

FISICA MODERNA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 21 de septiembre de 2005

Índice general

II. Oscilador No-Lineal	29
II.1. Introducción	29
II.1.1. Ejemplo Ilustrativo	30
II.2. Solución en cuadratura	31
II.3. Teoría de Perturbaciones	35
II.3.1. Ecuación de Duffing	38
II.4. Oscilaciones Amortiguadas	49
II.4.1. Método de la energía para oscilaciones con amortiguamiento débil.	50
II.5. Oscilaciones Forzadas	63
II.5.1. Oscilaciones con $\delta = 0$ y una fuerza periódica externa.	63
II.5.2. Repaso de Oscilaciones	71
II.6. Movimiento en un campo que oscila muy rápido	84
II.6.1. Pequeñas oscilaciones	84
II.7. Procesos Estocásticos	86
II.7.1. Teoría Cinética	86
II.7.2. Movimiento Browniano	88

Capítulo II

Oscilador No-Lineal

II.1. Introducción

El oscilador armónico es un modelo universal. Está presente en todas las áreas de la física. Cualquier sistema que permanezca en una configuración de equilibrio estable y sea gentilmente removido, oscilará en torno a dicha configuración.

El péndulo matemático es un ejemplo. Su ecuación de movimiento es:

$$m \ell^2 \ddot{\theta} + m g \ell \sin \theta = 0.$$

si se desvía levemente de su posición vertical comenzará a oscilar. Como sólo se perturbó, su amplitud es pequeña y nos permite utilizar sólo el primer término de la aproximación en serie $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6 \pm \dots$. Así podemos obtener la solución $\theta(t) = \theta_o \sin(\omega t + \phi)$. Esta aproximación es válida para una oscilación de amplitud pequeña: con un ángulo de oscilación menor de (aproximadamente) 12° .

Algo similar ocurre con la dinámica de un resorte simple. La fuerza con que responde el resorte puede modelarse como: $f(x) = -k x + k_2 x^2 + k_3 x^3 \pm \dots$, donde x es el desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio del extremo del resorte y k, k_2, \dots caracterizan la rigidez del resorte. Si la elongación inicial x es muy pequeña comparada, por ejemplo, con el largo natural del resorte, entonces consideramos sólo el primer término de la serie de potencias. La fuerza es proporcional a

la deformación. En este caso la solución es conocida $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$. Esta solución aparece en muchas situaciones: el resorte, el péndulo, las oscilaciones del átomo de Nitrógeno en una molécula de amonio (NH_3) y otras más complejas como la vibración del globo terráqueo después de un fuerte terremoto...etc.

En este capítulo utilizaremos el desarrollo en serie de potencias de las fuerzas para ilustrar las propiedades de un oscilador no lineal. Un ejemplo clásico es la ecuación de Duffing:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = 0, \quad (\text{II.1})$$

Para aprender acerca de las ecuaciones no-lineales revisaremos tres métodos: estudiaremos la solución mediante una integral exacta (denominado cuadraturas), introduciremos la teoría de perturbaciones (desarrollo de la solución en serie de potencias con un parámetro para medir la convergencia) y el método de la energía en un medio disipativo. En el siguiente capítulo estudiaremos la aproximación variacional (o de Rietz).

Una alternativa importante y usada ampliamente es la aproximación numérica. No nos referiremos a ella en estos apuntes.

II.1.1. Ejemplo Ilustrativo

El principio de superposición.

Consideremos un oscilador lineal. En este caso si conocemos dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación, una superposición de ambas constituye una nueva solución. Esto no es válido para una ecuación no lineal. Esta propiedad marca una diferencia importante entre ellas. El siguiente ejemplo ilustra esta característica de los sistemas no lineales.

Ejemplo [5]

Considere la ecuación no-lineal:

$$\ddot{x} = -x + (x^2 + \dot{x}^2 - 1) \sin \sqrt{2}t$$

Podemos comprobar que, dada la particular estructura de la ecuación, existe un par de soluciones exactas. Estas son:

$$\begin{aligned}x_1 &= \sin t \\x_2 &= \cos t\end{aligned}$$

Podemos comprobar que en las ecuaciones no-lineales la superposición de las dos soluciones $x = A \sin t + B \cos t$, no constituye una nueva solución. Esto sí ocurre en los sistemas lineales. Conviene notar que no existe un teorema que nos garantice la existencia de un cierto número de soluciones en el caso de ecuaciones no-lineales. El cambio de una constante puede cambiar la naturaleza de la solución. Por ejemplo, si consideramos una variación de la ecuación anterior: $\ddot{x} = -x + (x^2 + \dot{x}^2 - 2)f(t)$ con $f(t)$ arbitrario, entonces $x(t) = \sin(t) + \cos(t)$ es solución de la ecuación. Sin embargo $\sin(t)$ o $\cos(t)$, tomados en forma independiente, no lo son.

Con respecto a la amplitud, podemos apreciar que NO es arbitraria. Las soluciones encontradas para el caso inicial, corresponden a los dos casos siguientes: $x_1(t) = \sin t$ se asocia con $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 1$. Si cambiamos las condiciones iniciales esta solución pierde su validez.

Una situación similar ocurre en el modelo de Henon-Heiles que se incluye en el capítulo de sistemas autónomos [capítulo V]. La solución numérica de este problema muestra trayectorias que dependen de las condiciones iniciales impuestas.

Estos ejemplos ilustran lo complejo del análisis de ecuaciones no-lineales. Marca la diferencia con los sistemas lineales.

II.2. Solución en cuadratura

En un sistema unidimensional, utilizando la conservación de la energía, podemos expresar el tiempo en función de la posición $t = t(x)$ en forma integral (lo que se denomina cuadraturas).

Si E_o y $V(x)$, representan la energía total y potencial respectivamente, $f(x)$ es una fuerza (o torque, como en el caso del péndulo) conservativa que actúa sobre el sistema, tenemos:

$$m\ddot{x} - f(x) = 0, \quad m\ddot{x} + \frac{dV(x)}{dx} = 0, \Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E_o. \quad (\text{II.2})$$

La definición de $V(x)$ es:

$$V(x) \equiv - \int f(x') dx'.$$

Despejando \dot{x} de la conservación de la energía [II.2], e integrando una vez, se obtiene:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E_o - V(x)]} \Rightarrow \int_0^t dt = \pm \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E_o - V(x)]}},$$

Como en un péndulo a la misma posición $x(t)$ le corresponde una rapidez positiva o negativa, es preciso tomar precauciones al hacer la integral y considerar, por ejemplo, sólo intervalos donde no cambie el sentido de la velocidad.

$$t = \pm \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m} [E_o - V(x')]} \quad (\text{II.3})$$

Esta es una ecuación general válida para cualquier potencia $V(x)$. No siempre esta integral puede expresarse en funciones conocidas. Ilustraremos este método con el caso de un péndulo matemático.

Ejemplo: el péndulo matemático.

Supongamos que $V(x)$ corresponde al potencial de un péndulo matemático.

$$m \ell^2 \ddot{\theta} + m g \ell \sin \theta = 0. \quad (\text{II.4})$$

Identificando los términos de la ecuación con los que conducen a la ecuación [II.3], definimos: $f(x) = -k \sin x$. De acuerdo a la ecuación del péndulo $k \equiv (m g)/\ell$. De este modo la ecuación del péndulo es la ecuación [II.2]: $m \ddot{x} + \{m g/\ell \sin x = 0\}$. Utilizando la expresión anterior, obtenemos:

$$V(x) = k \int_0^x \sin x' dx' = k [1 - \cos x].$$

Hemos supuesto que $V(x = 0) = 0$. Las condiciones de borde en el punto de máxima amplitud ($x = C$) son: $\dot{x} = 0$, $V(C) = E_o$. A partir de esta expresión, la

energía se puede expresar como:

$$V(C) \equiv k \int_0^C \sin x \, dx = E_o, \quad \Rightarrow \quad E_o = k(1 - \cos C).$$

$$\begin{aligned} E_o - V(x) &= k\{1 - \cos C - [1 - \cos x]\} \\ &= k[\cos x - \cos C]. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando estos resultados, y definiendo $\omega_0^2 \equiv k/m$ podemos encontrar $t = t(x)$, el inverso de la solución de la ecuación de movimiento:

$$t = \pm \frac{1}{\omega_0} \int_0^x \frac{d\bar{x}}{\sqrt{2(\cos \bar{x} - \cos C)}}.$$

Esta integral es conocida. No tiene una solución analítica. Se puede expresar como una serie infinita. A continuación transformamos esta integral a una canónica y así podemos recurrir a las tablas de integrales para conocer todas sus propiedades.

Recordemos que: $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\frac{\alpha}{2})$. Utilizando esta igualdad, podemos transformar el integrando a la siguiente forma:

$$\frac{d\bar{x}}{\sqrt{2(\cos \bar{x} - \cos C)}} = \frac{d\bar{x}}{2\sqrt{(\sin^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{\bar{x}}{2})}}.$$

Para reducir esta integral a una expresión estándar, debemos realizar otro cambio adicional de variable:

$$\sin \frac{\bar{x}}{2} = \sin \frac{C}{2} \sin z,$$

note que siempre es posible hacer este cambio de variable. El diferencial adquiere la forma:

$$d\bar{x} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos z \frac{dz}{\sqrt{(1 - \sin^2 \frac{C}{2} \sin^2 z)}},$$

y el tiempo se puede escribir como:

$$\begin{aligned} t &= \pm \frac{1}{\omega_0} \int_0^\alpha \frac{dz}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{C}{2} \sin^2 z}} \frac{\sin \frac{C}{2} \cos z}{\sqrt{\sin^2 \frac{C}{2} - [\sin \frac{C}{2} \sin z]^2}} \\ t &= \pm \frac{1}{\omega_0} \int_0^\alpha \frac{dz}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 z}}, \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

con

$$\kappa \equiv \sin \frac{C}{2} \quad \text{y} \quad \sin \alpha \equiv \frac{\sin x/2}{\sin C/2}.$$

Esta integral aparece en las Tablas de integrales bajo el nombre de integral elíptica. Está bien estudiada y podemos extraer información acerca de este movimiento. Hemos obtenido $t = t(x)$:

$$t = \pm \frac{1}{\omega_o} F \left(\sin \frac{C}{2}, \arcsen \left[\frac{\sin x/2}{\sin C/2} \right] \right),$$

donde $F(\kappa, \alpha) \equiv$ Integral Elíptica. En las tablas de integrales se denomina como $\text{sn}(\kappa, \alpha)$ porque tiene muchas propiedades similares a la funciones trigonométricas.

En el caso de un péndulo, el período toma la forma siguiente:

$$T = \frac{4}{\omega_o} \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}} = \frac{4}{\omega_o} F(k, \frac{\pi}{2}). \quad (\text{II.6})$$

El desarrollo en serie correspondiente a este caso es:

$$F(k, \pi/2) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{3}{8} \right)^4 k^4 + \dots \right].$$

Reemplazando en la expresión para el período, tenemos:

$$T \simeq \frac{2\pi}{\omega_o} \left(1 + \frac{1}{16} C^2 \right) \Rightarrow \omega \simeq \omega_o \left(1 - \frac{C^2}{16} \right),$$

donde hemos cortado la serie en el segundo término y aproximado $\sin C/2 \sim C/2$ y usado la expansión $\sqrt{(1+x^2)} \approx 1 + x^2/2 + \dots$.

La frecuencia depende de la Amplitud

Podemos comparar este resultado con los que se obtendrán posteriormente, utilizando otros métodos:

$$\omega^2 = \omega_o^2 \left[1 - \frac{C^2}{8} \right], \quad (\text{II.7})$$

y concluir que con todos ellos se obtiene una modificación de la velocidad angular proporcional a C^2 . El factor numérico puede diferir.

Este es un resultado genérico: siempre que la amplitud de oscilación no sea pequeña, la frecuencia de oscilación del sistema va a mostrar una dependencia de la amplitud. Esta es otra diferencia importante entre las oscilaciones lineales y las no lineales.

II.3. Teoría de Perturbaciones

Una perturbación es una alteración pequeña a un sistema. Esta alteración puede estar caracterizada por un parámetro que, de acuerdo a la, debe ser pequeño. De esta forma, la teoría de perturbaciones es una estrategia para extraer información de una ecuación no lineal tomando como base la ecuación lineal. No se resuelve la ecuación no lineal. Solo estudiamos el comportamiento de la ecuación en la vecindad de la ecuación lineal sumándole términos adicionales que reflejan el efecto de la no linealidad.

Esta aproximación debe ser consistente. Por ejemplo, es necesario que las sucesivas aproximaciones sean más pequeñas que las aproximaciones superiores.

No estudiaremos la convergencia de los métodos que apliquemos. La justificación de un método provendrá de su cercanía a lo observado en un experimento.

Para introducir el método de perturbaciones resolveremos una ecuación lineal utilizando este esquema. El álgebra es mucho más directa en esta ecuación lineal.

Ejemplo

Considere la ecuación de un oscilador **lineal**: $\ddot{\Psi} + \omega_0^2 \Psi = 0$, donde ω_0 es una constante. Utilice el método de perturbaciones para resolver esta ecuación. Defina: $\psi = \psi_0 + \mu\psi_1 + \mu^2\psi_2 + \dots$. Las potencias de μ establecen los distintos órdenes de aproximación a la solución exacta. Inicialmente suponemos que $\mu \ll 1$. Posteriormente eliminamos esta condición y extraemos la solución exacta considerando todos los términos de la serie.

- i.- Escriba la ecuación como $\ddot{\psi} = -\mu\psi$. Definimos $\mu \equiv \omega_0^2$. Suponemos que μ es muy pequeño y las potencias de μ nos permiten llevar la cuenta

del orden de la aproximación. Resuelva el orden cero μ^0 de esta ecuación: $\ddot{\psi} = 0$.

- ii.- Supongamos que las condiciones iniciales del problema son: $\psi(t = 0) = 0$ y $\dot{\psi}(t = 0) = b$. Esto será válido sólo para la solución de orden cero. En las aproximaciones posteriores las condiciones iniciales serán $\psi_k(t = 0) = 0$ y $\dot{\psi}_k(t = 0) = 0$ para todo k . Esta es la receta para aplicar las condiciones iniciales en este método.
- iii.- Para calcular el siguiente orden use $\ddot{\psi}_1 = -\mu \psi_0$, e inserte la solución obtenida en el paso anterior a la derecha del signo igual de la ecuación. Opere así sucesivamente usando la receta de las condiciones iniciales especificada en el punto anterior. De esta forma recupere una de las soluciones conocidas de esta ecuación diferencial. (Recuerde sumar todos los órdenes de aproximación para obtener la solución exacta. Use inducción.)
- iv.- Repita este procedimiento pero ahora con las condiciones iniciales $\psi_0(t = 0) = a$ y $\dot{\psi}_0(t = 0) = 0$. Encuentre otra solución de la ecuación lineal.

Solución

- i.- La teoría de perturbaciones desarrolla una la solución en serie de potencias en torno a un parámetro, μ , que es por definición pequeño:

$$\psi(t) = \psi_0(t) + \mu \psi_1(t) + \mu^2 \psi_2(t) \dots$$

Reemplazando en la ecuación diferencial escrita como $\ddot{\psi} = -\mu \psi$ (hemos considerado $(-\mu \psi)$ como la perturbación. El factor μ nos sirve para seguir el orden de la aproximación).

$$\ddot{\psi}_0 + \mu \ddot{\psi}_1 + \mu^2 \ddot{\psi}_2 + \dots = -\mu \psi_0 - \mu^2 \psi_1 - \mu^3 \psi_2 \dots$$

ordenando en potencias de μ

$$\begin{aligned} \mu^0 : \ddot{\psi}_0 &= 0 \\ \mu^1 : \ddot{\psi}_1 &= -\mu \psi_0 \\ \mu^2 : \ddot{\psi}_2 &= -\mu \psi_1 \end{aligned}$$

$$\ddot{\psi}_0 = 0 \Rightarrow \psi_0 = a + b t$$

- iii.- De acuerdo a las condiciones iniciales $a = 0$, $b \neq 0$. De modo que $\psi_0(t) = b t$. Resolviendo al orden siguiente, tenemos.

$$\ddot{\psi}_1 = -b t$$

$$\Rightarrow \psi_1 = -b \frac{t^3}{6} + a_1 + b_1 t.$$

utilizando las condiciones de borde definidas, $\psi_k(t = 0) = 0$ y $\dot{\psi}_k(t = 0) = 0$ para todo k , tenemos

$$\psi_1 = -b \frac{t^3}{6}.$$

Vemos que las condiciones iniciales hacen $a_1 = 0$ y $b_1 = 0$.

Esta propiedad se repite en cada uno de los órdenes de aproximación sucesivos.

Análogamente $\ddot{\psi}_2(t) = -b \frac{t^3}{3!}$. Tiene la solución $\psi_2(t) = b \frac{t^5}{5!}$. Puede comprobar que las condiciones iniciales definidas para los órdenes siguientes anulan las constantes a_2 y b_2 .

Sumando estos términos y adivinando (por inducción) los sucesivos tenemos:

$$\psi(t) = b \left\{ t - \mu \frac{t^3}{3!} + \mu^2 \frac{t^5}{5!} \mp \dots \right\},$$

Si queremos recuperar la solución exacta de la ecuación inicial debemos definir $\mu = \omega_0^2$ y redefinir la constante de la condición inicial como $b = \omega_0 B$. Insertando estos cambios en la expresión anterior y manteniendo B fuera del paréntesis, obtenemos:

$$\psi(t) = B \left\{ \omega_0 t - \omega_0^3 \frac{t^3}{3!} + \omega_0^5 \frac{t^5}{5!} \mp \dots \right\} = B \sin \omega_0 t.$$

- iv.- Dejamos al lector verificar que al cambiar las condiciones iniciales a $\psi_0(t = 0) = a$ y $\dot{\psi}_0(t = 0) = 0$ obtenemos $\psi(t) = A \cos \omega_0 t$, con las redefiniciones de las constantes ya señaladas.

Se pueden incluir las dos constantes a y b desde un comienzo. La solución es la superposición de ambas soluciones obtenidas. Esto ocurre sólo en una ecuación diferencial LINEAL. Si los términos que aparecen a mano derecha de la ecuación

fueran no-lineales, este procedimiento no sería posible. La solución general es : $\psi(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$.

En los problemas no-lineales el álgebra se puede tornar compleja. Una forma general de minimizar las complicaciones y obtener resultados generales es definiendo términos adimensionales. En esta ecuación, por ejemplo, podemos simplificar la ecuación inicial re-definiendo el tiempo. Por ejemplo:

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \psi(t) = 0.$$

Defino $t = \frac{\tau}{\omega_0}$, con $\omega_0 = \text{constante}$. Entonces $\varphi(\tau) \equiv \psi(t(\tau))$

$$\frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} + \varphi(\tau) = 0.$$

□

II.3.1. Ecuación de Duffing

Estudiemos ahora el péndulo matemático. Consiste de una masa puntual m , sostenida por un hilo de largo ℓ y masa despreciable bajo la acción de un campo gravitacional.

