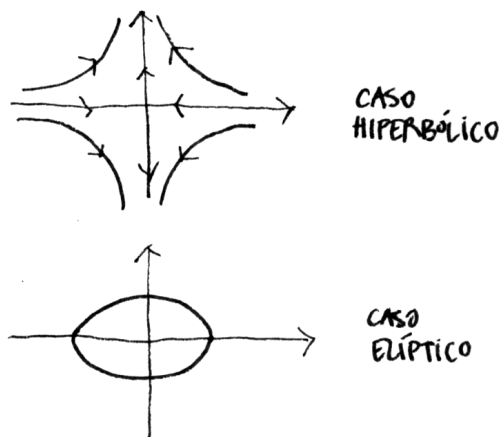
Existen dos puntos fijos $x = y = 0$, $x = +1$, $y = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}_{\text{pto. fijo } x=y=0} = \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ +1 - 2x & 2y \end{bmatrix}_{|x=y=0} = \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\dot{x}} = A \bar{x} = \lambda \bar{x} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Este corresponde al caso hiperbólico inestable.

La variable correspondiente a $\lambda < 0$ tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$ y la otra coordenada con $\lambda > 0$, se aleja indefinidamente del punto fijo (el origen en este caso) a medida que transcurre el tiempo.



Punto fijo: $y = 0$, $x = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{\text{punto fijo}},$$

$$\det(A - \lambda I) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i.$$

Los autovalores son números complejos puros, el movimiento es estable del tipo elíptico.

Ejemplo

Existen sistemas estables pero no asintóticamente estables, como el caso del oscilador armónico cuyas órbitas describen una cierta curva en el espacio de fase. Pueden acercarse a ciertas órbitas cíclicas límites. Uno de estos casos se analiza a continuación. Encontraremos las conclusiones obtenidas con la aproximación lineal y luego las compararemos con la solución exacta –que es posible de encontrar en este caso–. Esto nos permitirá comparar las conclusiones obtenidas con ambos métodos.

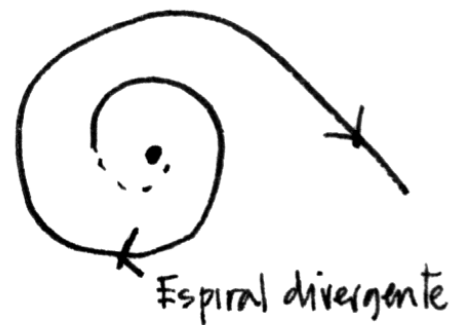
La ecuación diferencial que lo genera es:

$$\dot{r} = \alpha (r - R) r, \quad R > 0,$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

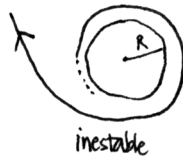
Como la primera ecuación no depende de θ y no es trivial como la segunda, nos concentraremos en su comportamiento. En el siguiente capítulo veremos que una ecuación similar a ésta aparece en el caso de la ecuación logística que es el paradigma del caos.

Los puntos fijos son: $r = 0$, $r = R$. La estabilidad de cada uno de estos casos se estudia a continuación.



No se dice explícitamente pero definimos una variable $r = x + 0$ y $\dot{r} = \dot{x}$ para resolver las ecuaciones en la vecindad del punto fijo $r = 0$. Como las ecuaciones son las mismas, mantenemos la letra r como variable.

$$r = 0, \Rightarrow \dot{r} = -\alpha R r \Rightarrow (\alpha R) > 0 \Rightarrow \text{estable, espiral convergente,} \\ \alpha < 0 \rightarrow \text{inestable, espiral divergente.}$$



Estudiemos la estabilidad alrededor del punto $r = R$, definiendo una nueva variable $s = r - R$, con el objeto de ubicar a este punto fijo en el origen de coordenadas. Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \alpha s (s + R) = \alpha R s \\ \Rightarrow \alpha > 0 &\text{ inestable} \\ \alpha < 0 &\text{ estable} \end{aligned}$$



En resumen:

- Si $\alpha < 0$, el movimiento permanece en $r = R$ cuando $t \rightarrow \infty$
- Si $\alpha > 0$, al sacarlo de $r = R$, el movimiento se *aleja* de $r = R$.

Siendo éste un análisis a primer orden en la perturbación no sabemos cual es el destino de esta órbita puesto que al dejar de ser pequeño el valor de s , nuestra aproximación deja también de tener sentido.

Solución exacta

A continuación resolvemos el problema en forma exacta y compararemos las conclusiones acerca de la estabilidad con las ya obtenidas. Para obtener la solución exacta, realizamos los siguientes cambios de variable:

$$\dot{r} + \alpha R r = \alpha r^2,$$

Sea $r = e^{-\alpha R t} u(t) \Rightarrow \dot{u} = \alpha e^{-\alpha R t} u^2$.

Este cambio de variable permite factorizar la función r como un producto entre la solución de la ecuación lineal y una nueva solución $u(t)$. La nueva ecuación diferencial, que es posible de resolver en forma analítica es:

$$-d\left(\frac{1}{u}\right) = \alpha e^{-\alpha R t} dt \Rightarrow \frac{1}{u} = -\frac{1}{R} e^{-\alpha R t} + \frac{A}{R}$$

Al volver a la ecuación inicial, redefiniendo la constante A, la escribimos como:

$$\ln \left[\left(\frac{r_o}{r} \right) \left(\frac{r - R}{r_o - R} \right) \right] = \alpha R t, \quad \text{con } t_o = 0.$$

Despejando r de esta ecuación, obtenemos:

$$r = \frac{R}{1 - \frac{r_o - R}{r_o} e^{\alpha R t}}$$

Verifiquemos que no hemos cometido un error comprobando las condiciones iniciales:

$$r_o = \frac{R}{1 - \frac{r_o - R}{r_o}} = \frac{R r_o}{R} = r_o.$$

Caso $\alpha < 0$, $r_o > R$.

Definimos $a = \frac{r_o - R}{r_o}$, $0 < a < 1$. La dependencia de r en el tiempo es:

$$r = \frac{R}{1 - a e^{-|\alpha| R t}} \Rightarrow r \xrightarrow{t \rightarrow \infty} R, \quad 0 < a < 1, \quad \alpha = -|\alpha|.$$

Si la partícula parte del interior de r :

$$r_o = R - \epsilon \Rightarrow a \equiv \frac{r_o - R}{r_o}, \quad -1 < a < 0, \quad quadr = \frac{R}{1 + ae^{-|\alpha|Rt}} \Rightarrow r \rightarrow R.$$

Caso: $\alpha > 0, \quad r_o > R, \quad 0 < a < 1.$

$$r = \frac{R}{1 - ae^{\alpha Rt}}, \quad \Rightarrow \exists t \mid [1 - ae^{\alpha Rt}] = 0 \Rightarrow r \rightarrow \infty.$$

Caso: $\alpha > 0, \quad r_o < R, \quad -1 < a = \frac{r_o - R}{r_o} < 0, \Rightarrow r = \frac{R}{1 + |a|e^{\alpha Rt}} \Rightarrow r \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty.$

Hemos demostrado que las conclusiones alcanzadas con el desarrollo lineal coinciden, en este caso, con las obtenidas a partir de la solución exacta.

En la próxima sección, mostraremos un teorema que establece la relación entre la aproximación lineal y el comportamiento del sistema no-lineal alrededor de los puntos fijos.

Ejemplo

Estudie la estabilidad de un cuerpo que gira libremente, sin experimentar torque externo alguno.

Las ecuaciones de movimiento de Euler para este cuerpo son:

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)qr, \\ B\dot{q} &= (C - A)rp, \\ C\dot{r} &= (A - B)pq, \end{aligned}$$

donde A , B y C representan los momentos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes principales.

Un caso particular ocurre cuando el sistema gira en torno a uno sólo de sus ejes principales.

El punto fijo de estas ecuaciones está determinado por los valores:

$$p = \omega, \quad q = r = 0.$$

Si perturbamos en torno a este punto, necesitamos definir nuevas variables:

$$y_1 \equiv p - \omega, \quad y_2 \equiv q - 0, \quad y_3 \equiv r - 0.$$

Las ecuaciones de movimiento se transforman a:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{B-C}{A} y_2 y_3, & \text{linealizando} \quad \dot{y}_1 &= 0 \\ \dot{y}_2 &= \frac{C-A}{B} (y_1 + \omega) y_3, & \text{linealizando} \quad \dot{y}_2 &= \frac{C-A}{B} \omega y_3 \\ \dot{y}_3 &= \frac{A-B}{C} (y_1 + \omega) y_2, & \text{linealizando} \quad \dot{y}_3 &= \frac{A-B}{C} \omega y_2 \end{aligned}$$

La ecuación trascendental de este sistema es:

$$\lambda \left[\lambda^2 - \left(\frac{C-A}{B} \right) \left(\frac{A-B}{C} \right) \omega^2 \right] = 0.$$

Uno de los valores propios es nulo. Los otros dos dependen del valor relativo de A , B y C , los momentos de inercia a lo largo de los ejes principales. Vemos que si $C > A > B$, el sistema es inestable, porque uno de los valores propios tiene parte real positiva. Es decir, al perturbar la rotación de un cuerpo rígido con respecto al eje principal cuyo momento de inercia A toma un valor intermedio ($C > A > B$), se produce un cambio mucho mayor que la perturbación aplicada.

Por otra parte si $A > C$ y $A > B$ entonces ambos valores propios son imaginarios puros y el otro tiene parte real nula (de hecho es idénticamente nulo) y en este caso *no podemos decir nada acerca de la naturaleza de la estabilidad del sistema no-lineal, de acuerdo a un teorema que indicaremos al final de esta sección.* \square

La forma normal de Jordan

Como en esta aproximación a la estabilidad de un problema no-lineal debemos trabajar necesariamente con los autovalores de un determinante, es conveniente dedicar una sección para establecer algunos resultados generales que son útiles, especialmente para determinar el signo de la parte real de los autovalores.

En general las ecuaciones de un sistema dinámico pueden ponerse de la forma siguiente:

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x} + h(\vec{x}), \quad \text{con } M \text{ una matriz numérica.}$$

Para analizar esta ecuación no-lineal, estudiamos su comportamiento en torno a la vecindad de un punto fijo, linealizando el problema y encontrando sus autovalores. Para conocer la naturaleza de estos autovalores, diagonalizamos la matriz A a partir de una cierta matriz M :

$$J \approx \begin{pmatrix} \boxed{} & & & & \\ & \boxed{} & & & \\ & & \boxed{} & & \\ & 0 & & \boxed{} & \\ & & & & \boxed{} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} \equiv M \vec{x}, \quad (\det S \neq 0, \dot{S} = 0)$$

donde M es una matriz de números.

$$\vec{y} = S A \vec{x} = J \vec{y}, \quad J \equiv S A S^{-1}.$$

Se puede demostrar, usando álgebra lineal, que la matriz J siempre se puede escribir en la forma normal de Jordan, que se indica en la Figura adjunta. Cada uno de los bloques indicados tiene la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & \\ 0 & 0 & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{vmatrix},$$

λ_i es un autovalor repetido, es decir, aparece el mismo valor de λ para varias raíces de la ecuación secular: $\det(J - \lambda I) = 0$.

El caso fundamental corresponde a una matriz de 2×2 , que ya estudiamos en el caso de un oscilador armónico y que repetimos, en parte aquí.

Ejemplo

La ecuación de un oscilador armónico es:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{array} \right\} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Como este es un problema lineal, no existe una componente $h(x)$. La matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, $\lambda = \pm i\omega$. La forma normal de Jordan asociada es:

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} +i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix}$$

Cada uno de estos bloques es de 1×1 . \square

En general de la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$ obtenemos un polinomio en λ . Para saber si la parte real de los autovalores de λ_i es o no negativa, debemos investigar las condiciones que deben cumplir los coeficientes a_1, a_2, \dots del polinomio característico para que la parte real de λ sea negativa.

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0.$$

La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de un polinomio tengan su parte real negativa: $\operatorname{Re} \lambda < 0$ es:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, a_n > 0. \text{ Donde:}$$

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \vdots & \vdots & & & & & a_n \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & & & \end{vmatrix}.$$

Ejercicio

Compruebe la validez de esta condición para el caso de una ecuación cuadrática y una cúbica.

Ejemplo

Dada la matriz $T(\beta)$, encuentre sus valores propios y diagonalícela.

a)

$$T(\beta) = \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ \beta & -1 \end{vmatrix},$$

Respuesta: $\lambda(\beta) = \pm \sqrt{\beta^2 + 1}$.

b) Si $\beta = i$, ambos valores propios se anulan. Para este caso se pide determinar la matriz B tal que

$$T' = B^{-1} T B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{es decir,}$$

encontrar la transformación similar que pone T en la forma de Jordan con autovalores degenerados e igual a cero.

Ejercicio

Demuestre que *no* existe una matriz *no-singular* P de orden 2 tal que la matriz D definida como $D \equiv P^{-1} A P$ sea una matriz diagonal si A tiene la forma que se indica:

$$A \equiv \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ejemplo

Demuestre que el operador T , definido como

$$T = 1 + \frac{x}{1!} D + \frac{(x D)^2}{2!} + \frac{(x D)^3}{3!} + \dots$$

donde $D \equiv \frac{d}{dt}$ traslada cualquier función infinitamente diferenciable en una cantidad x : $T f(t) = f(t + x)$.

V.4. Resumen de Estabilidad

Considere la ecuación no-lineal escrita de la siguiente forma:

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x} + h(\vec{x}),$$

donde A , es una matriz numérica y $h(\vec{x})$ representa los términos no-lineales del sistema de ecuaciones. La estabilidad de este sistema estudiada a través del procedimiento de linealización, se puede resumir en los tres siguientes teoremas que son enunciados sin demostración:

- Si todos los autovalores de A tienen parte real negativa, entonces la solución de $\dot{\vec{x}} = A \vec{x}$ es asintóticamente estable (asintóticamente indica que se aproxima a un punto fijo cuando $t \rightarrow \infty$).
- Si al menos uno de los autovalores de A tiene parte real positiva, entonces la solución de $\dot{\vec{x}} = A \vec{x}$ es inestable.
- Si A no tiene autovalores con parte real positiva, *pero al menos uno de los autovalores tiene parte real nula*, entonces los términos no lineales de la ecuación $\dot{\vec{x}} = A \vec{x} + h(\vec{x})$ determinan la estabilidad del sistema estudiado.

Este último teorema indica que en la familia de ecuaciones que al ser linealizadas poseen un autovalor imaginario puro, la estabilidad del sistema linealizado no da información suficiente para determinar la estabilidad del sistema no-lineal. éste debe determinarse de otra forma o con la ecuación incluyendo los términos no-lineales.

V.5. Método de Liapunov

Hemos estudiado la estabilidad de un sistema mediante la aproximación lineal. El último teorema enunciado nos indica que en ciertos casos debemos recurrir a otros métodos. A continuación introducimos el método de Liapunov que estudia directamente el comportamiento de la ecuación no-lineal $\vec{x} = f(\vec{x}, t)$ y puede establecer su estabilidad mediante el método que describiremos en esta sección.

Ilustraremos las ventajas de este método resolviendo un ejemplo.

Ejemplo

Estudiemos la ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_2 + ay_1^3, \\ \dot{y}_2 &= y_1 + ay_2^3.\end{aligned}$$

Primero intentaremos manipular esta ecuación para lograr obtener la información que nos interesa: su estabilidad. No pretendemos resolverla en forma exacta pues sabemos que en un gran número de casos no existe una solución analítica. También postergamos el método de la linealización hasta el final de este ejemplo.

Procediendo con la ecuación, multiplicamos la primera de ellas por y_1 y la segunda por y_2 y enseguida, sumando ambas ecuaciones modificadas se obtiene:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y_1^2 + y_2^2) = a (y_1^4 + y_2^4),$$

donde hemos usado el resultado $y_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dy_1^2}{dt}$.

De esta expresión se deduce que si $a > 0$, la cantidad $(y_1^2 + y_2^2)$ crece sin límites, de modo que la solución $\vec{y} = 0$, es inestable.

Si $a < 0$, la solución $\vec{y} = 0$, es asintóticamente estable.

Si $a = 0$ el punto $\vec{y} = 0$ es estable pero no asintóticamente estable.

Sin resolver las ecuaciones hemos sido capaces de determinar la estabilidad del sistema. Para ello hemos debido analizar la positividad de una función cuadrática deducida a partir de las ecuaciones del sistema. Vamos a enunciar un teorema el cual, basado en la positividad de una función arbitraria y sin resolver analíticamente las ecuaciones, es capaz de determinar su estabilidad. La debilidad de este

método es que no ofrece un método para construir esta función maestra que permite alcanzar esta conclusión.

Veamos este mismo caso, pero utilizando el procedimiento anterior: linealizando el sistema.

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1\end{aligned}$$

La solución general corresponde al caso f) y de acuerdo al último Teorema, las ecuaciones linealizadas no producen una información válida acerca de la estabilidad del sistema no-lineal. El sistema lineal es estable pero al sacarlo de esta órbita no podemos predecir cuál será su comportamiento en $t \rightarrow \infty$. \square

V.5.1. Definición de una función positivo definida

Como será necesario trabajar con funciones positivas, estableceremos unas definiciones antes de enunciar el teorema de Liapunov.