La ecuación de movimiento es:

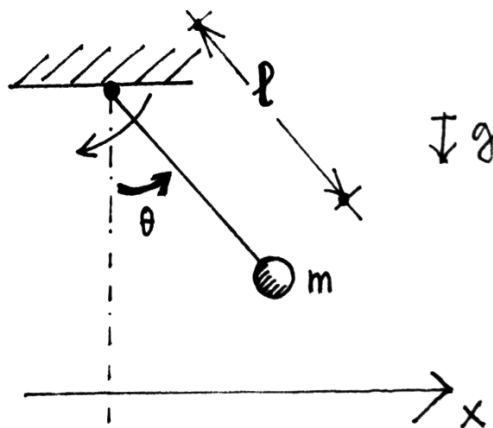


Figura II.1:

$$m \ell^2 \ddot{\theta} + m g \ell \sin \theta = 0,$$

$$\text{Si } \theta \ll 1 \quad \sin \theta \simeq \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \pm \dots$$

Si incluimos sólo el primer término de la serie en la ecuación diferencial, obtenemos:

$$x(t) = A \sin(\omega_o t + \gamma) \quad \text{con,} \quad \omega_o^2 = \frac{g}{\ell}.$$

Al incluir el segundo término de la serie, la ecuación diferencial se transforma en una ecuación diferencial no-lineal.

Recordemos algunas de las características de las ecuaciones no-lineales, por ejemplo: un cambio en el valor de uno de sus parámetros puede cambiar drásticamente la solución. El principio de superposición no se cumple: si se conocen dos soluciones diferentes de una ecuación, su suma *no* es solución.

La ecuación de Duffing es:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x + \mu x^3 = 0. \quad (\text{II.8})$$

Desarrollaremos una solución utilizando como aproximación de orden cero la ecuación lineal. Incorporamos funciones adicionales (perturbaciones) a la conocida de la ecuación lineal.

Usamos el coeficiente μ , constante, para seguir la pista de las perturbaciones. Ciertamente el valor de x no puede tomar valores mayores que la unidad, puesto que entonces la perturbación se haría mayor que la solución fundamental y la teoría de perturbaciones no se puede aplicar.

Suponemos que existen soluciones que tienen estas características, de modo que el método converge y por tanto la solución puede expandirse en una serie de potencias en μ . Este parámetro lleva la contabilidad del orden de aproximación usado.

Escribamos la solución de la siguiente forma:

$$x(t) = x_o(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots, \quad x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n x_n(t).$$

El primer término de la serie corresponde a la solución de la ecuación lineal. Dentro de la lógica de esta aproximación es el más importante. Por esta razón resolveremos esta ecuación en torno a la ecuación lineal ($\mu = 0$).

El método propuesto consiste en introducir la expresión en serie de potencias escrita para $x(t)$ en la ecuación diferencial original [II.8] y a partir de esta expre-

sión general, separar las ecuaciones, de acuerdo a las distintas potencias de μ que aparecen en su desarrollo. De la proposición inicial obtenemos:

$$(\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + \mu(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + x_0^3) + \mu^2(\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + 3x_0^2 x_1) + O(\mu^3) = 0. \quad (\text{II.9})$$

Ordenada en potencias del parámetro μ , obtenemos para cada orden de aproximación :

$$\mu^0 : \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

$$\mu^1 : \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^3$$

$$\mu^2 : \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -3x_0^2 x_1$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

Para que este desarrollo tenga sentido hacerlo, cada una de las funciones $x_i(t)$ debe permanecer acotada.

Para ilustrar el método, consideramos el desarrollo en serie de esta solución sólo hasta el primer orden en μ .

Para comenzar escribimos la solución de la ecuación diferencial de orden cero:

$$x_0 = C \sin(\omega_0 t + \gamma) \quad (\text{II.10})$$

como solución de la ecuación para $\mu = 0$.

Para el siguiente caso, primer orden en μ , tenemos:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -C^3 \sin^3(\omega_0 t + \gamma)$$

Para resolver esta última ecuación diferencial inhomogénea conviene expresar la función trigonométrica en función de los armónicos:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{3}{4}C^3 \text{sen}(\omega_0 t + \gamma) + \frac{1}{4}C^3 \text{sen}(3\omega_0 t + 3\gamma).$$

Esta ecuación es lineal, corresponde a un oscilador sometido a una fuerza externa. Su solución consta de una parte homogénea $C_1 \sin(\omega_0 t + \gamma_1)$ y la correspondiente a los términos inhomogéneos:

$$x_1(t) = \frac{3t}{8\omega_o} C^3 \cos(\omega_o t + \gamma) - \frac{1}{32\omega_o^2} C^3 \sin(3\omega_o t + 3\gamma) + C_1 \sin(\omega_o t + \gamma_1). \quad (\text{II.11})$$

De este modo si consideramos términos de primer orden en μ , obtenemos una superposición de una solución forzada (los dos primeros términos) y la solución homogénea ya mencionada.

Esta solución tiene un límite en su aplicación. El primer término crece con el tiempo. Este efecto no se observa en un péndulo. Este término acota la aplicación de esta solución. Analizaremos este problema a continuación.

Eliminación de los términos seculares

Analizando la solución obtenida mediante teoría de perturbaciones [II.11], podemos concluir lo siguiente:

- Existe un término, $(t \sin \omega_o t)$, que diverge al transcurrir el tiempo. La aproximación usada es válida sólo en intervalos de tiempo *pequeños* comparado con el término $T = \frac{2\pi}{\omega_o}$. El término $t \sin \omega_o t$ se denomina *secular*. El origen de esta palabra se remonta a la aplicación de estos métodos en problemas astronómicos donde ε era muy pequeño y el término εt dejaba de ser una perturbación en intervalos de cien años, de ahí la palabra secular con que se le designa.
- El mismo término anterior hace desaparecer la periodicidad esperada en dicho problema. Si su amplitud excede el valor asociado a las pequeñas oscilaciones y la aproximación lineal no es válida, esperamos que el péndulo modifique el valor de su período, pero que su movimiento permanezca periódica.
- Obviamente la energía no se conserva, por tanto este método da un resultado que carece de sentido físico y debemos desecharlo.

Un fenómeno similar ocurre en una serie de Taylor de la siguiente expresión:

$$\cos[(\omega_o + \Delta \omega)t] = \cos(\omega_o t) + [(-\omega_o) \sin \omega_o t] \frac{t \cdot \Delta \omega}{1!} + \dots$$

Al cortar la serie se pierde la periodicidad y la convergencia de la serie.

Dependencia de ω en la amplitud de oscilación

Como se argumentó previamente, no puede existir una dependencia lineal en el tiempo, puesto que el sistema debe conservar la energía.

En el procedimiento seguido la velocidad angular ω_o permaneció constante, *no* depende del parámetro μ . Para eliminar el término secular, introducimos una dependencia de ω en la amplitud de oscilación C y en el parámetro μ .

Esta dependencia se encontró previamente en el método de cuadraturas II.3. Escribamos entonces:

$$\omega^2 = \omega_o^2 + \mu e_1(C) + O(\mu^2). \quad (\text{II.12})$$

Conviene escribir esta expresión como: $\omega_o^2 = \omega^2 - \mu e_1(C) + O(\mu^2)$, debido a que ω_o^2 es un parámetro definido a partir de la características del oscilador y aparece explícitamente en las ecuaciones originales.

Lo que hicimos fue introducir una nueva función $e_1(C)$, que depende sólo de la amplitud de oscilación y que utilizaremos para eliminar los términos aperiódicos obtenidos en el tratamiento inicial.

Reemplazando $\omega_o^2 = \omega^2 - \mu e_1$ en la ecuación original, las nuevas ecuaciones de movimiento linealizadas, al mismo orden de aproximación del caso anterior [II.9], son:

$$(\ddot{x}_o + \omega^2 x_o) + \mu (\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + x_o^3 - e_1 x_o) + O(\mu^2) = 0 \quad (\text{II.13})$$

Esta ecuación se resuelve en forma similar a [II.9], cada una de las expresiones que aparecen multiplicadas por una potencia de μ , deben igualarse a cero en forma independiente.

Las soluciones son:

$$x_o = C \sin(\omega t + \gamma).$$

En x_1 debemos eliminar el término secular:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -C^3 \sin^3(\omega t + \gamma) + e_1 C \sin(\omega t + \gamma).$$

Después de expresar $\sin^3(\omega t)$ en función de sus armónicos, tenemos:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\frac{3}{4} C^3 \sin(\omega t + \gamma) + \frac{1}{4} C^3 \sin(3\omega t + 3\gamma) + e_1 C \sin(\omega t + \gamma).$$

Si exigimos que: $e_1 = \frac{3}{4} C^2$, logramos eliminar el término que tiene la misma frecuencia del oscilador. Evitamos así la resonancia entre el término no lineal y el oscilador lineal que generaba el crecimiento indebido de la solución. De aquí obtenemos:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu \frac{3}{4} C^2 + O(\mu^2), \quad \omega_0^2 = \left(\frac{g}{\ell}\right). \quad (\text{II.14})$$

Hemos obtenido la dependencia de ω en la amplitud C de la oscilación.

Para que la ecuación de Duffing coincida con la de un péndulo, debemos reemplazar el valor de μ por:

$$\mu = -\frac{\omega_0^2}{6}, \quad \text{y obtenemos: } \omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{C^2}{8}\right). \quad (\text{II.15})$$

La aproximación queda entonces:

$$x_1(t) = C_1 \sin(\omega t + \gamma_1) - \frac{1}{32\omega^2} C^3 \sin(3\omega t + 3\gamma)$$

Obteniéndose así:

$$x(t) = C \sin(\omega t + \gamma) + C_1 \sin(\omega t + \gamma_1) - \frac{1}{32\omega^2} C^3 \sin(3\omega t + 3\gamma) + O(\mu^2) \quad (\text{II.16})$$

Condiciones iniciales

En este desarrollo aparecen cuatro constantes, dos relacionadas con la amplitud: C , C_1 , y dos con la fase: γ y γ_1 .

Si extendemos la solución al (o a los) siguientes órdenes de aproximación, aparecen dos constantes por cada orden de aproximación adicional: C_2 , C_3, \dots y γ_2 , γ_3, \dots .

Queda claro que van a existir más constantes por determinar que condiciones iniciales: sólo $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ están disponibles.

La estrategia empleada es considerar la ecuación de orden más bajo como la más relevante y utilizar las condiciones iniciales sólo para determinar los coeficientes de la ecuación de orden cero (μ^0). En cada una de las ecuaciones siguientes, provenientes de (μ^1 , μ^2 ...etc.), las condiciones iniciales son $x_k(t=0) = 0$ y $\dot{x}_k(t=0) = 0$. Como veremos en el ejemplo siguiente, de estas condiciones iniciales no se desprende que las constantes (C_2 , C_3 ,... y γ_2 , γ_3 ,...) sean nulas.

Si esta aproximación es matemáticamente adecuada o no, es un tema que no tocamos aquí. Sólo podemos señalar que este método ha demostrado ser de utilidad en muchos problemas de física. La solución obtenida puede ser comparada con resultados numéricos o experimentales que determinan, en ausencia de métodos analíticos, la credibilidad de la aproximación.

Ejemplo: condiciones iniciales a primer orden.

Para acortar el álgebra supongamos que las condiciones iniciales en la ecuación de Duffing, son:

$$x(0) = A \quad \dot{x}(0) = 0$$

Entonces, en la aproximación de orden cero, aplicamos las condiciones de Borde **sólo** a la solución $x_0(t)$ y ponemos el resto de las constantes igual a cero:

$$x_0(0) = A, x_1(0) = 0 = x_2(0) \dots$$

$$\dot{x}_0(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0 = \dot{x}_2(0) \dots$$

De aquí obtenemos:

$$x_0(0) = A \Rightarrow C = A, \quad \gamma = \frac{1}{2}\pi$$

$$x_1(0) = 0 = -\frac{C^3}{32\omega_o^2} \sin 3\gamma + C_1 \sin \gamma_1$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 = -\frac{3C^3}{8\omega_o} \cos \gamma - \frac{3}{32\omega_o} C^3 \cos 3\gamma + \omega_o C_1 \cos \gamma_1.$$

Reemplazando los valores de C y γ , tenemos:

$$0 = \frac{A^3}{32\omega_o^2} + C_1 \sin \gamma_1$$

$$0 = \frac{3A^3}{32\omega_o} \cdot 0 + \omega_o C_1 \cos \gamma_1$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 \sin \gamma_1 &= -\frac{A^3}{32 \omega_0^2} \\ C_1 \cos \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{2}, C_1 = -\frac{C^3}{32 \omega_0^2}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación [II.16], obtenemos la solución para el oscilador armónico a primer orden.

Hemos visto que a pesar de que las condiciones iniciales son nulas para el segundo orden $\dot{x}_1(0) = x_1(0) = 0$ las constante C_1 y γ_1 son distintas de cero.

Conclusión

Hemos estudiado la ecuación de Duffing mediante perturbaciones. El método expuesto es una receta. Existen distintas aproximaciones para resolver las ecuaciones no lineales. Cada una se adapta a una cierta característica de la ecuación no lineal. Todas ellas se reducen a transformar el problema a uno lineal, donde disponemos de variadas técnicas para resolverlo.

Es interesante notar que, si encontramos una solución exacta para este tipo de ecuaciones, no hay forma de saber si es la única o si existen otras familias de soluciones. Eso es lo que distingue una ecuación diferencial ordinaria no-lineal de su contrapartida lineal.

Ejemplo

En la figura aparece un resorte unido a una rótula fija, en el extremo superior, y con una masa m que puede deslizar, sin roce, sobre una barra horizontal en el extremo inferior.

a.- Escriba la ecuación de movimiento de m . Utilice x , como la variable dinámica. No suponga oscilaciones pequeñas. Es conveniente definir variables adimensionales para trabajar en forma general: $z = x/a$ y $\ell = l/a$, con l el largo natural del resorte. Use $\omega_0^2 \equiv k/m$.

b.- Suponga $\ell < 1$ y desarrolle en serie de Taylor hasta potencias de z^3 alrededor del origen. Encuentre la solución para la parte lineal de esta ecuación diferencial.

c.- Encuentre la perturbación a primer orden (incluyendo el término cúbico) de la ecuación de la parte b.-. Determine la amplitud y el cambio en la frecuencia.

d.- Para el caso $\ell = 1$: Calcule la aproximación de orden cero. Escriba la ecuación para el período en este caso. Desarrolle la integral en serie de Taylor y encuentre la primera corrección al período. Compare con el caso anterior.

Solución

a.- La rigidez del resorte y la reacción del alambre son las dos únicas fuerzas que actúan sobre la masa m . Como sólo hay deslizamiento a lo largo del alambre, debemos proyectar la fuerza del resorte sobre la dirección del alambre. La segunda ley de Newton se escribe:

$$m\ddot{x} = -k[\sqrt{a^2 + x^2} - l] \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

simplificando e introduciendo las variables sugeridas en el enunciado, tenemos:

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 \left[1 - \frac{\ell}{\sqrt{1 + Z^2}} \right] Z = 0$$

b.- Recordemos que:

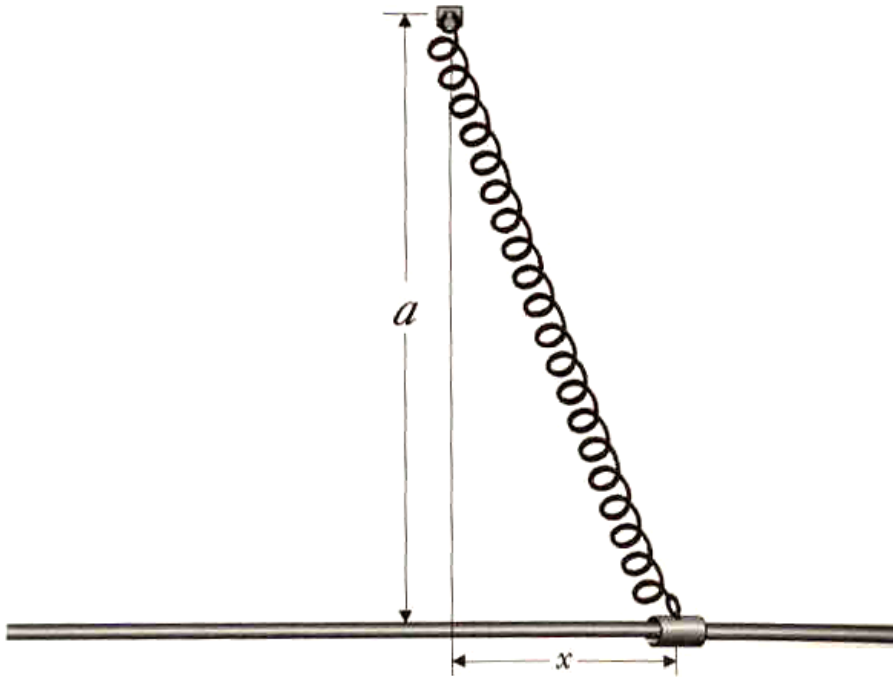


Figura II.2:

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!} x^2 + \dots$$

si $r = -\frac{1}{2}$ y $x \equiv Z^2$, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1+Z^2}} = 1 - \frac{Z^2}{2} + \frac{3}{8}Z^4 \mp \dots$$

Entonces, la ecuación aproximada es

$$\ddot{Z} + \omega_0^2(1-\ell)Z + \left(\frac{\omega_0^2\ell}{2}\right)Z^3.$$

Definiendo $\Omega_0^2 \equiv \omega_0^2(1-\ell)$, y no consideramos los términos no lineales, la solución es [II.10]

$$Z = C \operatorname{sen}(\Omega t + \gamma), \text{ con } \Omega^2 = \Omega_0^2 \left(1 + \frac{3\mu C^2}{4}\right) \text{ y } \mu \equiv \frac{\omega_0^2 \ell}{2}.$$

c.- Con estas definiciones

$$\ddot{Z} + \Omega_0^2 Z + \mu Z^3 = 0.$$

De acuerdo a lo encontrado en [II.16] la solución es

$$Z = C \sin(\Omega t + \gamma) + C_1 \sin(\Omega t + \gamma_1) - \frac{C^3}{32\Omega^2} \operatorname{sen}(3\Omega t + 3\gamma) + O(\mu^2). \quad (\text{II.17})$$

Para determinar C , C_1 , γ y γ_1 debemos tener las condiciones iniciales. El procedimiento aparece en el párrafo de condiciones iniciales en la sección anterior.

d.- Si $\ell = 1$, entonces $Z \equiv \frac{x}{a}$

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{2a^2} x^3 = 0$$

Podemos encontrar el período utilizando el método de cuadraturas :

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{8a^2} x^4 = \frac{E_0}{m} \equiv e_0 = \frac{\omega_0^2 A^4}{8a^2},$$

A es la amplitud de la oscilación.

Basta derivar esta ecuación para obtener la expresión original. Representa la conservación de la energía. A partir de esta ecuación y utilizando [II.6], obtenemos:

$$\frac{T}{4} = \frac{2a\sqrt{2}}{\omega_0} \int_{-A}^0 \frac{dx'}{[A^4 - x'^4]^{1/2}},$$

reemplazando $x' = A \cos \theta'$, entonces:

$$T = \frac{8a\sqrt{2}}{\omega_0 A} \int_{-\pi}^0 \frac{d\theta'}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta'}},$$

pero $1 + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta = 2 - \sin^2 \theta = 2(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta)$, se obtiene finalmente

$$T = \frac{8a}{\omega_0 A} \int_0^{\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta'}} = \frac{16a}{\omega_0 A} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta'}}$$

Esta es la integral elíptica ya definida [II.6].

□

II.4. Oscilaciones Amortiguadas

La disipación de energía es un fenómeno que ocurre en todas las áreas de la física macroscópica, circuitos eléctricos, hidrodinámica, mecánica,...