Definición: La función $V(\vec{x})$, es *positiva definida*, sii \exists un $h > 0$, tal que $V(\vec{x}) > 0$ para $0 < |\vec{x}| < h$.

Definición: La función $V(\vec{x})$, es positiva *semi-definida* sii \exists un $h > 0$, tal que $V(\vec{x}) \geq 0$ para $0 < |\vec{x}| < h$.

Definición: La función $V(\vec{x})$ es *indefinida*, sii no es ni definida ni semidefinida.

Ejemplo

Examinemos la cualidad de positiva definida (semi-, o indefinida) de las siguientes funciones, para el caso de un espacio de tres dimensiones.

$V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^4$	positiva definida, (h arbitrario)
$V(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_3^2$	positiva definida (h arbitrario)
$V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^3$	positiva definida (h pequeño)
$V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$	positiva semidefinida ($x_3 > 0, x_1 = x_2 = 0$)
$V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2$	positiva definida
$V(\vec{x}) = x_1$	indefinida
$V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^4$	indefinida \square

No existe un criterio general para clasificar la positividad de las funciones, salvo para el caso de las funciones homogéneas, éstas cumplen la siguiente condición: $V(\lambda\vec{x}) = \lambda^m V(\vec{x})$, para un λ arbitrario, si esta función es positiva definida en una región, lo es en todo el espacio. Una función con estas propiedades se denomina forma de orden m .

Criterio simple para formas cuadráticas

Para que una forma cuadrática sea positiva, debe cumplirse que:

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x} \quad , \quad A^T = A = a_{ij} \text{ (simétrica y real)}$$

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Esto constituye una condición necesaria y suficiente para que $V(\vec{x})$ sea definida positiva.

V.5.2. Teorema de Estabilidad de Liapunov

Teorema

Sea \bar{x} un punto fijo de la ecuación $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ y $V: W \rightarrow \mathbb{R}$, una función diferenciable definida en alguna vecindad de $W \subseteq U$ de \bar{x} , tal que:

- $V(\bar{x}) = 0$ y $V(\bar{x}) > 0$, si $x \neq \bar{x}$.
- $\dot{V}(x) \leq 0$, en $W - \{\bar{x}\}$.

Entonces el punto \bar{x} , es un punto estable.

Si además,

- $\dot{V}(x) < 0$, en $W - \{\bar{x}\}$,
entonces \bar{x} es *asintóticamente estable*.

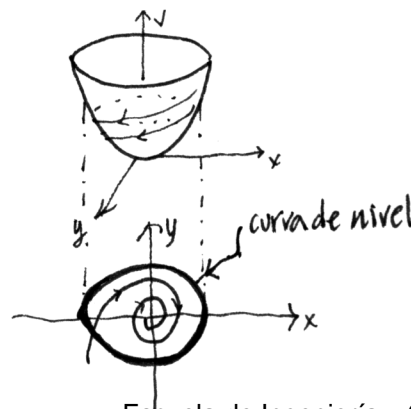
Comentarios

- En estos enunciados omitimos la dependencia de la función de Liapunov en el tiempo, pero esto fue solamente porque nos interesan los sistemas autónomos. Ambos teoremas se pueden generalizar para cubrir esos casos.

-

$$\dot{V}(\vec{x}, t) \equiv (\nabla V) \cdot \vec{f}$$

indica la derivada temporal de $V(\vec{x})$ a lo largo de las órbitas del sistema dinámico: $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$. De acuerdo a esta afirmación, el significado del teorema de Liapunov es el siguiente: el trazado de las órbitas en el potencial $V(\vec{x})$ es una línea que se aproxima al origen a medida que transcurre

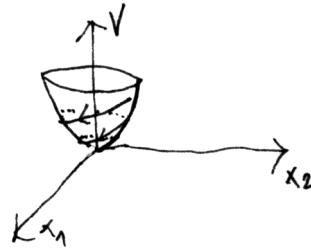


el tiempo (asintóticamente estable). En caso que exista un cero de la función $V(\vec{x})$ en un punto fuera del origen (negativa semi-definida), entonces la órbita puede quedar atrapada allí, y el punto es estable).

- Si $\dot{V}(x, t)$ es negativa definida, entonces la trayectoria de la partícula siempre llega al origen: es asintóticamente estable.

- Existe un teorema que asegura la existencia de una función que satisfaga alguno de los teoremas de Liapunov para cualquier ecuación diferencial que tenga solución para el caso linealizado.

El problema es que éste es un teorema de existencia, no incluye un método para construir la función de Liapunov de forma tal que sea posible extraer información relevante acerca del problema.



No existe indicación para encontrar una función que se acomode a los teoremas de Liapunov. Las funciones más socorridas son las integrales de movimiento, como la energía, el momentum angular o incluso la entropía.

- Hay un sin número de teoremas para ajustar una función de Liapunov a las exigencias de un cierto tipo de problemas, pero todas se refieren a casos particulares y son, en general, complejos. A nosotros sólo nos interesa conocer este método y dar un par de ilustraciones que muestren su utilidad.

Ejemplo

Estudiar la estabilidad del oscilador armónico no-lineal, incluyendo un término adicional que representa la viscosidad del medio en el cual oscila.

a) Primero resolveremos este problema sin incluir el términos de viscosidad

$$m \ddot{x} + k(x + x^3) = 0.$$

La función de Liapunov que escogemos para este caso es:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + k \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 \right)$$

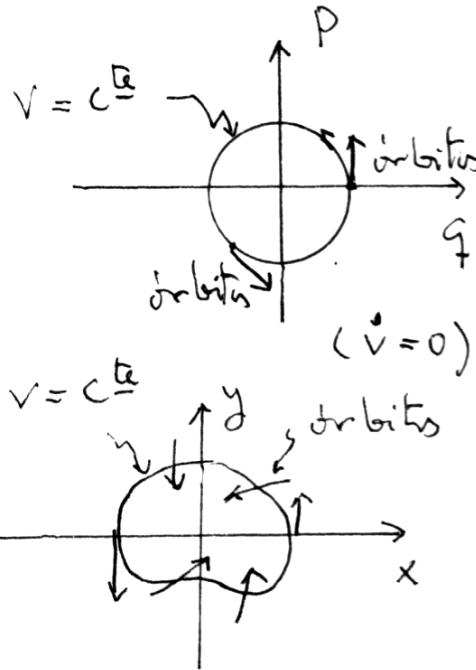
Si calculamos \dot{V} , obtenemos:

$$\dot{V} = m y \dot{y} + k(x + x^3) \dot{x},$$

reemplazando las ecuaciones de movimiento, ya que la derivada de la función de Liapunov debe hacerse a lo largo de la órbita de la partícula, se obtiene:

$$\dot{V} = -k y(x + x^3) + k y(x + x^3) = 0$$

de modo que la función de Liapunov es nula. La interpretación geométrica de este resultado es que las órbitas son tangentes a las superficies $V = \text{Constante}$. Al menos en el caso del oscilador lineal, es lo esperado. Esto es lo que sucede en el caso del oscilador armónico: las curvas de nivel ($V = \text{constante}$) son elipses y las partículas viajan a lo largo de estas elipses.



b) Eligamos la misma función de Liapunov pero ahora introduzcamos un término disipativo en la ecuación de movimiento del oscilador:

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + k(x + x^3) = 0, \quad \text{con } \alpha > 0$$

La función de Liapunov que adoptaremos, inicialmente, para este sistema es:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m \dot{y}^2 + k \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \right),$$

su derivada a lo largo de las órbitas es:

$$\dot{V} = -\alpha m \dot{y}^2,$$

puesto que todo es igual que en el caso anterior, excepto el término disipativo. Esta función es *negativa semi-definida*, por lo tanto el sistema es estable pero no asintóticamente estable como nosotros sabemos que debe ser. El teorema de Liapunov garantiza la estabilidad, pero no podemos asegurar la estabilidad asintótica. Por otra parte nosotros sabemos que existe un atractor para este sistema: el oscilador disipa toda su energía y finalmente se detiene. En conclusión, el teorema de Liapunov, con esta función de prueba no permite obtener toda la información contenida en este sistema.

Usemos los grados de libertad que nos otorga el Teorema de Liapunov: no establece una forma de inventar la función que busquemos, de modo que puede ser cualquier función que sea positiva definida alrededor del origen. Como queremos que la derivada de esta nueva función sea negativa definida, (para que resulte ser asintóticamente estable) incluimos nuevos términos que incluyan x^2 . Aquí no hay una receta general, sólo aproximaciones sucesivas...