Estudiaremos oscilaciones no lineales con disipación. Utilizaremos el péndulo como ejemplo.

La ecuación de un péndulo no-lineal con un término disipativo:

$$\ddot{x} + h(\dot{x}) + \omega_0^2 \sin x = 0, \quad (\text{II.18})$$

donde $h(\dot{x})$ es una función de la rapidez \dot{x} . Hay dos casos recurrentes que determinan la función $h(x)$:

$$h(\dot{x}) = 2\delta \dot{x}, \quad \delta > 0 : \text{amortiguamiento lineal,}$$

$$h(\dot{x}) = \rho \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad , \quad \rho > 0 : \text{amortiguamiento de Coulomb.}$$

Donde $\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \pm 1$, toma el valor (+ 1) si $\dot{x} > 0$, y (- 1) en caso que $\dot{x} < 0$.

Existen otros tipos de amortiguamiento, como $\dot{x}^2 \operatorname{sgn}(\dot{x})$, $x^2 \dot{x}$... etc. que no analizaremos acá.

$h(x)$ es fenomenológico. No existe una teoría acerca de su mecanismo. Un artículo acerca de la nanotribología (el estudio del origen atómico del roce) en la bibliografía [8].

II.4.1. Método de la energía para oscilaciones con amortiguamiento débil.

Cuando la disipación es débil, la solución lineal cambia lentamente y podemos perturbarla para saber la evolución del sistema. La solución es:

$$x(t) = C \sin(\omega t + \phi), \quad (\text{II.19})$$

donde la amplitud C , disminuye levemente en cada oscilación.

En la ecuación exacta del péndulo matemático, reemplazamos: $\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!}$, y reemplazamos este término en la ecuación original:

$$\ddot{x} + h(\dot{x}) + \omega_o^2(x - \frac{x^3}{6}) = 0.$$

Como nos restringimos al caso con amortiguamiento *muy débil*, la siguiente aproximación puede ser usada: la amplitud cambia levemente en una (o varias) oscilaciones, entonces resolvemos la ecuación del oscilador durante este período sin considerar la disipación. Después calculamos la energía ΔE disipada durante el ciclo y, con este valor se disminuye la magnitud de la amplitud de oscilación C utilizando el siguiente esquema:

- En cada ciclo se pierde ΔE . Si U es la energía potencial del sistema y T la energía cinética, tenemos:

$$(U + T)_{t+\Delta t} = (U + T)_t + \Delta E$$

- *Suponemos* que la solución es del tipo $x(t) = C \sin(\omega t + \phi)$, donde la amplitud C se mantiene constante en cada oscilación completa y disminuye abruptamente después de finalizada una oscilación completa.
- Asignamos a ω un valor a partir del encontrado para un oscilador sin amortiguamiento.

$$\omega^2 = \omega_o^2 \left(1 - \frac{C^2}{8}\right).$$

- La aproximación se mantiene hasta orden C^2 . Por esta razón, en algunos cálculos reemplazamos ω_o por ω .

- Combinando la dependencia en la amplitud C de la energía en el intervalo sin amortiguamiento con la energía disipada, calculada a partir del término disipativo, $2\delta\dot{x}$, en el mismo intervalo, encontramos una expresión para la variación de C .

Al multiplicar la ecuación de movimiento por \dot{x} e integrar entre t y $(t + \Delta t)$ se obtiene: T , U y ΔE . Las cantidades U y T se evalúan haciendo $h(\dot{x}) = 0$, puesto que se considera que la energía permanece constante en un período:

$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{x}^2, \quad U = \frac{1}{2} m \ell^2 \omega^2 \left(x^2 - \frac{x^4}{12} \right),$$

$$\Delta E = - \int_t^{t+\Delta t} h(\dot{x}) m \ell^2 \dot{x} dt.$$

Estimamos ΔE utilizando $x(t) = C \sin(\omega t + \phi)$ y $\omega = \omega_0$. Estas expresiones se obtuvieron para el caso $h(\dot{x}) = 0$ y por consiguiente son válidas entre t y $(t + \frac{2\pi}{\omega})$. También usaremos un intervalo igual a T , para evaluar los cambios de C .

Utilizando $h(\dot{x}) = 2\delta\dot{x}$, para el término de disipación, el valor obtenido para ΔE es:

$$\Delta E = -2 m \ell^2 \delta C^2 \omega^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi) dt = -2 m \ell^2 \pi \omega C^2 \delta. \quad (\text{II.20})$$

Por otra parte, si la energía mecánica permanece constante, toma el valor:

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \ell^2 C^2 \omega^2 \approx \frac{1}{2} m \ell^2 C^2 \omega_0^2 + O(C^4). \quad (\text{II.21})$$

Hemos encontrado la dependencia de la energía E en función de la amplitud C . Las otras cantidades m , ℓ , son constantes, no varían en el tiempo. Podemos diferenciar esta última expresión para saber cómo varía la energía E con respecto a un cambio pequeño de la amplitud C :

$$\Delta E = m \ell^2 \omega_0^2 C \Delta C, \quad (\text{II.22})$$

igualando esta expresión con la encontrada al evaluar el trabajo de la fricción [II.20], obtenemos una ecuación diferencial para la variación de C en cada período.

$$-2 m \ell^2 \delta \pi \omega_o C^2 = m \ell^2 \omega_o^2 C \Delta C \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C} = -T \delta} \quad (\text{II.23})$$

Este mismo resultado puede ser aplicado al cambio de la energía. Evaluando la razón de cambio porcentual de energía en un período T , tenemos:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2 \Delta C}{C} = -2 \delta T,$$

definiendo $\Delta E/T \equiv \text{Potencia promedio disipada} \equiv \langle P \rangle$,

$$\boxed{\frac{\langle P \rangle}{E} = -2 \delta} = -(\text{coeficiente de fricción}). \quad (\text{II.24})$$

Usaremos estos resultados más adelante.

Ejemplo

Analicemos como evoluciona la órbita de una partícula en este esquema. Supongamos que el intervalo considerado para incluir la energía disipada es un período.

Para el primer período, la trayectoria está dada por:

$$x_o(t) = C_o \sin[\omega(C_o) t + \phi_o] \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega(C_o)}.$$

Al continuar al segundo período cambia la amplitud de C_o a C_1 y en consecuencia se modifica también la velocidad angular:

$$x_1(t) = C_1 \sin[\omega(C_1) t + \phi_1] \quad \text{para} \quad \frac{2\pi}{\omega(C_o)} \leq t \leq \left[\frac{2\pi}{\omega(C_1)} + \frac{2\pi}{\omega(C_o)} \right],$$

la nueva amplitud es

$$\frac{C_1 - C_o}{C_o} = -T \delta, \quad C_1 = C_o \left[1 - \frac{2\pi\delta}{\omega(C_o)} \right].$$

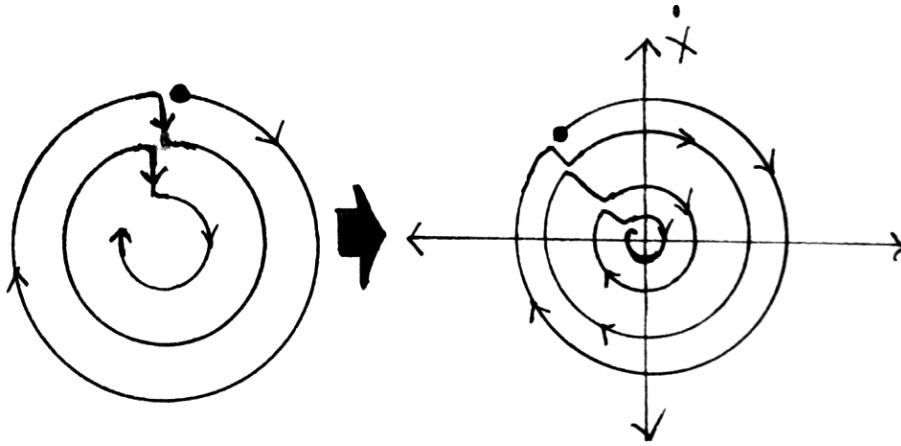


Figura II.3: En este modelo, la energía disipada se resta al final del período. La amplitud cambia abruptamente al completar un intervalo predeterminado. Por ejemplo: en el primer período la amplitud es C_o , al comenzar el segundo período lo hace con $C_1 < C_o$ a así sucesivamente.

Las constantes ϕ_o y C_o se determinan a partir de las condiciones iniciales. Por ejemplo

$$\left. \begin{aligned} x(o) &= C_o \sin \phi_o \\ \dot{x}(o) &= \omega(C_o) C_o \cos \phi_o \end{aligned} \right\} \text{ si } \left. \begin{aligned} x(o) &= A \\ \dot{x}(o) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_o = A, \quad \phi_o = \pi/2$$

$$x_o(t) = C_o \sin\left[\omega(C_o)t + \frac{\pi}{2}\right] = A \cos[\omega(C_o)t].$$

Como $\omega = \omega_o (1 - C^2/16)$, si la amplitud inicial es pequeña comparada con $\sqrt{16}$, entonces T es pequeño, cambia muy lentamente y la variación para amplitud se puede manipular y transformarla en una ecuación diferencial:

$$\frac{\Delta C}{C} = -\delta T \Rightarrow \frac{\Delta C}{T} \equiv \frac{dC}{dt} = -\delta C \Rightarrow C = C_0 e^{-\delta t}.$$

El oscilador armónico y el modelo de un electrón en un átomo

La mecánica cuántica es la teoría apropiada para describir el comportamiento de un átomo sometido a un campo electromagnético externo. Es la teoría asociada a esta escala de la naturaleza. Sin embargo, la física clásica proporciona, en determinadas circunstancias, una aproximación que permite describir el comportamiento del electrón y proporciona estimaciones razonables.

A continuación estudiaremos el efecto de una onda electromagnética incidiendo en un átomo o grupos de átomos. La onda electromagnética puede ser la luz u otro tipo de radiación. Consideraremos sólo el efecto del campo eléctrico, por ser el más relevante en estos ejemplos.

Utilizaremos el modelo de una partícula (el electrón) ligada a una partícula mucho más masiva (uno o más protones representando al núcleo del átomo) unidos mediante un resorte de rigidez k . Este modelo naturalmente proporciona una frecuencia natural ω_0 y, como se apreciará en los ejemplos, uno o más parámetros que nos permitirán identificar el sistema físico que más se aproxima al modelo propuesto.

Este es un modelo que permite su utilización en diversas circunstancias.

Ejemplo

Utilizando el modelo de un electrón unido a un núcleo mediante un resorte, encuentre la expresión de la constante de rigidez k en función de los parámetros físicos conocidos que caracterizan a un electrón ligado al núcleo atómico. Obtenga la frecuencia natural ω_0 de oscilación del electrón.

Solución

Considere un electrón en un átomo de hidrógeno. El modelo es una masa m_e (la masa del electrón) unido a una masa M , muchísimo mayor, que representa la masa del protón ($M \approx 2000 m_e$), mediante un resorte de constante k . Suponemos conocida la carga del electrón, el radio R del tamaño del átomo y ϵ_o , la permitividad del vacío. Supondremos que la carga del electrón se distribuye en una esfera de radio R y con densidad de carga constante. El núcleo, para estos efectos es un punto.

De acuerdo a la figura, la nube esférica representa la carga repartida del electrón y el punto la posición del núcleo (círculo pequeño). Debido al campo eléctrico de una onda electromagnética, por ejemplo, ambos centros se desplazan una distancia z . De acuerdo al teorema de Gauss, la fuerza eléctrica sobre el núcleo se origina debido a la carga de la esfera de radio z centrada en la nube del electrón. Su magnitud es proporcional a la carga encerrada en la esfera de radio z :

$$q' = \frac{e z^3}{R^3},$$

de manera que

$$E = \frac{e^2 z^3}{4 \pi \epsilon_o R^3 z^2},$$

la fuerza de atracción que tiende a restituir la posición relativa de la nube y el núcleo es:

$$F = -\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_o R^3} z, \quad \text{entonces} \quad k \equiv \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_o R^3}. \quad (\text{II.25})$$

La dinámica del átomo obedece la ecuación de movimiento de una masa m_e unida a una masa mucho mayor M mediante un resorte de rigidez k . La ecuación de movimiento es:

$$m_e \ddot{z} + k z = -e E_{\text{externo}}, \quad (\text{II.26})$$

la expresión a la izquierda de esta ecuación nos permite determinar la frecuencia

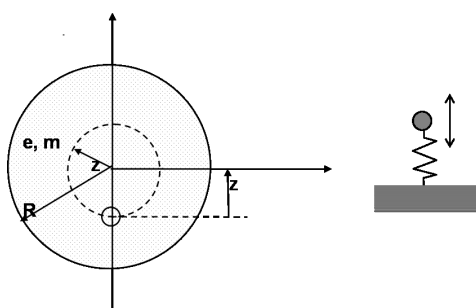


Figura II.4: La carga del electrón se repartió en el volumen de radio R . Hemos supuesto que la función de onda del electrón es constante dentro del radio R y nula fuera. La nube del electrón es rígida y se desplaza como un todo. Es un modelo simplificado del átomo.

propia de oscilación del átomo obtenida mediante este modelo:

$$\omega_o^2 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_o R^3 m_e}. \quad (\text{II.27})$$

Hemos encontrado la expresión para la frecuencia natural ω_o del átomo de hidrógeno. No consideramos el campo externo. Lo haremos más adelante.

Comentarios:

Es más fácil calcular la fuerza sobre el núcleo debido a la nube esférica de carga. Por acción y reacción la fuerza sobre la nube (que representa al electrón) es la misma y de sentido opuesto.

La probabilidad de encontrar el electrón en su nivel más bajo de energía, no es una constante sobre la región de radio R sino una exponencial, como veremos al estudiar el átomo de hidrógeno. Tampoco la distribución de carga del electrón reacciona como un cuerpo rígido al aplicar un campo externo de fuerzas.

Tampoco se explica por qué la nube de carga negativa no colapsa con el núcleo positivo. Estamos usando el principio de incertidumbre, que hace imposible que el electrón se ubique en una región tan pequeña como la ocupada por el núcleo. Este modelo deja dos parámetros por fijar: R y N , el número de electrones o cargas en el núcleo. Usamos $N = 1$ y R como el radio del átomo de hidrógeno.

Evaluemos ω_o . Conocemos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} R &= 0,5 \times 10^{-10} [\text{m}] \text{ es el radio del átomo de hidrógeno.} \\ e^2 / (m_e \epsilon_o) &= 3,2 \times 10^3 [\text{m}^3 \text{s}^{-2}] \text{ es una constante usada frecuentemente.} \\ c &= 300,000 [\text{km/s}], \text{ velocidad de la luz} \end{aligned}$$

Usando estos valores obtenemos

$$\omega_o = 4,5 \times 10^{16} \text{ Hz} \quad (\text{II.28})$$

Esta frecuencia se ubica en la región ultravioleta del espectro visible. La frecuencia varía entre $4,2 \times 10^{14} [\text{s}^{-1}]$ o Hertz para la luz roja y $7,2 \times 10^{14} \text{ Hz}$ para la luz visible. La frecuencia natural de oscilación del átomo de hidrógeno es 100 veces mayor que el espectro de frecuencias de la luz visible.

□

Ejemplo

Demostrar que el modelo clásico de un electrón puntual orbitando alrededor del núcleo es inestable si se considera la radiación electromagnética que inevitablemente realiza toda carga acelerada. De esta forma el modelo clásico de un átomo tiene una vida media finita. Utilizando los cálculos anteriores, estimar la vida media de un átomo de acuerdo a este modelo.

Solución

Ahora consideramos el electrón como una partícula describiendo una órbita circular alrededor del núcleo atómico. La aceleración centrípeta necesaria para el movimiento circular se origina en la fuerza de atracción eléctrica entre el protón y el electrón. El valor de ω_0 es el mismo que el obtenido en el ejemplo anterior [II.27].

De acuerdo a las ecuaciones de Maxwell, cada vez que una carga eléctrica se acelera, genera una onda de radiación electromagnética. La potencia media $\langle P \rangle$ radiada por una carga en movimiento circular con una velocidad angular ω_0 es:

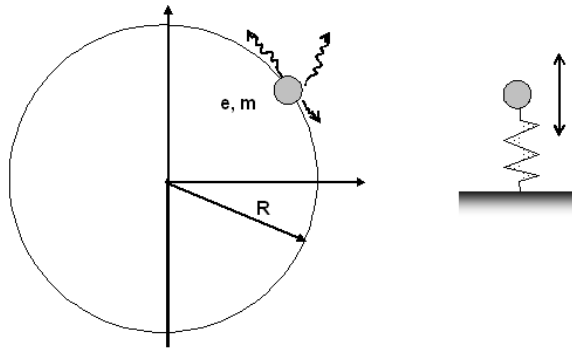


Figura II.5: Una carga que realiza un movimiento circular, radía energía electromagnética de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell. Esta pérdida de energía se incluye como una disipación débil en la ecuación de movimiento en este modelo.

$$\langle P \rangle = \frac{Z_0^2 e^2 A^2 \omega^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3} \text{ [Joule/segundo]} \quad (\text{II.29})$$

En rigor, esta expresión corresponde a la radiación de un dipolo eléctrico de magnitud ZeA , donde Ze es el número de cargas, y A la amplitud con que vibran estas cargas. Es proporcional a la cuarta potencia de ω . Una disminución de la frecuencia a la mitad, genera una variación de $1/16$ veces la potencia media radiada.

Para calcular la vida media de este oscilador, usamos la expresión obtenida previamente en esta sección [II.24] que relaciona la variación porcentual de energía en el tiempo con la constante de disipación δ de un oscilador amortiguado:

$$\frac{\langle P \rangle}{E} = -2\delta \equiv -\gamma. \quad \text{La energía del oscilador es: } E = \frac{m A^2 \omega^2}{2}$$

obtenemos

$$\frac{\langle P \rangle}{E} = \frac{e^2 \omega^2}{6 \pi m_e \epsilon_0 c^3} = -\gamma = -2\delta. \quad (\text{II.30})$$

Por otra parte, la amplitud decrece exponencialmente, como se mostró en [II.23]:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t/2},$$

de modo que la vida media τ , cuando la amplitud alcanza el valor $A(t) = A_0/e$, esto es para $t \equiv \tau = 2/\gamma$.

Evaluamos τ . El valor numérico de las constantes que aparecen en la expresión de τ son conocidas. $\gamma \approx 10^9 [\text{s}^{-1}]$. De acuerdo a este cálculo la vida media del átomo clásico es de aproximadamente 10^{-9} segundos.

Podemos verificar si la aproximación de decaimiento débil se justifica. Dado el valor de $\omega_0 \approx 10^{16}$ segundos, podemos estimar que el electrón clásico demora 10^{-16} segundos en una órbita, de modo que en 10^{-9} segundos da aproximadamente 10^7 revoluciones. Este número justifica la aproximación de que amortiguamiento débil que hemos utilizado en este cálculo. El electrón pierde un poco de energía en cada órbita, después de 10 millones de vueltas su amplitud disminuye a la mitad.

Los átomos perduran muchísimo más tiempo. Si las leyes clásicas utilizadas en esta aproximación son válidas, el resultado es incorrecto. Los átomos tienen una estabilidad muchísimo mayor que el número obtenido. Debemos encontrar otra teoría que mejore la estimación realizada. Esta teoría es la mecánica cuántica. Por otra parte, a pesar que el átomo es un objeto microscópico y por tanto pertenece al ámbito de la física cuántica, este modelo clásico permite entender el comportamiento de una serie de fenómenos donde una onda electromagnética interactúa con un átomo o un grupo de átomos. Como ejemplos podemos mencionar: una explicación de por qué el cielo es azul, el origen del color en los metales, en las nubes, en una puesta de Sol...