Si intentamos la siguiente función:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m \dot{y}^2 + k \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \right) + \beta \left(x \dot{y} + \frac{\alpha x^2}{2} \right)$$

Derivando esta función a lo largo de las trayectorias del sistema, se obtiene después de simplificar:

$$\dot{V} = -\beta \frac{k}{m} (x^2 + x^4) - (\alpha m - \beta) \dot{y}^2,$$

esta derivada es negativa definida si se cumple que $\alpha m > \beta$. De este modo el teorema de Liapunov nos dice que este sistema es asintóticamente estable, como esperábamos poder demostrar.

Ejemplo

Estudiemos el caso de un oscilador con atenuación no-lineal, denominado de van der Pol:

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \text{ con } \varepsilon > 0.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, usamos la energía del oscilador armónico sin disipación, como la función de Liapunov.

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2) \equiv V(x, \dot{x})$$

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = -\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x}^2$$

Si $\varepsilon < 0$, entonces para $x^2 < 1$, $\dot{V}(x, \dot{x})$ es negativa definida. Como $\dot{V} < 0$ y no existe otro punto, excepto la solución trivial que haga $\dot{V} = 0$ –como se puede ver si reemplazamos $\dot{x} = 0$ en la ecuación inicial–, entonces el objeto cae hacia $\vec{x} = 0(x = 0, \dot{x} = 0)$.

El punto $x = 0, \dot{x} = 0$ es asintóticamente estable. \square

Resolvamos este mismo problema con el método usual:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x &= 0, & \Rightarrow \\ \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\varepsilon(x^2 - 1)y - x\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}\dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 0, x = 0.$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \varepsilon y - x\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$-\lambda(\varepsilon - \lambda) + 1 = 0, \Rightarrow \lambda = \left[\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \right] / 2.$$

Si $\varepsilon < 0$ entonces el origen es asintóticamente estable, como demostramos anteriormente.

Si $\varepsilon > 0$ el origen es inestable.

Ejemplo

Estabilidad de un cuerpo rígido en rotación alrededor de un punto fijo en ausencia de torques externos.

Nota: este es un problema complicado en su álgebra. Se incluye aquí solamente para ilustrar el método de Liapunov. Además, nos permite determinar –en forma definitiva– la estabilidad en la rotación de este cuerpo estudiada anteriormente. Recordemos que por ser de tipo elíptico, no fue posible ir más allá de los términos lineales.

Ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned} A \dot{p} &= (B - C) q r \\ B \dot{q} &= (C - A) r p \\ C \dot{r} &= (A - B) p q \end{aligned}$$

Escribamos la conservación de la energía y el momentum angular para posteriormente incluirlas –de acuerdo a la receta mencionada anteriormente–, en la función de Liapunov:

$$T = \frac{1}{2}(A p^2 + B q^2 + C r^2),$$

$$\vec{L} = A p \hat{i} + B q \hat{j} + C r \hat{k},$$

$$L^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2.$$

Estudiemos la estabilidad alrededor de $p = \omega$, $q = r = 0$.

$$\begin{aligned} y_1 &= p - \omega \\ y_2 &= q' \\ y_3 &= r' \end{aligned}$$

La energía es siempre un candidato seguro a participar en la construcción de la función de Liapunov.

$$F_1(y_1, y_2, y_3) = A y_1^2 + B y_2^2 + C y_3^2 + 2A\omega y_1 + A^2\omega^2$$

debemos eliminar $A^2 \omega^2 = \text{Constante de } F_1$, porque la función de Liapunov debe cumplir con: $V(\vec{y} = 0) = 0$. Otra función que puede ser de utilidad es el cuadrado del momentum angular:

$$F_2(\vec{y}) = A^2 y_1^2 + B^2 y_2^2 + C^2 y_3^2 + 2A^2 y_1 \omega.$$

A partir de estas dos funciones creamos una tercera que contenga los términos cruciales en la estabilidad del trompo: $(B - A)$ y $(C - A)$. Después de varias horas pensando, esto se puede lograr si se reemplaza el último término que aparece en F_2 , $2A^2 y_1 \omega$ por: por

$$A [2 A \omega y_1] = A F_1 - A (A y_1^2 + B y_2^2 + C y_3^2),$$

Haciendo el álgebra, se obtiene:

$$\begin{aligned} F_3(\vec{y}) &= A^2 y_1^2 + B^2 y_2^2 + C^2 y_3^2 \\ &\quad - A^2 y_1^2 - A B y_2^2 - A C y_3^2 - A C y_3^2 + A F_1 \\ F_3 &= F_2 - A F_1 = B(B - A) y_2^2 + C(C - A) y_3^2 \end{aligned}$$

Si $B > A$ y $C > A$, F_3 es *positiva semidefinida*, por lo tanto no podemos aplicar ninguno de los teoremas conocidos.

Realicemos un nuevo intento: introduzcamos en F_3 el término y_1^2 para que deje de ser *positiva semidefinida* y podamos utilizar los teoremas de Liapunov. Ensayemos

$$\begin{aligned} F = F_1^2 \pm F_3 &= \{A y_1^2 + B^2 y_2^2 + C y_3^2 + 2A \omega y_1\}^2 \\ &\quad \pm \{B(B - A) y_2^2 + C(C - A) y_3^2\}. \end{aligned}$$

Es claro que la expresión encerrada en la primera llave es *positiva definida*. La segunda expresión es también *positiva definida* si $B > A$ y $C > A$. Usando Liapunov, descubrimos que $\nabla F(\vec{x}) \vec{x} > 0$, por lo tanto las perturbaciones de un trompo (sin gravedad) correspondiente a este caso son *estables*.

Análogamente, si utilizamos el *signo negativo*, la función F es positiva definida si $A > B$ y $A > C$. Podemos aplicar Liapunov y demostrar que este tipo de perturbaciones son también estables.

$$F = F_1^2 \oplus F_3 \quad : \quad B > A, C > A \Rightarrow \text{positiva definida} \Rightarrow \text{es estable.}$$

$$F = F_1^2 \ominus F_3 \quad : \quad A > B, A > C \Rightarrow \text{positiva definida} \Rightarrow \text{es estable.}$$

Conclusión: En un cuerpo rígido rotando libremente, sin torque externo, las perturbaciones alrededor del eje de inercia más grande o más pequeño son asintóticamente estables. \square

V.6. Bifurcaciones y cambio de estabilidad

Estudiemos un sistema dinámico que contiene un parámetro en sus ecuaciones de movimiento.

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}; \mu)$$

El interés de este problema es la dependencia que aparece entre la estabilidad del sistema y los valores que puede tomar este parámetro. Esta relación será fundamental en el caso de sistemas caóticos. Los atractores, o puntos de equilibrio, dependen del valor que toma el parámetro μ .

Definiremos el valor crítico de este parámetro de la siguiente forma:

Supongamos que tenemos un punto fijo. Asociado a él existen varios autovalores λ que dependen funcionalmente del parámetro μ .

Si $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$, con $\mu < \mu_c \Rightarrow$ punto fijo *estable*.

Si $\text{Re} \lambda_j > 0$ para al menos un j cuando $\mu > \mu_c$, entonces tenemos una bifurcación en $\mu = \mu_c$ donde $\Re \lambda_j = 0$.

Ejemplo

Estudiemos el comportamiento de la siguiente ecuación: $\dot{x} = \mu x - x^2$, para diferentes valores del parámetro μ .

Los puntos fijos ocurren en $\bar{x} = 0$ y $\bar{x} = \mu$.

Si linealizamos la ecuación en torno a $\bar{x} = 0$, tenemos:

$$\dot{x} = \mu x, \quad x = x_0 e^{\mu t},$$

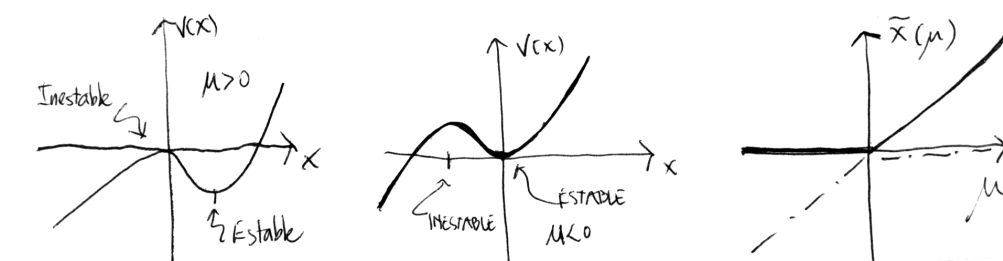
que resulta ser *estable* para $\mu \leq 0$, e *inestable* para $\mu > 0$. Las oscilaciones en torno a $\bar{x} = \mu$ se estudian ubicando el punto fijo en el origen:

$$\begin{aligned} z &\equiv x - \bar{x}, \Rightarrow z = x - \mu, \\ \dot{x} &= \mu x - x^2, \Rightarrow \dot{z} = \mu(z + \mu) - (z + \mu)^2, \text{ de aquí se obtiene:} \\ \dot{z} &= -\mu z \Rightarrow z = z(0) e^{-\mu t} \end{aligned}$$

De modo que $\bar{x} = \mu$ es *estable* si $\mu > 0$, e *inestable* si $\mu < 0$.

Podemos visualizar el comportamiento de esta ecuación definiendo un potencial para este movimiento (ver diagrama izquierdo de la Figura):

$$\dot{x} = \mu x - x^2 = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \text{donde } V(x) = -\frac{1}{2}\mu x^2 + \frac{1}{2}x^3$$



La Figura de la derecha ilustra el comportamiento de los puntos fijos al variar el parámetro μ . La línea horizontal continua indica la estabilidad del punto fijo $\bar{x} = 0$ para $\mu < 0$. Su continuación con línea de puntos indica que para $\mu > 0$ este punto se torna inestable. En la misma Figura aparece el comportamiento del punto $\bar{x} = \mu$, que está representado por una recta inclinada. Allí, la línea continua representa la estabilidad frente a los valores de $\mu > 0$ y la inestabilidad (línea discontinua) para $\mu < 0$.

Ejemplo

A continuación estudiaremos la estabilidad de un sistema mecánico simplificado. Consiste de un aro de radio a que gira en torno a un eje vertical con velocidad

angular constante ω . Un pequeño anillo puede moverse libremente, sin roce, a lo largo del anillo.

Estudiar los puntos de equilibrio y la estabilidad de este anillo para distintos valores de la velocidad angular.

Usaremos el método del Lagrangiano para encontrar las ecuaciones de movimiento. La energía cinética y potencial es:

$$T = \frac{ma^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta), \quad V = m g a (1 - \cos \theta).$$

Usando $L = T - V$, obtenemos la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{\omega^2 a}{g} \cos \theta - 1 \right) \frac{g}{a} \sin \theta,$$

y utilizando variables sin dimensiones –extendiendo de esta forma los resultados a una familia de casos–, definidas de la siguiente forma:

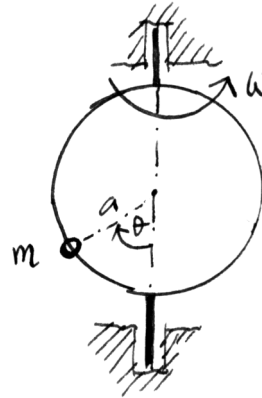
$$\lambda = \frac{\omega^2 a}{g}, \text{ y transformando } t^2 \rightarrow \frac{t^2 g}{a}, \text{ se obtiene:}$$

$$\ddot{\theta} = \sin \theta (\lambda \cos \theta - 1).$$

Escribiéndolo como un sistema de dos ecuaciones de primer orden, para aplicar el método ya estudiado:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= u \\ \dot{u} &= \sin \theta (\lambda \cos \theta - 1) \end{aligned} \right\}$$

Los puntos fijos son: $\theta = 0, m\pi, u = 0$ y $\sin \theta [\lambda \cos \theta - 1] = 0, u = 0$, de donde se obtienen las siguientes posibilidades: $\cos \theta = 1/\lambda$ en caso que $\lambda \geq 1$ y –si definimos $\lambda_c =$



$1 - \lambda < 1 \Rightarrow \theta = \pi, n = 0, 1, 2, \dots$

A continuación debemos estudiar la estabilidad de estos puntos alrededor de estos puntos. Recordemos que si $\theta = 2n\pi \Rightarrow \sin \theta \sim \theta$ y $\cos \theta \sim 1$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. Utilizando estas aproximaciones, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (\lambda - 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ u \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \mu I) = 0 = \det \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (\lambda - 1) & 0 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mu^2 - (\lambda - 1) = 0, \quad \mu = \pm i \sqrt{1 - \lambda}, \quad \text{con } \lambda < 1.$$

De aquí se deduce que $\theta = 0$ es un punto fijo *estable*. Veamos que sucede para $\theta = \pi$. En este caso, para trabajar más cómodamente con el nuevo punto fijo definimos $y \equiv \theta - \pi$, entonces las ecuaciones iniciales quedan:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= u, & \dot{u} &= \sin(\pi + y) [\lambda \cos(\pi + y) - 1], \\ \dot{u} &= -\sin y [-\lambda \cos y - 1] \simeq y [\lambda + 1]. \end{aligned}$$

el determinante se transforma en:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 + \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ u \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mu^2 = (1 + \lambda) > 0$. De modo que este punto fijo es *inestable*. Este resultado se extiende, por inspección, a: $\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

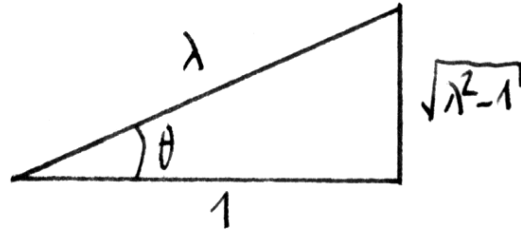
Si $\lambda = 1$, la matriz adopta la forma de Jordan con un término fuera de la diagonal que es inestable para $\theta = 0, 2\pi, \dots$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Existen otros puntos de estabilidad: Si $\lambda > 1$, $\theta = 2n\pi$ es inestable (tipo silla).

$$\theta = \pm \cos^{-1}(1/\lambda)$$

De la Figura se deduce que:

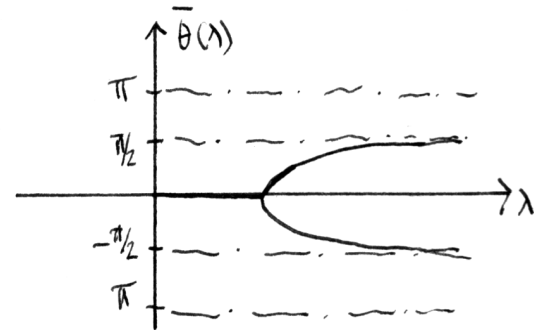
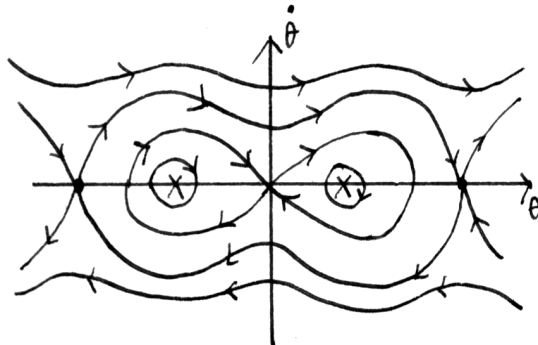
$$\cos \bar{\theta} = \frac{1}{\lambda}, \quad \sin \bar{\theta} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda}.$$



Definiendo la nueva variable como $y = \theta - \bar{\theta}$, tenemos:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sin(\bar{\theta} + y)[\lambda \cos(\bar{\theta} + y) - 1] \\ &= [\sin \bar{\theta} \cos y + \cos \bar{\theta} \sin y][\lambda(\cos \bar{\theta} \cos y - \sin \bar{\theta} \sin y) - 1] \\ &= \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda} + \frac{y}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda} - \lambda \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin y - 1\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}(\sqrt{\lambda^2 - 1} + y)[- \sqrt{\lambda^2 - 1} \cdot y] \\ f(y) &= -\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} y \end{aligned}$$

Las ecuaciones linealizadas de movimiento son:



$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$$

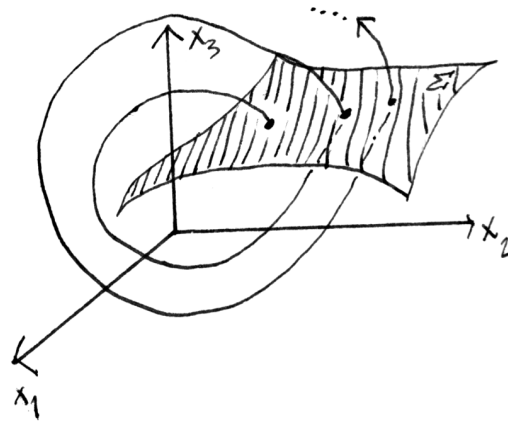
$$\mu^2 + \left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}\right) = 0, \quad \mu = \pm i \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}}.$$

Este punto fijo corresponde a uno del tipo elíptico, es decir, la estabilidad de la ecuación no lineal depende del tipo de no linealidad que contengan las ecuaciones originales. \square

V.7. Mapeo de Poincaré

Como estamos interesados en el comportamiento asintótico de los sistemas dinámicos no es necesario seguir la trayectoria punto a punto, basta tomar una muestra en ciertos intervalos de tiempo.