□

Ejercicio

Demostrar que para el caso de fricción constante $h(\dot{x}) = \rho \operatorname{sgn}(\dot{x})$, $\rho > 0$, la amplitud decae linealmente con el tiempo.

Respuesta:

$$\Delta C = -\frac{2\rho}{\pi\omega} T \Rightarrow \frac{dC}{dt} = -\frac{2\rho}{\pi\omega}$$

Note que si consideramos ω como una constante $\Rightarrow C = -\frac{2\rho}{\pi\omega} t + C_o$.

Pero si $\omega = \omega_o (1 - C^2/16)$, demuestre que ahora la expresión para C se convierte en

$$\omega_o C \left(1 - \frac{C^2}{48}\right) = \omega_o C_o \left(1 - \frac{C_o^2}{48}\right) - \frac{2\rho}{\pi} t.$$

Roce seco y oscilaciones auto-excitadas

Otro tipo de movimiento ocurre bajo el régimen denominado roce seco. Por ejemplo el arco de un violín con la cuerda, los goznes de una puerta sin lubricación, los frenos de un auto, de las vibraciones de una ala de un avión, el sonido que se obtiene al soplar a través del canto de una hoja de papel...¹.

¹Más detalles de estos últimos ejemplos, aparecen en cualquier libro de Aerodinámica bajo las palabras *Flutter Oscillations*

Este comportamiento también aparece en sistemas granulares puesto que las partículas que chocan exhiben ambas componentes: roce en seco, en el contacto y un comportamiento elástico, puesto que las partículas se deforman.

El primero en estudiar la fricción y aplicarla al caso de granos fue Charles de Coulomb, un ingeniero militar destinado a construir fortificaciones en el siglo XVIII. Su modelo se basa en que dos capas de material granular no pueden resbalar una sobre la otra, a menos que el ángulo de inclinación θ , cumpla la siguiente

$$\theta = \tan^{-1} \mu_s.$$

Esta analogía sugiere que las leyes de fricción de Coulomb se aplican al material granular.

Un ejemplo ilustrativo es construir una pila de arena. Tan pronto como la pendiente del cono supera un cierto valor, el cono se desmorona y retoma su ángulo de equilibrio que es aproximadamente 35° . Se denomina ángulo de reposo. (Puede existir más de un valor.)

A continuación analizaremos un movimiento donde ocurre el fenómeno de "pega-resbala", que corresponde a la descripción del comportamiento de los granos de arena. Exhibe un comportamiento elástico (compresión entre granos en contacto) y deslizamiento (al derrumbarse el cono y recuperar su ángulo estable).

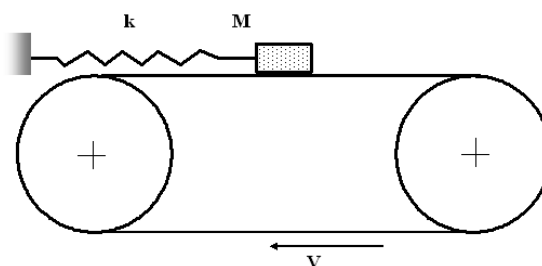


Figura II.6:

Ejemplo[16]página 33.

Una masa M se ubica sobre una correa transportadora que se mueve con una rapidez V . Este objeto está atado a un resorte de rigidez k , cuyo extremo opuesto

está fijo. La fuerza de fricción entre el objeto y la correa se caracteriza por los coeficientes $\mu_{\text{estático}}$ y $\mu_{\text{dinámico}}$, tal que $\mu_{\text{din}} \leq \mu_{\text{est}}$ (valor máximo), de acuerdo con la ley de Coulomb-Euler.

Describa el movimiento de la masa m sobre la correa. Para simplificar el análisis suponga que μ_{din} es muy pequeño y no lo considere en el desarrollo.

Sólo existe fuerza de roce cuando NO existe movimiento relativo entre la correa transportadora y la masa M . Cuando la masa comienza a resbalar no hay fricción debido a que el coeficiente de roce dinámico es muy pequeño y no lo consideramos.

Supongamos que el movimiento comienza en $t = 0$ y la posición de la masa M es $x = x_o$, medida a partir de algún punto que no es necesario especificar.

La fuerza que ejerce el resorte sobre la masa será:

$$R = k(x - x_o) = k V t \quad (\text{II.31})$$

el movimiento permanece con velocidad constante V hasta que

$$\frac{R}{N} = \frac{k V t}{M g} \leq \mu_{\text{estático}} \quad (\text{II.32})$$

donde N es la fuerza normal.

Este movimiento ocurre desde $t = 0$ hasta $t = m g \mu_{\text{estático}} / k V$. En el instante siguiente la fuerza que ejerce el resorte es mayor que la fuerza máxima de roce estático y la masa M se despegue de la correa, adquiere una aceleración y desaparece la fuerza de fricción. La ecuación de movimiento se transforma en:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0, \quad \text{con} \quad \omega_o^2 = k/M.$$

La solución es: $x(t) = x_o + A \sin[\omega_o(t - t_1) + \phi]$. las constantes A y ϕ se determinan a partir de las condiciones iniciales. La posición en el instante t_1 da :

$$x(t_1) - x_o = V t_1 = A \sin[\phi]. \quad (\text{II.33})$$

Igualando las pendientes, obtenemos:

$$V = A \omega_o \cos[\phi]. \quad (\text{II.34})$$

El movimiento es sinusoidal hasta que la masa retorna a la velocidad V . La fricción estática reaparece de nuevo. La condición que debe cumplirse acá es:

$$V = A \omega_o \cos[\phi] = A \omega_o \cos[\omega_o (t_2 - t_1) + \phi], \Rightarrow t_2 = t_1 + 2(\pi - \phi)/\omega_o \quad (\text{II.35})$$

La posición de la masa M en este instante es:

$$x(t_2) = x_o + A \sin[\omega_o (t_2 - t_1) + \phi] = -A \sin[\phi]. \quad (\text{II.36})$$

El movimiento sucesivo queda determinado por estos valores.

Note que no hay pérdida de energía. El roce estático no realiza trabajo. No hay deslizamiento relativo y el roce dinámico no ha sido considerado.

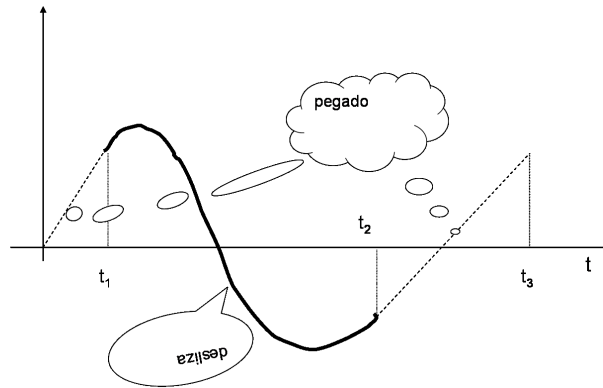


Figura II.7: Este movimiento se caracteriza por un intervalo con velocidad constante e igual a la de la correa y otro movimiento sinusoidal que ocurre cuando existe una velocidad relativa entre la correa y la masa M . Si no se desprecia el roce dinámico, no se conserva la energía. Este problema está propuesto al final del capítulo.

□

II.5. Oscilaciones Forzadas

La interacción con un elemento externo cambia la dinámica del sistema. Si consideramos una fuerza externa del tipo $P \sin \Omega t$, la ecuación de movimiento del péndulo con disipación se convierte en:

$$\ddot{x} + h(\dot{x}) + \omega_0^2 \sin x = P \sin \Omega t.$$

Esta ecuación y otras similares aparecen en vibraciones mecánicas, circuitos eléctricos y muchos otros casos.

Comenzaremos buscando soluciones que tengan la frecuencia Ω o sus armónicos, porque así ocurre en muchos casos.

II.5.1. Oscilaciones con $\delta = 0$ y una fuerza periódica externa.

La mayoría de las oscilaciones son forzadas. En particular los átomos de la atmósfera son bombardeados por todo el espectro de radiación del Sol, que es una onda electromagnética con un amplio rango de frecuencias. Las frecuencias que son absorbidas son las cercanas a la frecuencia natural del átomo. El resto atraviesa la atmósfera y llega a la superficie de la tierra. En algunos de estos cálculos aproximados no se considera la disipación.

Por otra parte la inclusión de la disipación oscurece los resultados físicos.

A continuación analizaremos estas oscilaciones.

Si consideramos los términos no lineales, debemos tener un método para extraer información de estas ecuaciones. Usaremos el método de aproximaciones sucesivas.

Método de Aproximaciones Sucesivas

En este método el primer paso consiste en elegir –haciendo uso de la experiencia adquirida en ejemplos anteriores–, una función con la cual comenzar la iteración. Normalmente se elige la expresión de la fuerza externa (el término inhomogéneo). Esta solución corresponde a la primera iteración. Suponemos que el

sistema será influenciado prioritariamente por la fuerza externa. Esta es una elección, no hay manipulación algebraica en esta primera etapa.

A continuación, de la ecuación inicial, se despeja la segunda derivada en función del resto de los términos de la ecuación. Se reemplaza la solución anterior en estos términos. Obtenemos así una ecuación de la forma $\ddot{x}_2(t) = \text{una función del tiempo}$. Se integra esta ecuación y se logra la segunda iteración $x_2(t)$. En este último proceso de integración NO se considera la solución homogénea de la ecuación $\ddot{x}_2(t) = 0$: se eliminan las constantes de integración en a_0 y b_0 .

Esta es la iteración fundamental, a continuación se repite este ciclo partiendo con la función $x_2(t)$.

Para que este proceso sea válido cada aproximación debe incorporar términos más cada vez más pequeños. Sólo de esta forma podemos esperar que este procedimiento pueda converger.

Ejemplo

Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \mu x^3 + P \sin \Omega t.$$

Utilizamos

$$x_1 = C \sin \Omega t$$

como semilla para generar una solución, que esperamos, tenga significado físico.

Se introduce $x = x_1(t)$ en el segundo miembro de la ecuación y se transforma x_1^3 en una suma de dos funciones trigonométricas en la forma usual:

$$\ddot{x}_2 = (P - \omega_0^2 C - \frac{3}{4} \mu C^3) \sin \Omega t + \frac{\mu C^3}{4} \sin 3 \Omega t,$$

a continuación se integra dos veces en el tiempo y no se considera la solución homogénea debido a que buscamos soluciones periódicas. Así se obtiene $x_2(t)$.

$$x_2 = \frac{1}{\Omega^2} \left(\omega_0^2 + \frac{3}{4} \mu C^2 - \frac{P}{C} \right) C \sin \Omega t - \frac{1}{36} \frac{\mu}{\Omega^2} C^3 \sin 3 \Omega t.$$

El ciclo se repite: se introducen x_2 en la parte derecha de la ecuación inicial, se integra y se obtiene $x_3 \dots$.

Consideramos sólo hasta esta aproximación y extraemos la información relevante. Veamos la relación entre la amplitud de la oscilación y la frecuencia de la fuerza externa Ω . Sabemos que si $\mu = 0$, existe una resonancia para $\Omega = \omega_o$, es decir, en este caso $C \rightarrow \infty$. A continuación veremos que el término no lineal incluido en la ecuación impide que esto suceda.

El problema es determinar la amplitud de oscilación C . Como este método se denomina de aproximaciones sucesivas, es natural esperar que el término de segundo orden x_2 , contenga al término de primer orden x_1 y le sume otras expresiones de orden más bajo. La expresión para la amplitud se obtiene igualando el coeficiente de la función $\sin \Omega t$ que aparece en x_1 con el coeficiente de $\sin \Omega t$ en x_2 . De esta operación, comparar los armónicos equivalente en ambos lados de la igualdad, se obtiene:

$$C = \frac{C}{\Omega^2} \{ \omega_o^2 + \frac{3}{4} \mu C^2 - \frac{P}{C} \}.$$

No consideramos el término armónico $\sin 3 \Omega t$ en la determinación de la amplitud, suponiendo que es efectivamente una perturbación del anterior. Para que este método funcione, la amplitud de los sucesivos armónicos debe disminuir su amplitud. Esta es la condición de convergencia de este método.

Volviendo a la expresión de la amplitud, como sabemos que la cantidad relevante es Ω/ω_o , la reescribimos como:

$$\frac{\Omega^2}{\omega_o^2} = 1 + \frac{3}{4} \frac{\mu C^2}{\omega_o^2} - \frac{P}{C \omega_o^2}. \quad (\text{II.37})$$

Vemos que si $\mu = 0$ y $\Omega = \omega_o$, la amplitud crece indefinidamente $C = \infty$.

También es posible mostrar que, si $\mu \neq 0$, entonces para $\Omega = \omega_o$ se obtiene:

$$\mu C^3 = \frac{4}{3} P \Rightarrow C \text{ finito.}$$

La inclusión de términos no lineales inhibe la existencia de soluciones que crezcan sin límites.

Con el objeto de entender la influencia de los términos no lineales, hagamos $\mu = 0$ y grafiquemos, para este caso, $\frac{|C|}{C_o}$ versus (Ω^2/ω_o^2) , donde hemos definido

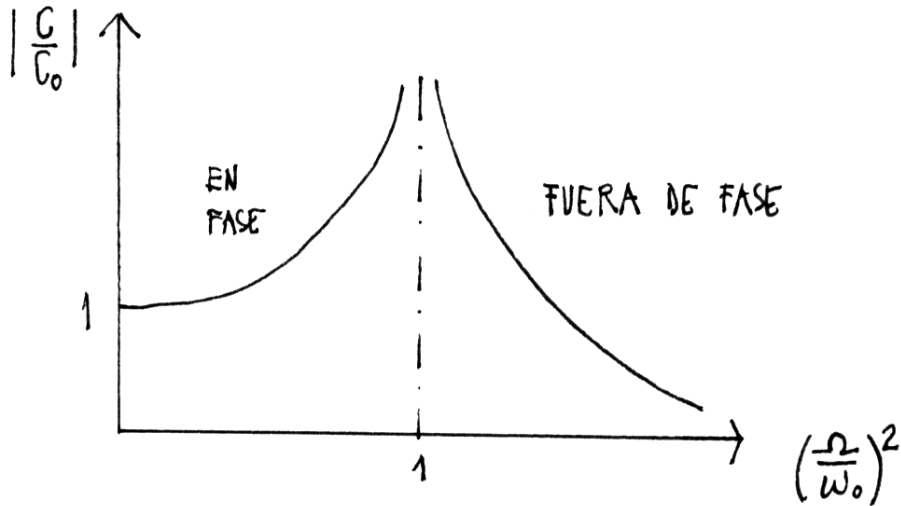


Figura II.8: Variación de la amplitud $|C/C_0|$ con la frecuencia, sin incluir el término no-lineal. Existen dos ramas en el gráfico: una de ellas tiene una diferencia de fase en π entre la fuerza externa y el oscilador (derecha) y la otra se encuentra en fase con la fuerza externa (izquierda).

$$C_0 \equiv P/\omega_0^2:$$

$$\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{C_0}{C} \rightarrow \frac{C}{C_0} = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}} \quad (\text{II.38})$$

De la Figura II.8, vemos que la ausencia de un término de amortiguamiento y la eliminación del factor no-lineal produce una oscilación cuya fase es 0 ó π comparada con la de la fuerza externa y su amplitud crece sin límites en la vecindad de la frecuencia de resonancia $\Omega = \omega_0$.

Veamos a continuación qué sucede al incluir el término no-lineal en la ecuación original ($\mu \neq 0$). Otra forma de escribir x_2 es:

$$x_2 = C \sin \Omega t - \frac{1}{36} \frac{\mu C^3}{\omega_0^2 - \frac{P}{C} + \frac{3}{4} \mu C^2} \sin 3 \Omega t,$$

donde hemos mantenido el primer armónico –de acuerdo al método de aproximaciones sucesivas–, y despejamos Ω de la amplitud del tercer armónico y lo reemplazamos por la expresión contenida en la fórmula [II.37].

En este caso la dependencia de C en la frecuencia Ω se obtiene de la ecuación [II.37] y, como se aprecia, corresponde a una ecuación cúbica en $\frac{C}{C_o}$:

$$\frac{\Omega^2}{\omega_o^2} = 1 - \frac{C_o}{C} + \frac{3}{4} \left(\frac{\mu C_o^2}{\omega_o^2} \right) \left(\frac{C}{C_o} \right)^2, \quad \text{donde } C_o \equiv P/\omega_o^2, \quad (\text{II.39})$$

en consecuencia, para un valor dado de Ω/ω_o se pueden obtener uno o tres valores reales para C/C_o . Para ver este resultado gráficamente, conviene redefinir las variables que usaremos:

$$\alpha \equiv \frac{3}{4} \left(\frac{\mu C_o^2}{\omega_o^2} \right), \quad x = (\Omega/\omega_o)^2, \quad y = \frac{C}{C_o}.$$

Una forma es directamente graficar x en función de y , que no es lo que se hace normalmente.

Otra forma de graficar esta función es dividirla en dos partes. Definimos:

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{donde}$$

$$x_1 = -1/y \quad y \quad x_2 = 1 + \alpha y^2.$$

De esta forma podemos extraer información en forma cualitativa. El gráfico correspondiente a x_1 son dos hipérbolas ubicadas en el segundo y cuarto cuadrante (ver Figura siguiente). El gráfico de x_2 es una parábola ubicada a la derecha con $x_2 > 0$. Ambos gráficos aparecen en uno solo a la izquierda de la Figura II.9.

Para obtener el gráfico del medio, debemos tomar un valor de y y del gráfico de la izquierda sacar los valores de x_1 y x_2 y sumarlos para obtener x . De modo que si $y > 0$, sacamos los valores x_1 y x_2 de la parábola e hipérbola en el primer y segundo cuadrante. Si $y < 0$ utilizamos los valores de x_1 y x_2 como se indica en la figura.

Finalmente nos interesa sólo el módulo de y , puesto que un valor negativo sólo da información acerca de la fase de la oscilación y no del módulo de la amplitud. Al tomar el módulo de y del gráfico del medio de la Figura II.9, obtenemos el gráfico de la derecha. Este representa la dependencia de la amplitud en función de la velocidad angular referida a la velocidad angular fundamental ω_o .

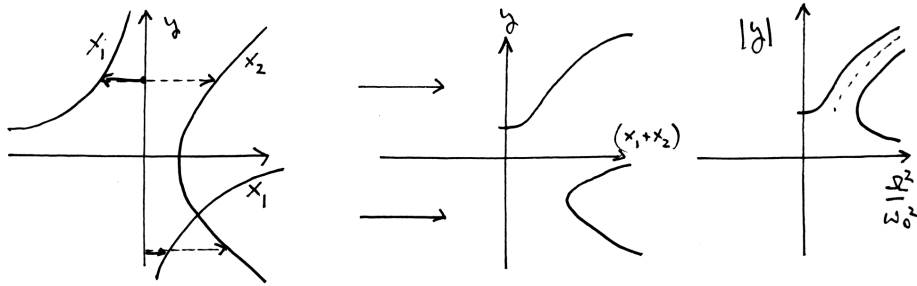


Figura II.9: La figura indica gráficamente cómo construir el diagrama Amplitud versus frecuencia para el caso en que se incluye el término no lineal. Se trata de una superposición de $x_1 = -1/y$ y $x_2 = 1 + \alpha y^2$, con $\alpha > 0$ y $x = x_1 + x_2$. x representa a $(\Omega/\omega_0)^2$ e y a la amplitud.