Supongamos que tenemos tres variables en el espacio de fase, en dicho espacio se elige una sección Σ con algún criterio que depende de la geometría o del problema mismo. Suponiendo que la trayectoria es recurrente, en este plano comenzará a existir a poblarse con una nube de puntos que reflejan el instante en que el sistema perforó dicha superficie.



La propiedad fundamental de esta recurrencia es que el paso siguiente está determinado por el anterior, esto es equivalente a integrar la órbita desde un paso hasta el siguiente.

La experiencia ha demostrado que las propiedades fundamentales de la ecuación diferencial quedan reflejadas en las propiedades de este mapeo.

El nuevo planteamiento del problema es mucho más simple. Las propiedades irrelevantes de corto alcance son eliminadas, sólo permanecen las propiedades esenciales del sistema.

Ejemplo

Supongamos una partícula cuyo diagrama de fase es un toro. Corresponde al caso de un oscilador en dos dimensiones, cuya constante elástica es diferente en cada una de las dos direcciones. El diagrama en el espacio de fase se puede dibujar directamente sobre el toro o desplegarlo en un rectángulo haciendo las identificaciones correspondientes.

Si mapeamos este movimiento sobre una sección transversal del toro, el número de puntos que aparecerán el círculo depende de la razón entre las dos frecuencias f_1 y f_2 .

Si la razón entre ambas frecuencias es un número racional:

$$\frac{f_1}{f_2} = \# \text{ racional} \Rightarrow$$

un número finito de puntos.

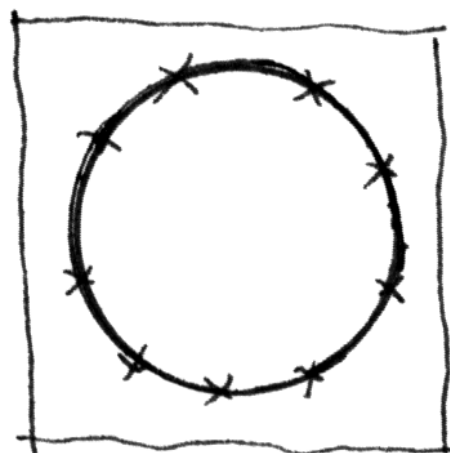
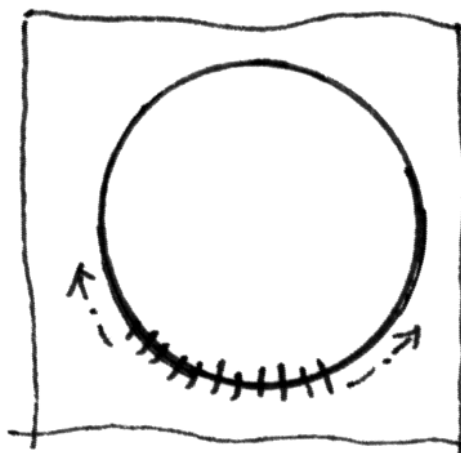
Por otra parte si:

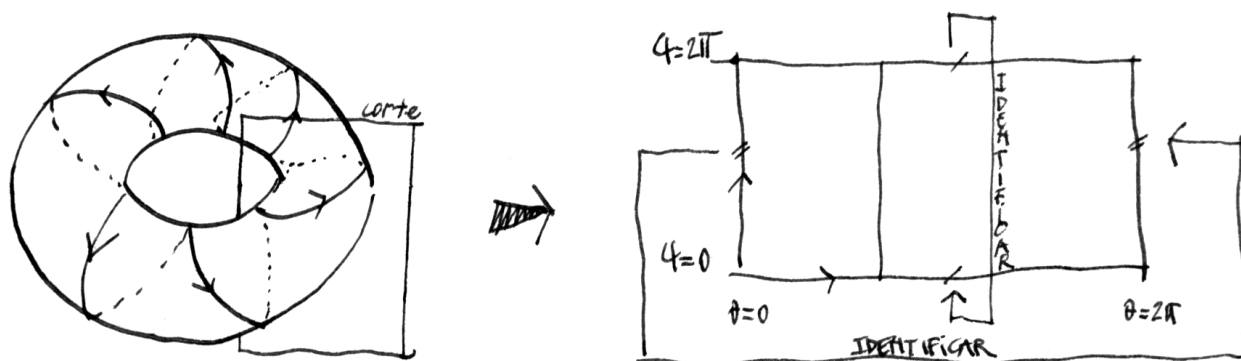
$$\frac{f_1}{f_2} = \# \text{ irracional} \Rightarrow$$

un número infinito de puntos.

Ejemplo

A continuación analizaremos un sistema de dos grados de libertad y que está descrito por un Hamiltoniano $H(x, y, p_x, p_y)$. El sistema tiene una sola integral de movimiento conocida, la energía, de modo que





no se puede resolver en forma analítica (se necesitan dos cantidades conservadas). Estudiaremos las órbitas asociadas a partículas ligadas. Usaremos la energía como parámetro y en su descripción usaremos el mapeo de Poincaré. El problema pertenece a Henon y Heiles (1964).

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y), \quad V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2 y - \frac{2}{3} y^3).$$

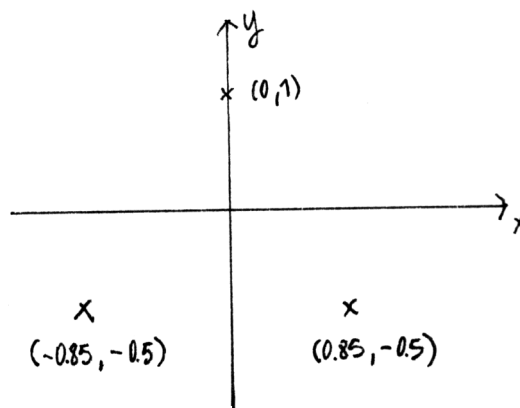
Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x \\ \dot{y} &= p_y \\ \dot{p}_x &= -(x + 2xy) \\ \dot{p}_y &= -(y + x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Los puntos fijos están dados por:

$$p_x = 0, \quad p_y = 0.$$

Las coordenadas x e y , tiene más posibilidades: si $x = 0$, y puede tomar el valor 0



ó 1. Para $y = -1/2$, le corresponde un valor $x = \pm\sqrt{3/4}$.

En resumen existen cuatro puntos de equilibrio cuyas coordenadas (x, y) son: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(+\sqrt{3/4}, -1/2)$, y $(-\sqrt{3/4}, 1/2)$.

Analicemos la estabilidad del punto ubicado en el centro del potencial, $(0, 0)$, en este caso las ecuaciones de movimiento para el sistema linealizado se pueden escribir directamente:

$$\ddot{x} = -x, \quad \ddot{y} = -y, \quad \ddot{p}_x = -p_x, \quad \ddot{p}_y = p_y,$$

Estas ecuaciones corresponden, matemáticamente, a dos osciladores independientes con coordenadas (x, y) y (p_x, p_y) . De esta forma los autovalores son imaginarios puros y la estabilidad del sistema es del tipo elíptico.

Análogamente se puede mostrar que el punto $(0,1)$ posee una estabilidad hiperbólica. Esta afirmación se puede demostrar analizando el movimiento en el eje $x = 0, p_x = 0$. El movimiento resultante en dicha dirección corresponde al de un sistema cuyo potencial está dado por

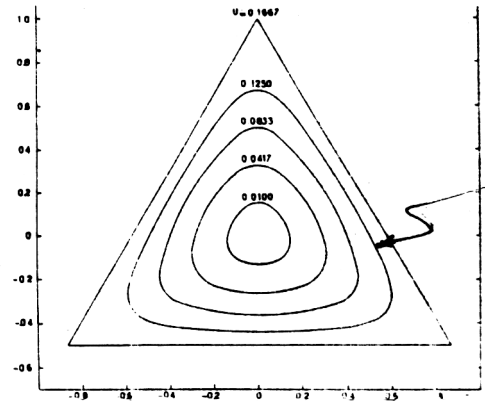
$$V(y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3.$$

Este ejemplo ya fue estudiado al comienzo de este capítulo, concluyendo que es inestable alrededor del punto $y = 1$.

Como el Hamiltoniano no depende del tiempo, la energía se conserva. Resulta útil dibujar las líneas equipotenciales $V = \text{Constante}$, pues representan el límite que pueden alcanzar las partículas con Energía $E=V(x,y)$.

$$V(x, y) = V_o = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3)$$

con el siguiente cambio de variable tenemos:



$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \Rightarrow \quad V(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \rho^2 + \frac{1}{3} \rho^3 \sin 3\theta.$$

Expresado de esta forma, queda explícita su simetría bajo la rotación $\theta \rightarrow \theta + 2\pi/3$. Tiene una simetría triangular como se puede apreciar en la Figura.