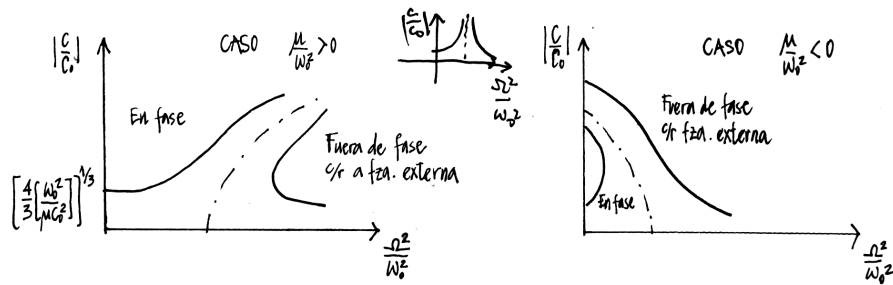


Figura II.10: Se muestra un resumen del comportamiento de la amplitud relativa versus la frecuencia de la fuerza externa. Se incluyen los casos $\mu > 0$, $\mu = 0$ y $\mu < 0$. La línea punteada señala el caso $\mu = 0$.

Estudio de la fase y el salto en la amplitud

La principal diferencia que aparece al incluir el amortiguamiento $\delta \neq 0$, es que el gráfico que aparece discontinuo y separado por la línea punteada en [II.10] se transforma en una línea continua. Esto es, el gráfico de la fase es una función continua.

A continuación obtenemos una expresión para la fase. Para facilitar el álgebra pero sin perder generalidad, no incluiremos la fase de la función inicial. Utilizaremos $x_1 = C \sin(\Omega t)$. Esto lo compensamos cambiando la fase de la perturbación. Con la misma idea de simplificar el álgebra, la escribi-

mos como $P_1 \sin \Omega t + P_2 \cos \Omega t$. La relación entre P_1 Y P_2 con el primitivo P es : $P^2 = P_1^2 + P_2^2$.

La ecuación diferencial se transformó en:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_o^2 x + \mu x^3 = P_1 \sin \Omega t + P_2 \cos \Omega t, \quad \text{con } P^2 = P_1^2 + P_2^2.$$

Aplicamos el método de aproximaciones sucesivas incluyendo como función inicial x_1 la misma que utilizamos en el caso sin amortiguamiento: $x_1(t) = C \sin \Omega t$.

Reemplazando $x_1(t)$ en la ecuación diferencial, obtenemos (sin considerar el término en $\sin 3\Omega t$):

$$(\omega_o^2 - \Omega^2) C + \frac{3}{4} \mu C^3 = P_1, \quad 2\delta C \Omega = P_2,$$

despejando P desde aquí, tenemos:

$$P_1^2 + P_2^2 = P^2 = \left[(\omega_o^2 - \Omega^2) C + \frac{3}{4} \mu C^3 \right]^2 + 4\delta^2 C^2 \Omega^2.$$

Despejando $\frac{\Omega^2}{\omega_o^2}$ en función de C , se obtiene

$$\frac{\Omega^2}{\omega_o^2} = 1 - \frac{2\delta^2}{\omega_o^2} + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\omega_o^2} C^2 \pm \frac{1}{\omega_o^2} \sqrt{\frac{P^2}{C^2} + 4\delta^2(\delta^2 - \omega_o^2 - \frac{3}{4}\mu C^2)}, \quad (\text{II.40})$$

la fase queda determinada por:

$$\tan \gamma = \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\delta C \Omega}{(\omega_o^2 - \Omega^2) C + \frac{3}{4} \mu C^3}.$$

Para estudiar el comportamiento de la amplitud C/C_o versus $(\Omega/\omega_o)^2$ debemos graficar la ecuación anterior fijando un valor para δ . Obviamente esta expresión es más complicada que el caso estudiado anteriormente. La Figura [II.11] indica un caso con $\delta/\omega_o = 1$.

Salto en Frecuencia

A continuación vamos a examinar qué sucede en la región donde coexisten tres amplitudes posibles asociadas a un solo valor de la frecuencia Ω/ω_o .

En este proceso dejamos fijo el valor de la amplitud de la fuerza externa P y variamos *lentamente* su frecuencia Ω , de modo que para cada valor de Ω , el sistema oscila en forma estacionaria. De esta manera el sistema oscilará en una secuencia de valores de Ω sin verse afectado por los cambios de frecuencia.

La Figura adyacente ilustra la conducta que deseamos describir. Por ejemplo, si comenzamos por Ω_A y disminuimos su valor lentamente desde $\Omega_A \rightarrow \Omega_{B_1}$, el sistema responde con las amplitudes correspondientes a la rama inferior de la curva. En el tramo en que existe más de un valor asociado a cada frecuencia se mantiene en la rama inicial. Sin embargo, al llegar a Ω_{B_1} , el sistema comienza a adquirir oscilaciones *no-estacionarias*. Al reducir levemente su frecuencia, el sistema se ubica en Ω_{B_2} , y comienza a oscilar con la amplitud correspondiente a la rama superior. Al seguir disminuyendo, siempre en forma lenta, hasta alcanzar Ω_D , el sistema sigue la única rama disponible para esos valores de la frecuencia.

En el punto de quiebre, B_1 en este trayecto, hubo un cambio abrupto de la amplitud de oscilación. Posteriormente existe sólo un valor de la amplitud asociado a cada frecuencia Ω y el sistema obedece esta restricción. El proceso inverso, es decir, comenzar desde la frecuencia Ω_D y avanzar hasta Ω_{C_2} es análogo. El sistema se mantiene en la rama donde se inició hasta alcanzar el punto C_2 , allí adquiere oscilaciones no-estacionarias y al disminuir lentamente su frecuencia termina saltando a la rama inferior con un cambio abrupto de su amplitud.

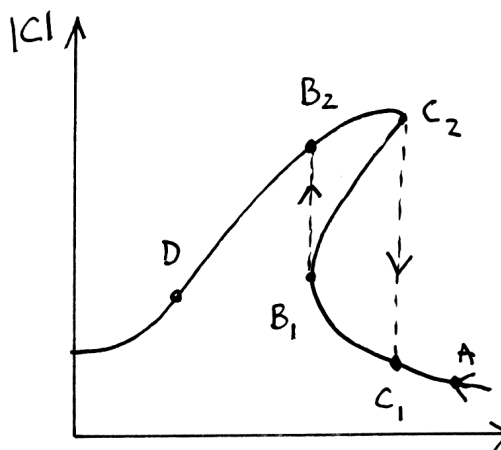


Figura II.11:

B_1 y C_1 pueden ser determinados a partir de la ecuación II.40, corresponden a los puntos donde la derivada de la amplitud con respecto a Ω^2 se hace infinita.

Este comportamiento es posible observarlo en motores en los cuales el torque no es una función lineal de la frecuencia. En ciertos motores, es conocido que

para cierto rango de valores de la relación torque/carga, hay frecuencias que no se pueden alcanzar, por corresponder a estados inestables del sistema [1].

II.5.2. Repaso de Oscilaciones

El movimiento armónico simple tiene variadas aplicaciones. Estudiaremos las oscilaciones de una partícula cargada. La radiación que emite esta carga explica algunos fenómenos físicos de interés. Ya estudiamos uno, la vida media de un átomo de acuerdo a un modelo clásico.

Estudiaremos las oscilaciones partiendo desde las más simples hasta las oscilaciones lineales con disipación y una fuerza externa. Cada una está caracterizada por un parámetro físico: ω_0 para las oscilaciones libres, γ para la disipación. A su vez cada uno de estos parámetros depende de otras propiedades físicas, por ejemplo: la temperatura T , la densidad de partículas N , \dots . Distintos valores de $[N] \equiv [\text{m}^{-3}]$, por ejemplo caracterizan un plasma en las distintas capas de la atmósfera y también un conductor. Estos son los ejemplos y aplicaciones que estudiaremos aquí.

Oscilación en un Plasma

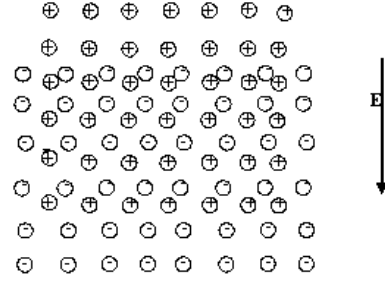
La radiación solar contiene un espectro de frecuencias, entre ellas la luz ultravioleta que es capaz de ionizar algunos de los átomos de la atmósfera terrestre. Esta ionización depende de la altura de la capa atmosférica, de su densidad y si es de día o de noche. Los átomos de las capas superiores de la ionósfera (Capa F_2) son los más ionizados. En las capas inferiores de este mismo estrato (la capa D), la densidad de átomos aumenta pero la radiación ultravioleta disminuye (ha sido absorbida en las capas superiores) y por tanto el número de átomos ionizados es menor.

Los electrones en un metal conductor obedecen las mismas reglas, salvo que el número de electrones libres es mucho mayor que los existentes en la ionósfera. Ambos sistemas pueden ser tratados como un plasma.

Un plasma es un medio en el cual un porcentaje de los átomos están ionizados. Mediante un pulso eléctrico podemos separar las partículas positivas (Iones,

pesados) y negativas (electrones, livianos).

Una vez separadas, podemos pensar en un modelo simple, se produce un exceso de partículas negativas en una región y el mismo exceso -debido a que el volumen es inicialmente neutro-, de partículas positivas. Ambas están separadas en promedio una distancia Z . Se genera así un campo eléctrico debido a esta separación y las cargas, impulsadas por este campo comienzan a oscilar con una frecuencia que estimaremos a continuación.



Si consideramos una geometría plana, la más simple, la intensidad del campo eléctrico E es: $E = [N e Z]/\epsilon_0 \equiv \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

La fuerza que se ejerce sobre una carga debido a este campo es:

$$F = -\frac{Ne^2Z}{\epsilon_0}.$$

La ecuación de movimiento de esta carga es:

$$m_e \ddot{Z} = -\frac{Ne^2Z}{\epsilon_0}$$

Tiene la misma expresión que la ecuación de un oscilador, de modo que también acá encontramos frecuencias naturales de oscilación del sistema. La frecuencia de oscilación es:

$$\omega_0 = \sqrt{N} \cdot \left(\frac{e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (\text{II.41})$$

El producto $e^2/[m_e \epsilon_0] = 3,2 \times 10^3$ ya fue evaluado anteriormente.

Figura II.12: La separación de las cargas positivas y negativas puede obtenerse de varias formas. Al separarse se genera un campo eléctrico que a su vez pone en movimiento a las cargas negativas del plasma (la más livianas).

La expresión para la frecuencia en el plasma tiene un parámetro: N , el número de cargas por unidad de volumen. Este parámetro permite identificar las distintas aplicaciones de esta expresión.

Por ejemplo, si nos referimos a la Ionósfera, debemos distinguir dos capas, la capa D, la más baja a alrededor de $\sim 60\text{km}$ de altura, donde la densidad de partículas cargadas es: $N \sim 10^9 [\text{m}^{-3}]$. La capa más alta, la F_2 , tiene una densidad mayor de partículas cargadas a pesar que la atmósfera disminuye su densidad con la altura. Esta capa recibe más radiación proveniente del Sol. El valor de N es $N \sim 10^{12} [\text{m}^{-3}]$.

Conocido este parámetro, podemos determinar la frecuencia natural en cada una de estas capas.

Para la capa D, $\omega_0 \sim 2 \times 10^6 [\text{s}^{-1}] \Rightarrow \nu \sim 300\text{kHz}$.

Para la capa F, $\omega_0 \sim 6 \times 10^7 [\text{s}^{-1}] \Rightarrow \nu_0 \sim 10\text{MHz}$.

Recordemos que para la luz azul $\lambda \sim 4,000\text{\AA} = 4 \times 10^{-7}\text{m}$. la frecuencia ν_{azul} es $\nu \sim 7 \times 10^{14}\text{Hz}$.

La frecuencia asociada con la luz azul es considerablemente mayor que la frecuencia natural que asociamos a cada capa de la ionósfera. El valor de dicha frecuencia se encuentra más cercano a las ondas cortas de radio. La ionósfera, por lo tanto será relevante en las comunicaciones con radio de onda corta. Para frecuencias más altas o más bajas, la ionósfera responde muy débilmente y las ondas atraviesan esta capa.

Es muy conveniente que la frecuencia natural de la ionósfera se encuentre en la región ultravioleta, de esta forma esta radiación queda atrapada en dicha región, no la atraviesa y nos protege de sus efectos.

Volveremos a este punto después de estudiar el factor de disipación γ de estos medios.

Metales

Por definición, un metal contiene un número de electrones conducción que están permanentemente desacoplados de su átomo de origen. Los iones forman una estructura rígida fija y los electrones circulan a través de esta red.

Suponemos que existe un electrón libre por cada átomo. El número de electrones

N, se obtiene recordando que en un mol de un elemento existen n número igual al número de Avogadro N_A de átomos. Por ejemplo, en el caso del Cobre, el número atómico es 63,5 y la densidad $\rho = 8900[\text{kg}/\text{m}^3]$. Mediante una regla de tres obtenemos el valor de N:

$$\frac{N}{8900} = \frac{N_A}{63,5/1000} \Rightarrow N = \frac{1000 N_A \rho}{A} = 8,4 \times 10^{28} [\text{m}^{-3}]. \quad (\text{II.42})$$

Donde hemos usado el valor: $N_A = 6,02 \times 10^{23}$.

El valor de la frecuencia natural de un metal típico, como el Cobre es:

$$\omega_0 \sim 2 \times 10^{16} [\text{s}^{-1}] \text{ y la frecuencia } \nu_0 \sim 3 \times 10^{15} \text{ Hz} \quad (\text{II.43})$$

Esta frecuencia se ubica en el rango de la radiación ultravioleta. Existe un número mucho mayor de electrones libres en un metal comparado con el caso anterior de la ionósfera.

Oscilaciones con un término disipativo y el factor Q

Brevemente repasamos la ecuación de movimiento en un oscilador en una dimensión con un término disipativo que supondremos proporcional a la velocidad del oscilador. La ecuación para un sistema unidimensional es :

$$m\ddot{Z} + b\dot{Z} + kZ = 0.$$

Definiendo $\gamma \equiv b/m$, y $\omega_0^2 \equiv k/m$, tenemos

$$\ddot{Z} + \gamma\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0. \quad (\text{II.44})$$

La solución general de esta ecuación lineal es:

$$Z = A e^{-\frac{\gamma}{2} t} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (\text{II.45})$$

donde A y φ son las dos constantes de integración de este sistema de segundo orden. El valor de la frecuencia natural para este sistema es:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \quad (\text{II.46})$$

A continuación nos referiremos sólo a los casos en que $\omega_0^2 \gg (\frac{\gamma}{2})^2$, denominado amortiguamiento débil. Como ya vimos, en este caso el sistema alcanza a efectuar muchas oscilaciones antes de disipar toda su energía inicial. ¿Cuál es la relación entre la pérdida de energía y el factor γ ? Suponiendo que existe disipación, la conservación de la energía es:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{Z}^2 + \frac{1}{2} k Z^2$$

Se puede comprobar fácilmente derivándola:

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{Z} \ddot{Z} + \omega_0^2 Z \dot{Z} = (\ddot{Z} + \omega_0^2 \dot{Z}) \dot{Z} m = -\gamma m \dot{Z}^2 \quad (\text{II.47})$$

Hemos calculado la energía disipada por este oscilador.

Calculemos la energía promedio $\langle E \rangle$ en función del tiempo en este caso. El resultado debe reflejar la disipación de energía [II.47] que ocurre en el sistema.

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T E dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \\ \langle E \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} m \dot{Z}^2 + \frac{1}{2} k Z^2 \right] dt \end{aligned}$$

Introduciendo la expresión para $Z(t)$:

$$Z(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2} t} e^{i(\omega t + \varphi)}$$

podemos calcular el valor medio de la energía:

$$\langle E \rangle \simeq \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t}. \quad (\text{II.48})$$

El resultado es aproximado porque hemos despreciado el aporte de integrales proporcionales a γ : estamos suponiendo disipación débil. La integral que no hemos considerado, proviene de la expresión:

$$\int_0^T e^{-\gamma t} \cos[2(\omega t + \varphi)] dt \neq 0$$

Pero si $\gamma^2 \ll \omega_0^2$, entonces estos factores son despreciables.

Dentro de la misma aproximación, incorporando el valor de la energía promedio, tenemos un resultado ya conocido previamente:

$$\frac{1}{\langle E \rangle} \frac{d \langle E \rangle}{dt} \approx -\gamma$$

Antes de volver a las aplicaciones definimos un número adimensional (que por tanto sirve para caracterizar a un sistema de osciladores

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\gamma}, \text{ el valor de } Q. \quad (\text{II.49})$$

Los sistemas levemente amortiguados se caracterizan por un $Q \equiv \frac{\omega}{\gamma} \gg 1$. Si definimos

$$\gamma\tau = \frac{2\pi\gamma}{\omega} \simeq 2\pi/Q$$

como $Q \gg 1$, el sistema pierde un factor de energía $1/e$ en aproximadamente $1\Delta t \sim 1/\gamma$, es decir en $Q/2\pi$ ciclos de vibración.

Oscilaciones Forzadas y la Potencia absorbida.

El caso de vibraciones forzadas es el más usual. Cualquier sistema que oscile sin tener una fuerza que reponga la energía disipada decae exponencialmente, como vimos en el párrafo anterior.

A la ecuación [II.44] le sumamos la fuerza externa que impulsa al oscilador. Consideremos una fuerza con frecuencia ω :

$$m\ddot{Z} + b\dot{Z} + kZ = F_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{Z} + \gamma\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

La solución es:

$$Z = A \cos(\omega t + \varphi) \text{ (Oscilación forzada.)}$$

donde la amplitud es:

$$A = \frac{F_0}{m} \left[\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right]^{1/2} \quad (\text{II.50})$$

La Potencia absorbida por el oscilador proviene del trabajo que se realiza contra la fuerza de fricción: $= -F_d \dot{Z} = b \dot{Z}^2 = \gamma m \dot{Z}^2$

$$\langle \dot{Z}^2 \rangle = \frac{1}{2} (\omega A)^2$$

$$\langle P_{\text{absorbida}} \rangle = \frac{F_0^2}{2 m \gamma} \left[\frac{\gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right]$$

Ejemplo

Usando los resultados anteriores y la expresión para la radiación electromagnética de una partícula acelerada y con carga, calcule la radiación de un átomo de la atmósfera. Relacionar este resultado con el color azul del cielo. ¿Por qué las nubes son plateadas?

Solución

Consideremos primero la dispersión generada por un átomo en forma individual.

La potencia radiada por un oscilador con carga es [II.29]:

$$\langle P \rangle = \frac{e^2 \omega^4 A^2}{12 \pi \epsilon_0 c^3}$$

La amplitud fue encontrada en la sección anterior II.50], sólo debemos introducir la expresión de la fuerza externa para este caso:

$$A = \frac{e E_0}{m_e} \left[\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right]^{1/2}$$

también conocemos la frecuencia natural de un átomo ya fue estimada [II.28]:

$$\omega_0 = 4,5 \times 10^{16} \text{ Hz},$$

La frecuencia ω de la luz visible solar, la que vemos, es mucho menor que ω_0 . Podemos entonces despreciar el valor de ω y γ en la expresión anterior y evaluar la potencia radiada:

$$\langle P \rangle = \frac{e^2 \omega^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{e^2 E_0^2}{m_e^2} \left[\frac{1}{\omega_0^2} \right]$$

Si escribimos $\omega = [2 \pi c]/\lambda$, tenemos la respuesta buscada: la potencia emitida es proporcional, en este caso, a $1/[\lambda]^4$. Si la luz roja tiene una longitud de onda que es casi el doble de la luz azul (están en la razón $[7,5/4,2]$) entonces la luz azul es dispersada aproximadamente diez veces más que la luz roja. De manera que si miramos en la zona cercana a donde se ubica el Sol, casi toda la luz azul en esa dirección ha sido dispersada y sólo recibimos la luz rojiza restante. Si observamos el cielo en otra dirección, alejada del Sol, sólo recibimos luz dispersada, mayoritariamente azul. Por eso el cielo es azul.

Con respecto al color de las nubes no podemos ser muy cuantitativos. Enfatizamos en el caso anterior el hecho que estudiábamos el efecto de un átomo. Ahora consideremos otros átomos. En la atmósfera existe dispersión, los átomos cambian su posición relativa. Están en movimiento térmico. (Analizaremos este aspecto en uno de los ejemplos a continuación). La palabra clave aquí es la interferencia². Se debe considerar, en el cálculo anterior la interferencia de la radiación proveniente de átomos vecinos. Sin embargo, en el caso de la atmósfera, esta interferencia se cancela en promedio porque los átomos cambian constantemente de posición y lo mismo pasa con el desfase entre la radiación. La suma entonces se cancela en promedio: unos suman otros restan. La interferencia sigue existiendo, sólo que no aporta al valor de la amplitud final que proviene, como se calculó de cada átomo en forma individual.

En el caso de las nubes, las moléculas de agua están juntas y no cambian su posición. El proceso de interferencia es efectivo en esta configuración. Las ondas dispersadas interfieren. Cuando dos ondas interfieren positivamente el resultado es que la intensidad aumenta 4 veces. Si dentro de una longitud de onda existen N átomos vibrando en fase, la amplitud se incrementa en N^2 . Como la luz roja tiene una amplitud casi el doble de la azul, el número de átomos que vibran en fase con la luz roja es el doble de la luz azul. De esta forma la luz roja, por efecto de la interferencia aumenta su incidencia en la luz dispersada y las nubes recuperan el color blanco que es la suma de todas las longitudes de onda de la luz visible.

Comentarios

²Una definición cuantitativa de la interferencia aparece en el capítulo de mecánica cuántica

Veamos cuantos átomos caben en una longitud de onda.

En condiciones normales la densidad, en número de átomos, es aproximadamente $3 \times 10^{25} \text{m}^{-3}$. Por lo tanto en un cubo de $5 \times 10^{-7} \text{m}$ de lado (esta longitud es aproximadamente la longitud de onda de la luz azul) contiene 4×10^6 moléculas. Por ejemplo : aproximadamente 100 moléculas en una longitud de onda. En una longitud de onda del color rojo serían un poco más del doble de átomos. Es preciso notar que no se han considerado varios efectos, como la variación de la densidad con la altura, la composición del aire. Este número es relevante para cuantificar los efectos colectivos de una onda electromagnética (la luz, por ejemplo) sobre este conjunto de átomos que vibrará en resonancia.

Note que el efecto de la interferencia está limitado por el número de átomos por longitud de onda. Los átomos de una nube NO vibran todos en fase.

La dispersión ocurre fuertemente en direcciones perpendiculares a la dirección de oscilación. Este hecho se puede notar cuando miramos el escape de una moto. El color observado es azul. En general nosotros la miramos contra un fondo oscuro, por ejemplo el pavimento. El color que nosotros observamos proviene de la luz que incide sobre el gas y se dispersa hacia nuestros ojos. Por eso la vemos azul. Si este humo se eleva en el cielo y lo miramos a través de la luz directa, se ve amarillento (la radiación lo despojó de la luz azul), como el smog de nuestra capital (o el de la ciudad de Temuco).

Hay que distinguir el efecto de partículas muy pequeñas pero del tamaño de la longitud de onda. Ellas pueden absorber todas las longitudes de onda y dejar un color oscuro.

Se puede realizar un experimento sencillo para detectar este efecto (ver [13]). La luz de una linterna que atraviesa un vaso con agua limpia, emerge por el otro lado sin dispersarse. Aquí funciona la interferencia de las moléculas de agua que anulan la dispersión de la luz. Sin embargo, si se añade algunas gotas de leche, existen partículas disueltas, que cambian su posición, por tanto la interferencia entre ellas se anula y al mirar el vaso en un ángulo de 90° grados con respecto al rayo incidente se comienza a observar un tinte azulado. Se puede ir aumentando lentamente el número de gotas para incrementar el efecto.

□

Ejemplo (I. Main, pág. 49)

En este ejemplo estudiaremos el amortiguamiento por colisiones. La característica esencial de la vibración de un plasma es el movimiento coherente de los electrones: todos oscilan con el mismo desplazamiento. Este movimiento colectivo se superpone a otro movimiento, más riguroso pero al azar que es la agitación térmica. Con esto un electrón tiene la posibilidad cierta de colisionar con otra partícula, al colisionar su movimiento toma una dirección arbitraria y con otra velocidad \vec{Z} . Pierde la coherencia con el resto de la onda. La razón con la cual los electrones abandonan el movimiento colectivo, debe ser proporcional a la densidad de partículas del medio: N . La fracción de electrones colisionando por unidad de tiempo será $\frac{1}{\tau_c}$, donde $\tau_c \equiv$ tiempo entre colisiones. En cada colisión un electrón es sacado del movimiento coherente. El porcentaje de electrones sacados de la oscilación es

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = -\frac{1}{\tau_c}$$

A diferencia de la disipación usual, aquí la amplitud no decae, sólo disminuye el número de partículas cargadas que oscila. El amortiguamiento consiste en sacar electrones del movimiento colectivo. La pérdida fraccional de energía será, en promedio, la de los electrones que abandonan este movimiento.

$$\frac{1}{\langle E \rangle} \frac{d \langle E \rangle}{dt} = -\gamma = -\frac{1}{\tau_c}$$

Analicemos los distintos casos.

Para los electrones de la ionósfera, los choques se producen principalmente con los iones. El número de choques depende, como se afirmó anteriormente del número de moléculas N_m , depende de la velocidad, que en este caso sólo se considera la velocidad térmica $v_{\text{térmica}}$ y la sección eficaz, que depende principalmente de la fuerza de atracción de las partículas y tienen las dimensiones de área. Esta es una área ficticia. Se define

$$\text{Energía dispersada por segundo} = \sigma_{\text{scattering}} \cdot \text{flujo de energía por segundo.} \quad (\text{II.51})$$

Donde $\sigma_s = [\text{m}^2]$. Esta ecuación escrita en símbolos es:

$$\frac{d \langle E \rangle}{dt} = \sigma_s \langle E \rangle v_{\text{térmica}} N_m,$$

Usando la definición de γ , tenemos

$$\gamma_c = \sigma_s (N_m \cdot v_{\text{térmica}}). \quad (\text{II.52})$$

Modelamos la ionósfera como un gas ideal en equilibrio térmico. Entonces, para un mol:

$$p V = k T \Rightarrow \frac{1}{V} \equiv N_{\text{mol}} = \frac{p}{k T}$$

$$\frac{1}{V_{\text{mol}}} = \frac{p}{N_{\text{molecular}} k T}.$$

Por otra parte a partir del principio de equipartición de la energía, tenemos

$$\frac{1}{2} m_e v_{\text{térmica}}^2 = \frac{3}{2} k T.$$

Hemos supuesto que los iones se mueven a velocidades muy pequeñas. No aportan significativamente a la energía cinética. La velocidad cuadrática media es:

$$\langle v_{\text{térmica}}^2 \rangle = \frac{3 k T}{m_e}$$

El valor de σ_s se puede encontrar teóricamente o a través de experimentos en el laboratorio. Se estima que $\sigma_s \simeq 10^{-19} \text{m}^2$. Reemplazando estos valores en la ecuación para γ , tenemos:

$$\gamma_s \sim \sigma_s \cdot \left(\frac{p}{k T} \right) \cdot \sqrt{\frac{3 k T}{m_e}}$$

$$\gamma_s \sim \left(\frac{3 \sigma_s^2}{k m_e} \right)^{1/2} \cdot \frac{p}{\sqrt{T}}.$$

esta expresión para el factor γ contiene dos parámetros: p y T . Analicemos la capa D con esta ecuación.

La presión en la capa D de la ionósfera es aproximadamente $0,5 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$. Compare este valor con los $10^5 [\text{N m}^{-2}]$ a nivel del mar. La temperatura T es aproximadamente 200°K . Con estos valores, evaluamos el factor de disminución de la energía γ en este estrato D.

$$\gamma_s \sim 2 \times 10^6 \text{s}^{-1} \sim \omega_0$$

El factor de atenuación es muy similar a la frecuencia natural del medio D. El factor Q es:

$$\Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\gamma_c} \sim 1$$

La longitud de onda asociada a esta frecuencia 300 kHz, es del orden de 1000 m. Esta longitud de onda corresponde a lo que se denomina "longitud de onda media". Para longitudes de onda menores (o frecuencia ν) más alta) la capa D es transparente. Para atravesar esta capa y lograr reflejar las ondas en la capa F se deben utilizar ondas cortas, de alrededor de : 10 a 60 m.

Durante la noche, cesa la radiación del Sol, y debido al factor $Q = 1$, los iones de la capa D se recombinan y no son reemplazados. La capa D desaparece y por esta razón mejoran las comunicaciones de onda corta en la noche.

Para la capa más alta (F) es muy tenue, la presión es baja $p \sim 10^{-10}[\text{N/m}^2]$ o menos. Su temperatura es 10 veces más alta que la de la capa D: $T \sim 2000^\circ\text{K}$. De este modo:

$$\gamma_s(\text{capa F}) \ll \gamma_s \quad (\text{capa D})$$

$$\omega_c(\text{capa F}) = 10^6 \quad \omega_0(\text{capa D}).$$

De esta forma el decaimiento de la capa F es muy lento. La longitud de onda equivalente a la frecuencia natural del medio $\omega_0 = 2\pi/\nu = 2\pi\lambda/c$ corresponde a un $\lambda = 30\text{m}$. Las ondas cortas de radio penetran, como vimos, la capa D y son reflejadas más arriba en la capa F. Para comunicarse con satélites y naves en el espacio, es necesario usar frecuencias mucho mayores que los 10Mhz característicos de esta capa.

□

Ejemplo

La mayoría de las colisiones de los electrones de conducción en un metal ocurren con los iones de la red. La frecuencia de estas colisiones determina la conductividad del metal. En este ejercicio se relaciona el coeficiente γ con la conductividad de un metal.

Solución

La tarea es calcular $\gamma_c = 1/\tau_c$ utilizando este modelo para un plasma. Los electrones de conducción chocan principalmente con los iones de la red. Este fenómeno determina el tiempo de colisión. Si existe un campo eléctrico E en el metal, los electrones de conducción adquieren una velocidad de arrastre v_{arrastre} ; que se superpone al movimiento térmico de los electrones, que es mucho más enérgico. La conductividad σ_e es

$$\sigma_e = \frac{N e v_{\text{arrastre}}}{E}, \quad (\vec{J} = \sigma \vec{E})$$

Entre colisiones, los electrones adquieren una velocidad

$$v_{\text{arrastre}} = a \tau_c \approx \frac{e E \tau_c}{m_e}$$

Con esta expresión obtenemos

$$\gamma_c = \frac{1}{\tau_c} = \left(\frac{e E}{m_e} \right) \frac{1}{v_{\text{arrastre}}} = \frac{e E}{m_e} \cdot \frac{1}{\left(\frac{e E}{N e} \right)}$$

$$\gamma_c = \frac{1}{\tau_c} \sim \frac{e^2 N}{m_e \sigma} = \left[2 \cdot 8 \times 10^{-8} \frac{c^2 \text{kg}^{-1}}{\sigma} \right] \cdot \left(\frac{N}{\sigma} \right)$$

Aparecen dos parámetros $N \equiv$ densidad de electrones y la conductividad σ_c en la dependencia de γ . Sus valores numéricos en el caso del Cobre, son:

$$\begin{array}{ll} N & \approx 8,4 \times 10^{28} [\text{m}^{-3}] \\ \sigma_{\text{conductividad}} & \simeq 5,8 \times 10^7 [(\Omega \text{ m})^{-1}]. \\ \text{Con estos números } \gamma_c & \simeq 4 \times 10^{13} [\text{s}^{-1}]. \end{array}$$

Recordamos que el valor de la frecuencia natural en un conductor era: $\omega_0 \simeq 2 \times 10^{16}$.

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma_c} = 0,5 \times 10^3 [\text{s}^{-1}].$$

La atenuación es muy baja. las oscilaciones de este plasma tienen una vida media muy larga.

Por esta razón se produce el efecto superficie para una onda electromagnética incidiendo sobre un metal. La onda es electromagnética, al igual que el caso de la capa F de la ionósfera, se refleja en la superficie y retorna al medio original con un cambio de fase cercano a los 180 grados.

II.6. Movimiento en un campo que oscila muy rápido

Consideremos un sistema que está sometido a la acción de un campo de fuerzas. A esta fuerza se suma otra interacción y que se caracteriza por tener una frecuencia muchísimo mayor que la frecuencia característica asociada al sistema original.

Un ejemplo de este tipo, consiste en mantener una escoba en forma vertical. Para evitar que caiga, debemos mover rápidamente la base. Parece razonable apostar que el tiempo que se tarda en desplazar ida y vuelta la base, para mantener la escoba vertical, debe ser mayor que el tiempo de caída de la escoba.

Por ejemplo, la fuerza adicional se escribe : $f = f \cos \gamma t$, con

$$\gamma^2 \gg \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$$

donde hemos supuesto, a modo de ejemplo, que ℓ/g , es el tiempo característico de caída en el campo gravitacional.

Por simplicidad estudiaremos el caso unidimensional. La ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} + f(x, t) \quad (\text{II.53})$$

donde

$$f(x, t) = f_1 \cos \gamma t + f_2 \sin \gamma t.$$

II.6.1. Pequeñas oscilaciones

Supondremos que el desplazamiento real de la partícula producido por la fuerza con frecuencia muy alta, es pequeño.

$$x = \chi + \xi, \quad \text{con} \quad \xi \ll \chi. \quad (\text{II.54})$$

Consideraciones energéticas nos llevan a pensar así. Si la masa (cualquiera fuere su magnitud) siguiera a la fuerza externa en forma rígida, su energía cinética sería proporcional a γ^2 , muy grande. Por otra parte, en el ejemplo de una masa y un resorte con una fuerza externa, II.38.

Ejercicio

Demuestre que, para el caso de una masa unida a un resorte con una fuerza externa igual a $P \sin \Omega t$, y para frecuencias muy altas, ($\Omega^2 \gg \omega_0^2$), la energía cinética es proporcional a $P^2/[\Omega^2]$. Utilice la ecuación II.38 y derive $x(t)$ utilizando sólo la primera aproximación $x_1(t)$.

El promedio de ξ en un período es nulo, $\langle \xi \rangle = 0$. De acuerdo a lo propuesto, χ prácticamente no cambia en este período.

Haciendo un desarrollo de Taylor en la ecuación original II.53, y manteniendo hasta primer orden en ξ , obtenemos:

$$m\ddot{\chi} + m\ddot{\xi} = - \left. \frac{dV}{dx} \right|_{\chi} - \xi \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{\chi} + f(\chi, t) + \xi \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\chi} \quad (\text{II.55})$$

Aún cuando ξ es pequeño, $\ddot{\xi}$ es proporcional a γ^2 , de manera que debe incluirse en las ecuaciones.

La ecuación para la variable $\xi(\chi, t)$, es:

$$m\ddot{\xi} = f(\chi, t), \quad \text{para } \chi \text{ fijo} \quad (\text{II.56})$$

Esta ecuación se obtiene de II.55. La fuerza $f(\chi, t)$ es el motor de la variable ξ por definición. Si $f(\chi, t) = 0$, entonces $\xi = 0$. O, desde otro punto de vista, es la aproximación de orden cero para la variable ξ en la ecuación II.55.

La solución de esta ecuación es:

$$\xi = -\frac{f}{m\gamma^2} \quad (\text{II.57})$$

Dado el carácter oscilatorio de $f(\chi, t)$, tenemos que el **promedio** de ξ es nulo.

$$\bar{\xi} \equiv \frac{\int_0^{2\pi/\gamma} \xi dt}{2\pi/\gamma} = 0. \quad (\text{II.58})$$

Con este resultado podemos calcular el valor de $\chi(t)$. Utilizamos nuevamente la ecuación II.55. Si tomamos el promedio en un período de esta ecuación y recordando que $\bar{f} = \bar{\xi} = \bar{\ddot{\xi}} = 0$, tenemos que los únicos términos que sobreviven son:

$$m\ddot{\chi} = -\frac{dV}{dx} + \left\langle \xi \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\chi} \right\rangle, \quad (\text{II.59})$$

el último término puede ser escrito como el promedio de la fuerza \bar{f}^2 si incluimos la solución II.57 e integramos por partes :

$$m\ddot{\chi} = -\frac{dV}{dx} - \frac{1}{m\gamma^2} f \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\chi}.$$

la ecuación de movimiento de $\chi(t)$ está gobernado por un potencial efectivo que incluye la fluctuación cuadrática de la fuerza $f(\chi, t)$:

$$m\ddot{\chi} = -\frac{dV_{\text{efectivo}}}{dx} = -\frac{dV}{dx} - \frac{1}{2m\gamma^2} \frac{\partial \bar{f}^2}{\partial x} \Big|_{\chi}. \quad (\text{II.60})$$

Esta es la solución del problema. El valor del promedio de f^2 se calcula de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} f^2 &= f_1^2(\chi) \cos^2 \gamma t + f_2^2 \sin^2 \gamma t + 2f_1 f_2 \cos \gamma t \sin \gamma t \\ \langle f^2 \rangle &\equiv \bar{f}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f^2 dt' \\ &= \frac{1}{2} (f_1^2 + f_2^2) \end{aligned}$$

El potencial efectivo toma la siguiente forma:

$$V_{\text{efectivo}} = V(\chi) + \frac{f_1^2 + f_2^2}{4m\gamma^2} \quad (\text{II.61})$$

II.7. Procesos Estocásticos

II.7.1. Teoría Cinética

Considere una masa m en el interior de una caja que contiene un gas ideal. Si la masa m está en equilibrio térmico con el gas, podemos usar un resultado de la

teoría Cinética:

$$\langle \text{Energía Cinética} \rangle = \frac{1}{2} k T. \quad (\text{II.62})$$

El valor promedio del cuadrado de la velocidad de la masa m es proporcional a la temperatura T del gas. No hemos considerado aquí ninguna fuerza externa, como la gravedad por ejemplo. la masa m está a merced de los choques que experimenta con los átomos del gas. Estos ocurren en forma aleatoria. No parece difícil de imaginar que el promedio de la velocidad $\langle \vec{v} \rangle$ de la masa m debe ser nula. La masa no puede adquirir un desplazamiento efectivo en alguna dirección y mantenerlo en el tiempo. Puede avanzar en alguna dirección en algún instante, pero tarde o temprano retorna a un punto vecino al punto de partida. Los átomos que colisionan con ella no poseen ninguna dirección ni sentido preferido, tampoco los choques tienen alguna periodicidad.