Como el punto $x = 0, y = 1$, es inestable, debido a la simetría de rotación también lo son el resto de los vértices del triángulo. Alrededor de dichos puntos el movimiento deja de ser recurrente y se aleja hacia infinito. El valor del potencial en dicho punto es $V(0, 1) = 1/6$.

Es decir para $V(x, y) \leq E = 1/6$, el movimiento está confinado al triángulo. Cualquier trayectoria que comience dentro de la línea equipotencial $V = +1/6$, está restringida a moverse en el interior del triángulo.

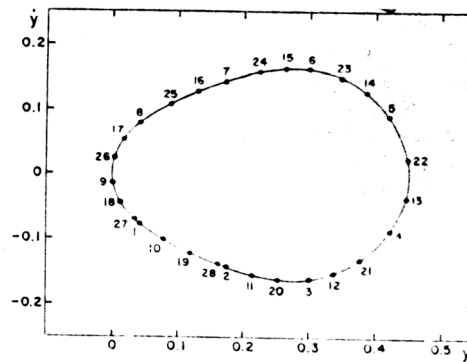
Mapeo de Poincare

Cada vez que la órbita atraviese el plano $x = 0$ con $p_x \geq 0$, marcamos un punto en el plano (y, p_y) . Esto corresponde al mapeo de Poincaré que hemos decidido emplear en este problema. Debemos elegir uno de los dos signos posibles para p_x , debido a la ecuación de conservación de la energía hace posible la existencia de ambas posibilidades.

$$p_x = \pm (2E - p_y^2 - y^2 + \frac{2}{3}y^3)^{1/2}$$

Esta elección define el ciclo, cada punto marcado en el plano corresponde a que el sistema tiene los valores $x = 0, p_x \geq 0$.

Estudiemos cómo evoluciona este sistema para $E = 1/12$. Dados los valores iniciales hacemos evolucionar (numéricamente) el sistema. La órbita que se obtiene después del mapeo de Poincare *parece* indicar la existencia de una órbita



$$E = 1/12 = 0.0833$$

cerrada, como se indica en la Figura. Si esto es efectivamente así, nos estaría indicando que existe un integral de movimiento adicional y que no hemos podido expresar en término de funciones conocidas.

Los resultados *sugieren* que existe una curva invariante. La curva se ajusta a los puntos y de esta forma es un invento de quien la traza.

Podemos deducir la frecuencia con que una partícula recorre la órbita; en la primera vuelta ha cruzado diez veces el plano: $1/9 > \nu > 1(\text{vuelta})/10(\text{cruces})$. Haciendo este tipo de cálculo podemos estimar el tiempo (período) que demora en promedio en recorrer un circuito como el de la Figura.

La región accesible está dada por $p_x \in \mathcal{R}$, es decir:

$$p_y^2 + y^2 - \frac{2}{3}y^3 < 2E.$$

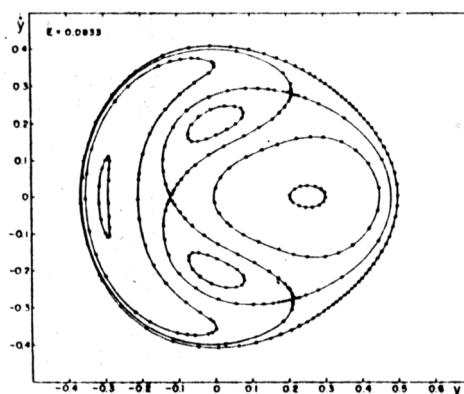
Para $E = 1/8 > 1/12$, el diagrama se vuelve caótico, aunque persisten algunas órbitas, otras se transforman en puntos que llenan el plano de fase accesible. Todos los puntos señalados en

los dos diagramas que se acompañan corresponden a *una misma* trayectoria. Si uno observa cómo aparecen los puntos, se notará que lo hacen en forma caótica, sin orden, y tienden a llenar el plano o espacio de fase disponible.

El sistema es más complejo que lo esperado. La situación empeora cuando la energía aumenta.

Por ejemplo, si $E = \frac{1}{6}$: los cruces casi llenan la superficie.

Es interesante tener un parámetro que indique cuantitativamente la presencia de caos. Una forma de hacerlo es evaluar el área accesible –vía mapeo de Poincaré–, del espacio de fase que es posible cubrir con *trayectorias* del sistema estudiado. Aproximadamente para energías $E < 0,12$, el espacio accesible es totalmente



$E = 1/12$
Órbitas con distintos
valores iniciales

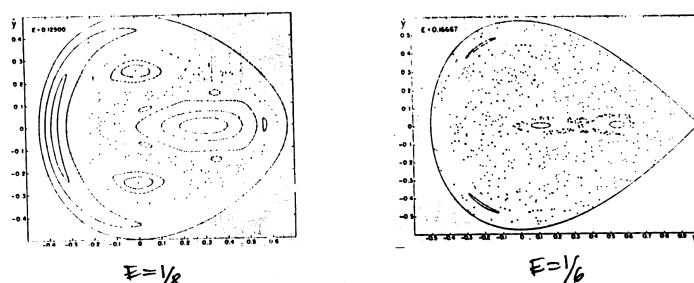


Figura V.3: Para este valor de la energía, las curvas son integrales. Se cruzan en tres puntos en el espacio de fase accesible, sin embargo estos no son puntos fijos, puesto que el momentum p_x asociado a estos puntos puede tomar distintos valores positivos allí.

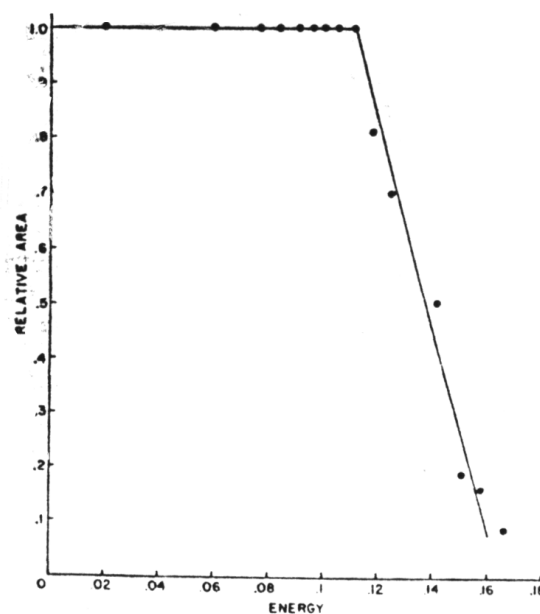
cubierto por trayectorias continuas. Es decir, dado un punto, siempre partiendo de allí se puede generar una trayectoria. A medida que la energía sobrepasa el valor indicado, aparecen regiones que, tomadas como condiciones iniciales, no generan una trayectoria sino más bien una serie de puntos caóticos. Al seguir aumentando la energía la situación empeora. La figura a continuación acompaña este resultado.

V.8. Ejercicios

- 1.— Una masa puntual m desliza sin fricción dentro de una superficie de revolución $z = \alpha \sin(r/R)$ (coordenadas cilíndricas) cuyo eje de simetría está en la dirección de un campo gravitacional uniforme g considere $0 < r/R < \pi/2$.
 - (a) Contruya el Lagrangiano $L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$ y calcule las ecuaciones de movimiento para las coordenadas r y ϕ . b) ¿Existen órbitas circulares horizontales estacionarias?
 - c) ¿Cuál de estas órbitas es estable bajo pequeños impulsos a lo largo de la superficie transversal a la dirección del movimiento?

- 2.— Problemas de Estabilidad utilizando Liapunov.

Para los puntos singulares $x_1 = x_2 = 0$ estudiar la estabilidad de los siguientes sistemas:



$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \dot{x}_1 &= -(x_1 - 3x_2)(1 - 2x_1^2 - 4x_2^2); \\ \dot{x}_2 &= -(x_1 + x_2)(1 - 2x_1^2 - 4x_2^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \dot{x}_1 &= -x_1^3 - 3x_2; \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - 5x_2^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_1x_1 - a_2x_2 - (b_1x_2 + b_2x_1)^2x_2 \\ &\text{con } a_1, a_2, b_1, b_2 \text{ constantes} \\ &a_1, a_2 > 0 \end{aligned}$$

3.- Investigar la estabilidad de las posiciones de equilibrio y estimar el dominio de atracción de la posición de equilibrio asintóticamente estable para $\ddot{x} +$

$$a\dot{x} + 2bx + 3x^2 = 0 \quad a, b \text{ ctes. positivas}$$

- 4.– Analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio del siguiente sistema usando el método de Lyapunov.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) - 2x_1^3(t)$$

Bosquejar las trayectorias en el plano de fase alrededor de los puntos de equilibrio. Compare los resultados entregados por cada método.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Hint: considere la siguiente función de Lyapunov} \\ v(x_1, x_2) = \frac{1}{21}(x_1^4 + 2x_1^2 + x_2^2)!! \end{array} \right]$$

- 5.– Analizar, empleando el método de Liapunov, bajo qué condiciones el siguiente sistema resulta ser asintóticamente estable.

$$\dot{x}_1 = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_1(t)x_1(t) + a_2(t)x_2(t)$$

- 6.– La población de una especie animal, $H(t)$ y la de uno de sus parásitos, $P(t)$ que ésta tiene, puede escribirse aproximadamente mediante las ecs.:

$$\frac{dH}{dt} = (a - bP)H \quad H > 0$$

$$\frac{dP}{dt} = \left(c - \frac{dP}{H}\right)p \quad a, b, c, d, \text{ ctes. positivas}$$

(i) Encontrar los puntos fijos

(ii) Estudiar Estabilidad.