El significado del promedio que escribimos como $\langle \dots \rangle$, es el siguiente: supongamos que tenemos muchas cajas llenas con un gas ideal, todas ellas bajo las mismas condiciones físicas. En cada una de las cajas ponemos una masa m en la misma posición en el instante $t = 0$. Esto es un ensemble. transcurrido un intervalo T , congelamos la situación en todas las cajas y medimos, por ejemplo la posición de la masa m . El valor promedio de la posición se obtiene sumando vectorialmente la posición de la masa m en cada una de las cajas y dividiendo por el número de cajas. Este vector posición debe ser nulo. En todas las cajas hubo un desplazamiento de la masa m , pero al sumarlo vectorialmente el resultado es muy cercano a cero: $\langle \vec{x} \rangle = 0$. Usando un argumento de simetría, podemos afirmar que el resultado será el mismo para cada una de las coordenadas, es decir $\langle x \rangle = 0$, $\langle y \rangle = 0$ y $\langle z \rangle = 0$. Esto es porque desconectamos la gravedad que deshace la isotropía.

Volviendo al equilibrio térmico, consideremos lo que sucede en más de una dimensión. En este caso, por cada grado de libertad asociamos un factor $kT/2$, donde k es la constante de Boltzman y tiene un valor numérico $k = 1,38 \times 10^{-16}$ [ergs/° K] o $k = 1,38 \times 10^{-23}$ [Joule/° K].

Si un sistema tiene un número mayor de grados de libertad, por ejemplo un átomo viajando en tres dimensiones, posee tres grados de libertad, por lo tanto su energía cinética media será $\langle \text{En. Cinética} \rangle = \frac{3kT}{2}$. Si es una molécula diatómica moviéndose al interior de una caja, y modelamos cada átomo como una pequeña esfera unida por una barra muy delgada y de masa despreciable, entonces su energía cinética promedio será: $\langle \text{En. Cinética} \rangle = \frac{5kT}{2}$, donde hemos sumado un factor kT debido a los dos grados de libertad adicionales que aparecen al

incluir la posibilidad de rotar en torno a un eje perpendicular a la barra que une ambos átomos.

El caso de una masa atada a un resorte es similar. Debemos tener en cuenta que el factor $kT/2$ representa la energía cinética promedio. Si adoptamos como principio la equipartición de la energía, en el caso del oscilador la energía cinética promedio no es toda la energía, existe una oscilación en la cual en algún instante toda la energía es cinética y un cuarto de período más tarde, toda la energía se transformó en energía potencial. La energía potencial y cinética, ambas contribuyen a la energía total. Utilizando el principio de equipartición, cada una contribuye con $kT/2$ a la energía total, de modo que $\langle E_{\text{Total del oscilador}} \rangle = \frac{kT}{2}$.

II.7.2. Movimiento Browniano

Muchos de los fenómenos naturales que nos rodean son impredecibles. En otros ámbitos, como el comportamiento de las acciones en la bolsa de comercio, también ocurre algo parecido. Para enfrentar situaciones donde existe incertidumbre acerca del comportamiento futuro de un sistema se han formulado modelos e inventado algoritmos. En esta sección analizaremos uno de estos modelos: la ecuación de Langevin que aplicaremos al movimiento browniano. La estrategia sigue la sección 41 del primer volumen de Feynman Lectures on Physics [9].

Robert Brown en 1827 descubrió que partículas muy pequeñas suspendidas en un fluido permanecían en un movimiento aleatorio continuo. Su descubrimiento pasó desapercibido por largo tiempo hasta que Guoy [[6]] propuso que este movimiento era una consecuencia de la existencia de las moléculas. De esta forma llegó a oídos de los físicos. Einstein formuló una descripción matemática de este fenómeno [7].

Consideremos una partícula de masa m en equilibrio térmico en un gas a temperatura T . No consideremos ninguna fuerza externa, como gravedad, campo eléctrico,... Los choques de las moléculas con esta masa se estima ocurren cada 10^{-14} segundos. Además son impredecibles, las moléculas cambian su dirección de movimiento en forma aleatoria. Como las asociamos a un modelo de un gas perfecto, tienen una distribución Maxwelliana de velocidades. A partir de estas características que hemos asociado al medio, no es difícil aceptar que la fuerza promedio que actúa sobre la molécula es nula.

Para calcular este valor medio debemos considerar un gran número de sistemas (un ensemble), todos iguales y cada uno recibiendo el impulso de una fuerza fluctuante.

Sin embargo algo sabemos acerca de este sistema, la partícula no puede navegar en una dirección determinada, puede alejarse de su punto de partida pero tarde o temprano se ubica en una vecindad del punto de origen. Para incluir esta observación en el modelo, la fuerza \mathcal{F} se descompone en una parte fluctuante y otra proporcional a la velocidad relativa al gas, cuyo centro de masa se encuentra en reposo. Este término puede ser determinado a partir de las ecuaciones de un fluido, cuando la masa de una esfera (por ejemplo) se desplaza con respecto a este medio. Es la viscosidad de Stokes.

El movimiento de una partícula en un fluido, está descrito por $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, donde hemos considerado sólo una dimensión para simplificar el problema. De acuerdo al modelo propuesto, esta ecuación se transforma en:

$$m_{\text{ef}} \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu \frac{dx}{dt} + F_{\text{ext}}. \quad (\text{II.63})$$

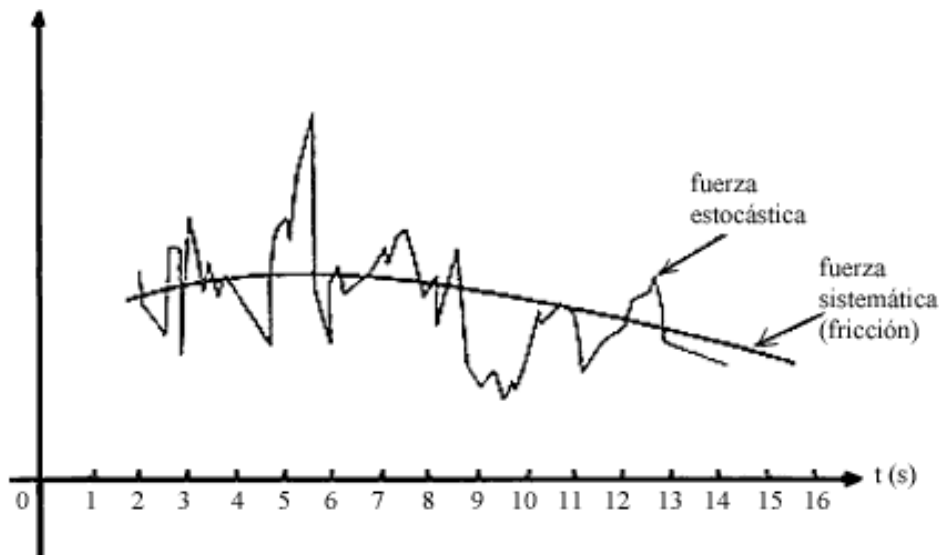


Figura II.13: *Gráfico de una fuerza estocástica.*

Donde consideramos una masa efectiva de inercia y μ representa la resistencia

media del fluido al movimiento del objeto en una cierta direccin. Esta derivación pertenece a Langevin.

Con este cálculo lograremos conectar el valor cuadrático medio de la posición: \bar{x}^2 , que puede ser medido en forma experimental, con otros parámetros del gas como el valor de la constante de Boltzmann o N , el número de Avogadro.

En un cálculo similar podemos relacionarlo con el problema del borracho que avanza una distancia \vec{L} en cada paso y que apunta en una dirección arbitraria en cada paso que efectúa.

$$\langle R^2 \rangle = \alpha t \quad (\text{II.64})$$

este valor se obtiene a partir de $R_{N+1}^2 = (R_N + L)^2$, donde L es el largo del paso que puede dar un individuo hacia adelante o atrás (en el caso unidimensional) [[9]]. Si tomamos el valor medio de esta cantidad, obtenemos el resultado mencionado (II.64), recordando que $\langle R \rangle = 0$.

Volviend a la ecuación (II.63), multiplicándola por x y tomando valores medios, obtenemos:

$$m \langle x \frac{d^2x}{dt^2} \rangle + \mu \langle x \frac{dx}{dt} \rangle = \langle x F(t) \rangle. \quad (\text{II.65})$$

Como no existe correlación entre x y $F(t)$, entonces

$$\langle x F(t) \rangle = \langle x(t) \rangle \langle F(t) \rangle = 0, \text{ porque } \langle F(t) \rangle = 0.$$

De este modo, tenemos:

$$m \langle x \frac{d^2x}{dt^2} \rangle + \mu \langle x \frac{dx}{dt} \rangle = 0 \quad (\text{II.66})$$

Por otra parte, podemos verificar que:

$$m x \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left[x \frac{dx}{dt} \right] - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$

reemplazando en la ecuación [II.66] y recordando que $m \langle \dot{x}^2 \rangle = k T$, por el principio de equipartición de la energía, llegamos al siguiente resultado:

$$m \langle \frac{d}{dt} \left[x \frac{dx}{dt} \right] \rangle - m \langle \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \rangle + \mu \langle x \frac{dx}{dt} \rangle = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle + \frac{\mu}{m} \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle = \frac{kT}{m}, \quad (\text{II.67})$$

donde incorporamos el término kT en la ecuación.

Si consideramos $\left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle$ como una función del tiempo, esta ecuación diferencial tiene una solución homogénea y una particular. Éstas son:

$$\left\langle x \dot{x} \right\rangle = C e^{-\frac{\mu}{m} t} + \frac{kT}{\mu},$$

imponiendo las condiciones iniciales $t = 0, x = 0 \Rightarrow C = -\frac{kT}{\mu}$, la solución es:

$$\left\langle x \dot{x} \right\rangle = \frac{kT}{\mu} [1 - \exp[-\frac{\mu}{m} t]]. \quad (\text{II.68})$$

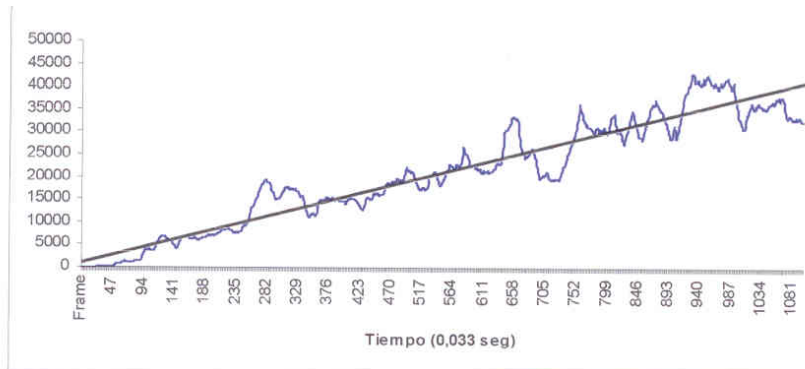


Figura II.14: Este gráfico agrupa los resultados de varios grupos acerca del mismo experimento. Es posible apreciar que en promedio existe una relación lineal entre la distancia y el tiempo transcurrido. Gentileza del Profesor Nicolás Mujica y su Ayudantes.

Aún es posible integrar una vez más esta ecuación. Recordemos que la derivada puede salir fuera del promedio del ensemble, de este modo tenemos que: $\left\langle x \dot{x} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle x^2 \right\rangle$. Reemplazando en [II.68], tenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle x^2 \right\rangle = \frac{kT}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{m} t})$$

y tomando $\langle x^2(t=0) \rangle = 0$, tenemos

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2kT}{\mu} \left[t - \frac{1}{\left(\frac{\mu}{m}\right)} (1 - e^{-\frac{\mu t}{m}}) \right]. \quad (\text{II.69})$$

Examinemos los casos límites de esta ecuación:

$$\text{si } \frac{\mu t}{m} \ll 1 \Rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{kT}{m} t^2,$$

en tiempos mucho mayores, se tiene:

$$\frac{\mu t}{m} \gg 1 \Rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{2kT}{\mu} t.$$

De esta última ecuación, obtenemos la expresión para α que instalamos en el cálculo de $\langle R^2 \rangle$ [II.64].

$$\langle R^2 \rangle = \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{2kT}{\mu}.$$

Si realizamos una serie de experimentos similares y, como resultado, obtenemos con una batería de valores para R^2 , la posición de la partícula después de un intervalo t , fijo, entonces conocemos su promedio cuadrático $\langle R^2 \rangle$. A partir de este resultado podemos evaluar la constante de Boltzman k , si hemos evaluado en forma independiente la viscosidad μ . Con este experimento hemos obtenido un valor para la constante de difusión α .

II.7.3. Procesos Estocásticos: una revisión.

En estos procesos recurriremos a una ecuación del tipo:

$$X(t + dt) = X(t) + A(X(t), t)dt \quad (\text{II.70})$$

con $dt \in [0, \epsilon]$, $\epsilon \ll 1$. de forma que considerar términos proporcionales a $(dt)^2$ o superiores sea innecesario por ser muy pequeños.

Esta expresión es determinista, dado $x(t)$, podemos conocer $x(t + dt)$. Es continua, en el sentido que $dt \rightarrow 0$ $x(t + dt) \rightarrow x(t)$. No tiene memoria puesto que $x(t + dt)$ no depende los valores de $x(t)$ previos a t .

Trabajaremos con una generalización de la ecuación (II.63), donde $x(t)$ representa un proceso estocástico en lugar de uno determinista.

Un proceso continuo, sin memoria y estocástico se denomina un **proceso de Markov**.

Para un proceso de este tipo nosotros podemos asignarle probabilidades definitivas a todos los valores de $x(t + dt)$ si conocemos dt , t y $x(t)$. Estas probabilidades no se pueden mejorar si conocemos los valores previos de $x(t)$ antes del instante t .

Variables Aleatorias

Definir el promedio de la función h con respecto a la variable aleatoria Y , como

$$\langle h(Y) \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h(y^{(i)}),$$

donde $y^{(i)}$ es el valor obtenido en el muestreo i -ésimo y $\langle \rangle$ representa el promedio. $\langle Y^k \rangle$ es el momento k -ésimo de Y .

De todas las posibles variables aleatorias Y , la más importante y usada es la **normal** o (Gaussiana)

$$Y = \mathcal{N}(m, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

$\langle Y \rangle = m$ y la variación $\langle (Y - \langle Y \rangle)^2 \rangle = \sigma^2$.

Para la distribución normal se puede demostrar que

$$\alpha + \beta \mathcal{N}(m, \sigma^2) = \mathcal{N}(\alpha + \beta m, \beta^2 \sigma^2)$$

$$N \equiv \mathcal{N}(0, 1) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

$$\alpha + \beta N = \mathcal{N}(\alpha, \beta^2).$$

cualquier combinación lineal de variables aleatorias normales, estadísticamente independientes, es normal

$$\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) + \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Teorema del límite central: la suma de K variables aleatorias, estadísticamente independientes (pero no necesariamente normales) con promedios y variancias finitas, se acerca a una variable aleatoria normal en el límite $K \rightarrow \infty$.

II.7.4. Ecuación de Langevin

Un proceso estocástico X es una variable aleatoria cuya función densidad depende paramétricamente en t ; así ; si t_1 y t_2 son dos instantes diferentes, entonces $x(t_1)$ y $x(t_2)$ son en general dos variables aleatorias independientes. $X(t)$ es un proceso estocástico sí y sólo sí:

- i.- $Z(x; X, t) \equiv X(t + dt) - X(t)$
depende sólo de dt , t y del valor de $X(t)$ en t .
- ii.- $Z(dt; X, t)$ depende suavemente de t , dt y $X(t)$.
- iii.- $Z(dt, X, t)$ es continua. $Z \rightarrow 0$ si $dt \rightarrow 0$.

Teorema : Bajo las condiciones i.-, ii.- y iii.- en un proceso continuo de Markov, se tiene

$$Z(dt; X, t) = A(x, t)dt + D^{1/2}(x, t)N(t)\sqrt{dt}.$$

Dividiendo por dt y usando las propiedades de $N(t)$ se tiene una generalización de la ecuación inicial (II.63) :

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(X(t), t) + D^{1/2}(X(t), t)\Gamma(t).$$

Esta es la ecuación de Langevin (con ruido blanco), donde se cumple que: $\langle \Gamma(t) \rangle = 0$

$$\langle \Gamma(t)\Gamma(t + t') \rangle = \delta(t')$$

$$\langle N(t) \rangle = 0$$

$$\langle N^2(t) \rangle = 1$$

$$\langle x(t')N(t) \rangle = 0, \text{ para todo } t' \leq t.$$

Ejemplo

En el circuito de la figura los electrones de conducción del metal interactúan con la red atómica del cristal que vibra en forma térmica. Estos choques originan

una fuerza electromotriz en el circuito denomina fuerza electromotriz (emf térmica). (Este es el Ruido de Johnson : J. B. Johnson "Thermal agitation of electricity in conductors" Phys. Rev. 32, 97 - 109 (1928).)

Físicamente podemos argumentar que la emf (fuerza electromotriz) térmica puede ser considerada como la suma de dos emf separadas: una emf resistiva y otra emf aleatoria. La resistiva, se opone al movimiento relativo de los electrones y corresponde a la ley de Ohm $RI(t)$. La diferencia de potencial instantáneo corresponde al movimiento aleatorio de los electrones debido a que están en equilibrio térmico con la red. Este vibrar de los electrones genera fluctuaciones en la densidad de electrones y de esta forma genera un campo, muy débil, que actúa como generador en el circuito.

$$L \frac{dI}{dt} = -RI + v(t) \quad (II.71)$$

$$v(t) \equiv C^{1/2} \Gamma(t)$$

Determinaremos C. La solución de la ecuación II.71 es:

$$I(t) = I(0)e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{1}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} \int_0^t e^{\frac{Rt'}{L}} v(t') dt'$$

Si tomamos el valor promedio, tenemos

$$\langle I(t) \rangle = \langle I(0) \rangle e^{-Rt/L}$$

dado que $\langle v(t') \rangle = 0$.

La corriente promedio tiende a cero con $t \rightarrow \infty$.

Recordemos que $\langle \rangle$ significa tomar el promedio de muchos experimentos con distintos $J(0)$.