- 7.– El modelo de Volterra describe la dinámica de un medio que consiste de tres agentes: presa- depredador - pescador. Su origen se remonta al estudio de un modelo para la población de peces y los permisos de pesca en el mar Adriático.

Las ecuaciones de Volterra son:

$$1) \quad \frac{dx}{dt} = ax(-1 + by) - H_1 x,$$

$$2) \quad \frac{dy}{dt} = cy(1 - dx) - H_2 x \quad \text{con } a, b, c, d, H_1, H_2 > 0.$$

Suponemos que la población de pescadores no es relevante para este problema. Ellos sólo intervienen mediante sus permisos de pesca.

- Identifique a las variables x e y con la población de los depredadores y las presas. Explique en forma clara y contundente (\equiv corta!) su decisión ¿Cuál es el término que indica –de acuerdo a la forma en que se planteó la ecuación–, la tasa de pesca (o extracción) permitida?
- Encuentre los puntos fijos y describa su estabilidad. En este último paso, utilice $a = b = c = d = 1, H_1 = H_2 \equiv H$ para acortar los cálculos.
- Encuentre una función de Liapunov para este problema en el caso en que *no* se permite la pesca de ninguna de las dos especies. A partir de esta función determine la estabilidad de la población.

Nota: Establezca una función de Liapunov sencilla y extraiga las conclusiones correctas que ella permita. Estas ecuaciones se pueden integrar, pero contienen singularidades que no permiten dar cuenta de la estabilidad –al menos hasta donde yo sé–, en forma global, es decir para todo $p = x - x_o$ y $q = y - y_o$ en la vecindad del punto fijo. Sin embargo Ud. (y nosotros también) podemos sacar conclusiones en ciertas regiones del plano (p, q) . Esto es lo que se le pide.

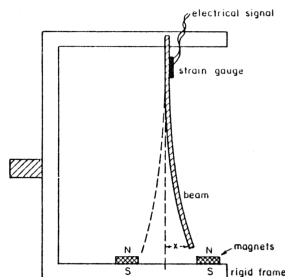
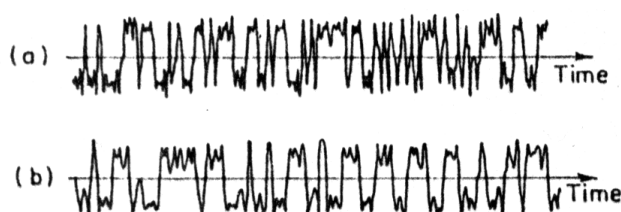


Figure 2.2.1. The magneto-elastic beam.

- 8.– La ecuación de Duffing representa el comportamiento de un oscilador con un término cúbico que modela la desviación no lineal que experimenta la rigidez del resorte al ser deformado. En la ecuación que se propone a continuación el término lineal de la rigidez (áquel que acompaña a β), ha sido introducido con un signo negativo:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - \beta x + x^3 = \gamma \cos \omega t.$$

Esta ecuación es el modelo teórico más simple de una viga sometida a una oscilación forzada, empotrada en uno de sus extremos y sometida a la acción de un par de imanes en el otro.



(a) Vibrations of the beam, and (b) a solution of equation

En el diagrama que se acompaña se incluyen dos gráficos que corresponden a la oscilación de una viga real y a la respuesta de este modelo teórico en el régimen caótico.

- Haciendo $\gamma = 0$, encuentre los puntos fijos de esta ecuación si $\delta > 0$. Considere los dos casos $\beta > 0$ y $\beta < 0$.
- Determine la estabilidad de estos puntos fijos, y haga un diagrama *cualitativo* de las trayectorias en el espacio de fase en cada uno de los casos.
- En la ecuación de este oscilador, haga $\delta = 0$ y $\gamma = 0$. A partir de la nueva ecuación obtenida, encuentre el Hamiltoniano y el Lagrangiano correspondiente.

Para cerrar este capítulo incluimos la continuación del problema resuelto al final del capítulo anterior. Aquí sólo repetimos el enunciado del problema.

Problema Resuelto

Para el péndulo de la figura, compuesto por un resorte de constante k , largo natural ℓ_o y una masa esférica m , se pide encontrar las ecuaciones de movimiento en una vecindad a las posiciones de equilibrio y dibujar el diagrama de fase.

nota: - Considerar g

El movimiento está contenido en el plano vertical.

$$\boxed{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0} \text{ Ec. mov. para } \theta(t)$$

$$\boxed{m(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r}) - k(r - \ell_o) + mg \cos \theta = 0} \text{ Ecuación de movimiento para } r(t)$$

Claramente, las ecuaciones obtenidas para el movimiento son no lineales.

Para obtener los puntos de equilibrio, calculamos los mínimos de la Energía total del sistema tanto para la variable r como para θ

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \theta} \right|_{\theta_o} = \left. \frac{\partial H}{\partial \theta} \right|_{\theta_o} = mgr \sin \theta_o = 0$$

consideremos la variable r como fija y no nula para obtener θ_o

$$\Rightarrow \boxed{\theta_o = 0}$$

$$\left. \frac{\partial E}{\partial r} \right|_{r_o, \theta_o} = \left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r_o, \theta_o} = \frac{p_\theta^2}{2m} \left(\frac{-2}{r^3} \right) + k(r - \ell_o) - mg \cos \theta_o = 0$$

$$\frac{m^2 r^4 \dot{\theta}^2}{2 \hbar} \left(\frac{-2}{r^3} \right) + k(r - \ell_o) - mg \cos \theta_o = 0$$

$$-mr\dot{\theta}^2 + k(r - \ell_o) - mg \cos \theta_o = 0$$

Además en el equilibrio $\dot{\theta} = \dot{r} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{r_o = \frac{mg}{k} + \ell_o}$$

Ahora para linealizar tenemos 2 posibilidades

1. Linealizar las ecuaciones de movimiento obtenidas anteriormente.
2. Dejar en el Hamiltoniano sólo los términos que generan una ecuación de movimiento lineal y luego obtener las ecuaciones de movimiento. (Esta segunda opción tiene la ventaja de dejar la expresión en función de las variables que necesitamos para graficar el plano de fase).

Opción 2.-

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \sigma(\theta^2)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{P_r^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{P_\theta^2}{mr^2} + \frac{1}{2} k(r - \ell_o)^2 - mg(r - \frac{r\theta^2}{2})$$

$$(a) \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} \Big|_{r_o} = \frac{P_\theta}{mr_o^2} \quad (b) \quad \dot{P}_\theta = \frac{-\partial H}{\partial \theta} \Big|_{r_o} = -mgr_o \theta$$

$$(c) \quad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m} \quad (d) \quad \dot{P}_r = \frac{-\partial H}{\partial r} = -k(r - \ell_o) + mg$$

con (a) y (b) $\Rightarrow -mgr_o \theta = mr_o^2 \dot{\theta}$

$$\text{Ec. Mov. (1)} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{r_o} \theta = 0$$

con (c) y (d)

$$\Rightarrow M\ddot{r} = mg - k(r - \ell_o) \quad \text{Ec. Mov. (2)}$$

Si definimos la variable

$$\rho = r - r_o$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} = \ddot{r}$$

Luego, la segunda ecuación de movimiento toma la siguiente forma:

$$m\ddot{\rho} = mg - k(\rho + \frac{mg}{k})$$

$$m\ddot{\rho} = -k\rho$$

$$\ddot{\rho} + \frac{k}{m}\rho = 0$$

Finalmente

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r_o}\theta = 0$$

$$\ddot{\rho} + \frac{k}{m}\rho = 0 \quad \rho = r - r_o$$

Bibliografía

- [1] *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of vector Fields* J. Guckenheimer and P. Holmes, 1983, Springer Verlag.
- [2] *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal* M. W. Hirsh and S. Smale, 1974, Editorial Alianza.
- [3] *Response and stability* A.B. Pippard, 1985, Cambridge press
- [4] *Non-Linear oscillations* P. Hagerdon, 1982, Clarendon Press.