¿Qué sucede con el promedio al cuadrado? Como no existe correlación entre $I(0)$ y $v(t)$, entonces $\langle I(0)v(t) \rangle = 0$ si $t > 0$. La solución de la ecuación es:

$$\begin{aligned} \langle I^2(t) \rangle &= \langle I^2(0) \rangle e^{-\frac{2Rt}{L}} + \\ &\quad \frac{1}{L^2} e^{-\frac{2Rt}{L}} \int_0^t \int_0^t e^{\frac{R}{L}(t'+t'')} \langle v(t')v(t'') \rangle dt' dt'' \end{aligned} \quad (II.72)$$

introduciendo los resultados de la sección anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle v(t')v(t'') \rangle &= C^2 \langle \Gamma(t')\Gamma(t'') \rangle \\ &= C^2 \delta(t' - t'') \end{aligned}$$

$$\langle I^2(t) \rangle = \langle I^2(0) \rangle e^{-\frac{2Rt}{L}} + \frac{1}{2RL} (1 - e^{-\frac{2Rt}{L}}) C^2. \quad (\text{II.73})$$

Si $t \rightarrow \infty$

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2RL} C^2$$

Pero la energía almacenada en promedio en la inductancia

$$\langle E_L \rangle = \frac{1}{2} L \langle I^2 \rangle$$

En equilibrio térmico, esta energía debe ser la energía promedio en la resistencia, que tiene un origen térmico

$$\frac{1}{2} L \langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$$

De aquí podemos determinar el valor de C

$$\frac{1}{2} \langle I^2 \rangle = \frac{C^2}{4R} = \frac{1}{2} kT$$

$$C^2 = 2kT \cdot R$$

$$\left[\frac{1}{2} \frac{C^2}{R} \right] \equiv \text{Energía}$$

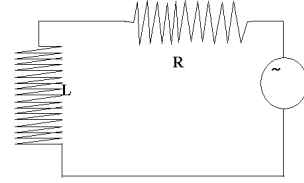


Figura II.15: La resistencia R y la inductancia L , son ideales. El ruido lo proporciona el generador.

II.7.5. Movimiento Perpetuo de Segunda Especie

La pregunta es: ¿Podemos extraer energía del movimiento térmico de las moléculas, para generar un móvil perpetuo de segunda especie? De ser esto posible, estaríamos violando la Segunda Ley de la Termodinámica porque generaríamos trabajo desde una fuente de calor manteniendo todo el sistema a la misma temperatura [10].

Por ejemplo, considere una caja con un gas ideal en equilibrio térmico a una temperatura T . Dentro de la caja existe una serie de paletas unidas a un eje que a

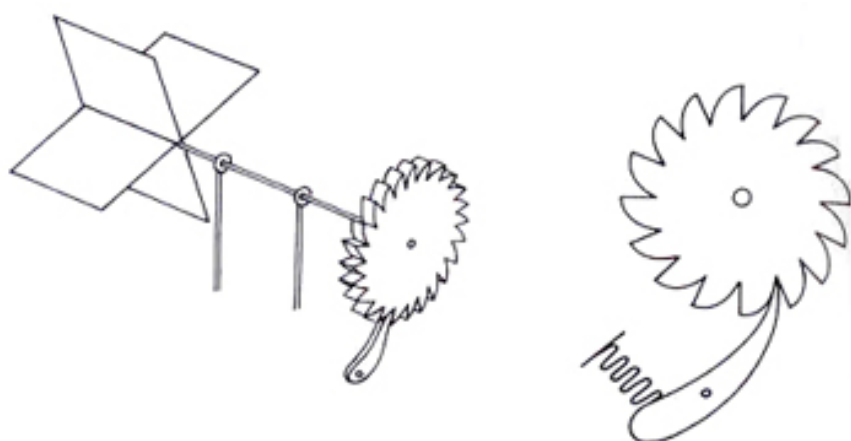


Figura II.16:

su vez se conecta con una rueda que, por la forma de sus dientes, sólo puede girar en un solo sentido.

Al estar en equilibrio térmico las moléculas chocan en ambos lados de la paleta. Debido a las fluctuaciones del ángulo de giro $\langle \theta^2 \rangle$, en algún instante se produce un torque a favor de los dientes del engranaje y ésta gira. Cuando la fluctuación ocurren en sentido opuesto al preferido por los dientes del engranaje, la traba impide el giro al trabarse en el diente. De esta manera podemos obtener energía del gas. la rueda puede girar en un sentido y puede ser utilizada, por ejemplo para levantar un peso.

De acuerdo a la hipótesis de Carnot, este motor no funcionará. No es posible extraer trabajo del calor mediante un proceso cíclico, si no existen dos fuentes a temperatura diferente.

El diente que impide el retroceso del engranaje debe tener un resorte que lo mantiene tocando al engranaje. En cada salto, este diente al retornar al engranaje choca y rebota. Si en el intervalo que sucede este fenómeno, sucede que una fluctuación hace retornar la rueda, lo puede hacer puesto que la traba no está en su lugar. No hay un giro neto entonces.

Si suponemos que existe disipación, por ejemplo en el resorte, al extenderse y contraerse su temperatura aumentará y eventualmente su propia fluctuación debido a esta temperatura levantará el resorte y permitirá que la rotación neta se anule.

Una discusión ms detallada incluyendo otras alternativas aparece en la Sección 46 del libro de Feynman [9].

II.8. Ejercicios

- 1.- Desarrollando en serie de potencias el integrando del período II.6, obtenga los tres primeros términos de la integral.

$$T = \frac{4}{\omega_o} \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}} = \frac{4}{\omega_o} \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^4 k^4 + \dots \right].$$

- 2.- Utilizando la fórmula $\omega = \omega_o (1 - C^2/8)$, puede predecir la frecuencia de un oscilador con un error menor que 0,1 % si la amplitud vale a) 5° , b) 50° ?

- 3.- Uno de los resultados de la teoría de relatividad de Albert Einstein es la ecuación de movimiento de una partícula de luz(fotón) viajando en un campo gravitacional generado por una masa M . Esta ecuación está dada por $d^2\mu/d\phi^2 + \mu = 3\mu^2$

Donde $\mu = K/r$ (es una cantidad sin dimensiones); con $r = r(\phi)$, son las coordenadas polares de la partícula de luz , considerando a la masa M_\odot (masa del Sol) como origen del sistema de coordenadas. La perpendicular trazada desde M a la línea recta que representa la trayectoria de un fotón que no experimenta desviación alguna debido al campo gravitacional de M , es la distancia d .

- i) Considere la curva $r \sin\phi = d$, con $d = \text{constante}$.
 - a) ¿A qué corresponde?
 - b) Grafíquela. Qué representa la cantidad d ?
- ii) Obtenga la desviación angular de la luz. Para ello resuelva la ecuación de movimiento usando aproximaciones sucesivas hasta el primer orden. Es decir, considere: $\mu = \mu_o + \mu_1$

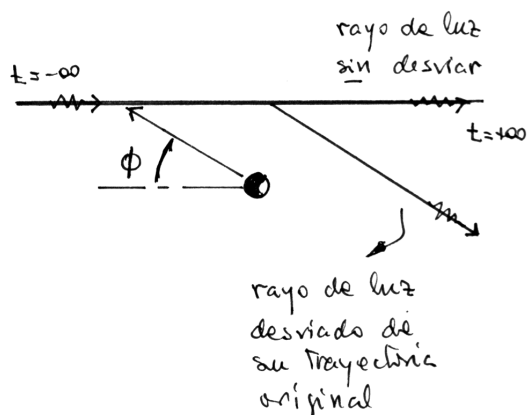


Figura II.17:

Suponga que la luz proviene desde el infinito como muestra la figura.

Obtenga la solución de orden cero, μ_0 de la ecuación para μ . (Para evaluar una constante de integración use la condición que en $t = -\infty$, $r = \infty$, $\phi = 0$. Ahora interprete geoméricamente la solución μ_0 y use esta interpretación para evaluar la otra constante de integración.

Con qué ángulo ϕ_f emerge la luz al otro extremo de su recorrido en esta aproximación de orden cero? Inserte la solución de orden cero μ_0 en el término perturbativo $3\mu^2$, del lado derecho de la ecuación de movimiento y resuelva la ecuación para $\mu = \mu_0 + \mu_1$.

Una vez obtenida la solución $\mu = \mu_0(\phi) + \mu_1(\phi)$. Evalúe la desviación de la luz en $r = \infty$. Para ello introduzca $\phi = \phi_f + \Delta\phi$.

(Donde ϕ_f es el ángulo que usted determinó anteriormente).

¿Qué significa $\Delta\phi$? Grafique. Suponga que $\Delta\phi \ll 1$.

Use el hecho que $\sin(\Delta\phi) \sim \Delta\phi$ si $\Delta\phi \ll 1$.

Obtenga la desviación angular $\Delta\phi$.

Puede resolver en forma exacta la ecuación de movimiento del fotón tal como fue planteada? Recuerde que la ecuación es ya una aproximación de la ecuación original.

- 4.- El oscilador de la figura consiste de una masa m sostenida por un resorte sin masa y con constante k y, unida a él, un hilo sin masa y que no transmite

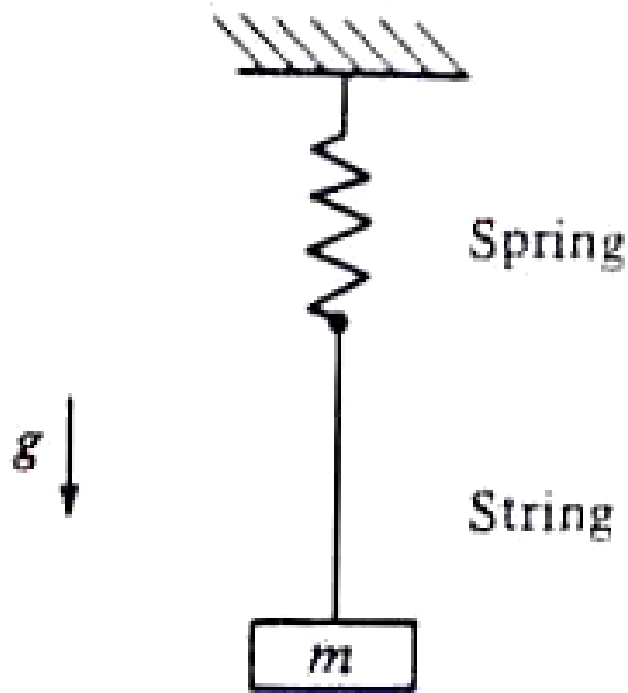


Figura II.18:

compresión.

i.- Dibuje el diagrama de fase de este movimiento.

ii.- Determine el período de oscilación de este movimiento para una amplitud arbitraria.

- 5.- Dos resortes sin masa, idénticos y de constante de rigidez k , están soportados desde los puntos A y B, separados por una distancia 2ℓ . Cuando adoptan su largo natural tienen un largo $s_0 = \ell(1 + \alpha)$. Estn unidos en el extremo mediante un pasador sin roce que a su vez soporta una masa m que se mueve -sin roce-, en la dirección vertical EF. Desprecie el peso de esta masa.

i.- Obtenga la ecuación diferencial del movimiento y expésela en una variable adimensional, como $x = q/\ell$.

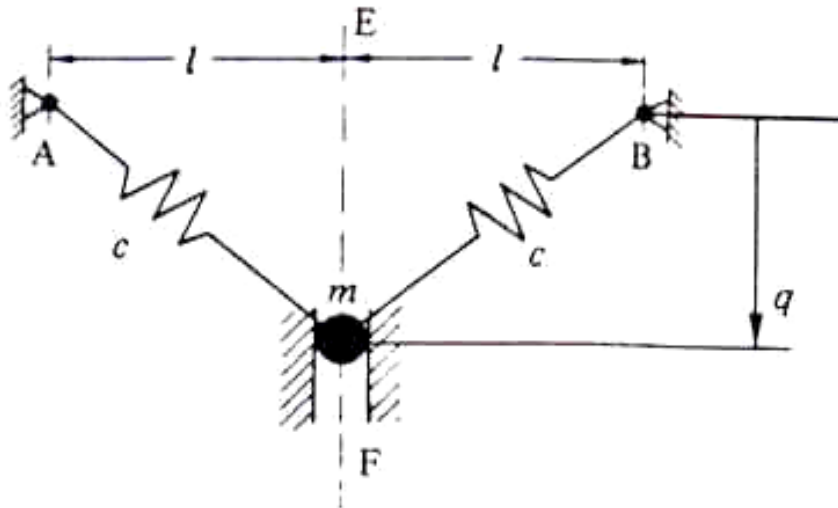


Figura II.19:

ii.- Obtenga la fuerza de restitución (en la dirección EF) como una función de x , para los siguientes valores del parámetro α : $-0,5$, 0 y $0,5$. Para qué valores de α una linealización alrededor de $q = 0$, carece de sentido?

iii.- Dibuje el diagrama de fase para los tres valores indicados de α .

6.- Use teoría de perturbaciones para obtener la solución de la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} + \omega^2 (x + \beta x^2) = P \cos(\Omega t)$$

.

7.- Demuestre que la aproximación a primer orden para el sistema

$$\ddot{\psi} = -(1 + \alpha \psi^2)\psi, \quad (|\alpha \psi^2| \ll 1),$$

$$|F| = (1 + \alpha \psi^2)|\psi|$$

se cumple que:

$$\begin{aligned}\psi &= A(\cos \omega_f t + \varepsilon \cos 3\omega_f t \cdots) \\ \omega_f &= \omega_o(1 + \frac{3}{8}\alpha A^2) \\ \varepsilon &= \frac{1}{32}\alpha A^2 \\ \langle \psi \rangle &= \text{promedio temporal} = 0\end{aligned}$$

8.– Demuestre, utilizando la misma aproximación anterior, que en el sistema

$$\begin{aligned}\ddot{\psi} &= -(1 + \beta \psi)\psi, \quad (|\beta \psi| \ll 1) \\ |F| &= |1 + \beta \psi||\psi|\end{aligned}$$

Se cumple que:

$$\begin{aligned}\psi &= A_o + A(\cos \omega_f t + \eta \cos 2\omega_f t + \cdots) \\ \omega_f &= \omega_o \quad \text{donde hemos usado } \omega_o = 1 \\ \eta &= \frac{1}{6}\beta A \\ \langle \psi \rangle &= A_o \simeq -\frac{1}{2}\beta A^2\end{aligned}$$

Estas expresiones se obtienen incorporando en la ecuación diferencial, la solución propuesta para ψ . Igualando a cero los coeficientes que multiplican a cada uno de los armónicos, se obtiene la expresión para η y ω_f , eliminando los términos de orden superior.

Términos del orden de $(\beta A)^2$, η^2 y $\eta \beta A$, son comparativamente muy pequeños y nos son considerados en la expresión.

Note que debido a que el potencial no es simétrico, debe aparecer una constante en la solución. Este término es el que indica la posición de reposo de la partícula en este potencial. En el caso de un resorte (oscilador lineal) en un campo gravitacional corresponde al nuevo punto de equilibrio.

9.– Considere una cuerda ideal (sin masa) en uno de cuyos extremos se encuentra atada una masa m que oscila en un plano vertical. La cuerda pasa a través de un orificio instalado en una superficie horizontal. En el extremo opuesto al de la masa, un agente externo levanta *lentamente* la cuerda (a través del orificio) con velocidad constante v_o . Encuentre la variación que experimenta el período del péndulo a medida que se acorta su largo. Compare este valor con la variación de la energía del péndulo.

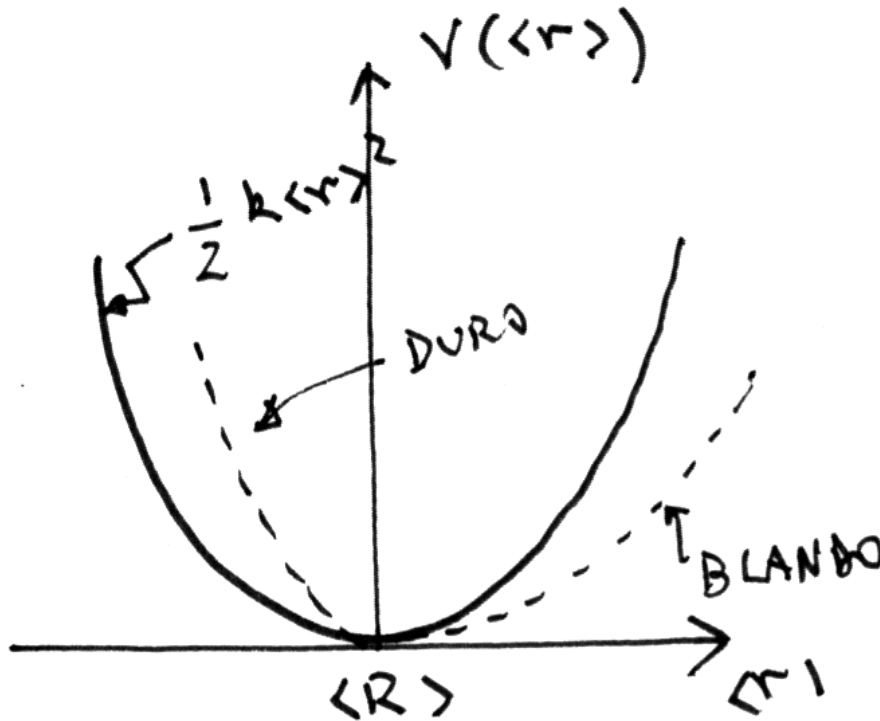


Figura II.20:

10.- Expansión térmica de sólidos

La expansión térmica de un sólido puede ser entendida en función de la fuerza no lineal que actúa entre los átomos.

La fuerza entre los iones de un sólido -como por ejemplo el KCl-, es *asimétrica* con respecto al punto de equilibrio en el siguiente sentido: es menor que kx al alejar los dos iones pero es mayor que kx al acercarlos.

Esta fuerza puede ser modelada mediante la siguiente expresión: $(1 + \beta\psi)\psi$, donde $\beta < 0$. Se ha definido el tiempo de forma tal que absorbe las constantes m y ω_0 . Usando este modelo es posible calcular la distancia media entre iones vecinos.

$\langle r \rangle = R - \langle \psi \rangle$ ψ es el desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio, donde F es nula ($r = R$)

$$\langle r \rangle = R - \frac{1}{2} \beta A^2$$

La no linealidad es muy pequeña, de modo que la energía puede calcularse tomando los términos lineales solamente, de modo que: $E_o = \frac{1}{2} A^2$, donde ($F = -\frac{\partial V}{\partial \psi}$, de donde puede despejarse la energía potencial)

Escribiendo $\langle r \rangle$ en función de E_o tenemos:

$$\langle r \rangle \simeq R - \beta E_o.$$

Para un oscilador unidimensional en equilibrio térmico a temperatura absoluta T , la energía³ es $E_o = k T$, donde k es la constante de Boltzmann:

$$\langle r \rangle = R - \beta k T, \quad \frac{d \langle r \rangle}{d T} = -\beta k \quad \beta < 0,$$

estas expresiones permiten modelar la expansión térmica de un sólido.

El valor de β puede ser encontrado a partir del potencial de la fuerza correspondiente. Como se indica en el siguiente problema.

11.- Muestre que en el problema anterior

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\left. \frac{d^3 V(\psi)}{d \psi^3} \right|_R}{\left. \frac{d^2 V(\psi)}{d \psi^2} \right|_R}$$

De esta forma, conociendo el potencial interiónico podemos determinar el coeficiente de dilatación lineal térmico.

Suponga un potencial

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r} \left[\frac{1}{9} \left(\frac{R}{r} \right)^8 - 1 \right].$$

a.- A partir de esta expresión obtenga β mediante la fórmula anterior.

³Por el Teorema de equipartición de la energía, cada grado de libertad de un sistema contribuye con $kT/2$ al promedio de energía, por cada partícula en el sistema. Una partícula vibrando posee dos grados de libertad: uno cinético y otro potencial. De allí el valor de la energía es kT

b.- Haga un desarrollo en serie de Taylor del potencial $V(r)$ en torno a $r = R$. A partir de este desarrollo, manteniendo los términos de orden más bajo, obtenga la expresión para la fuerza $F = -(1 + \beta \psi) \psi$. Identificando los términos relevantes obtenga el coeficiente de expansión térmica β .

De acuerdo a las tablas de valores, el cloruro de potasio KCl, tiene una distancia media entre iones de $\langle r \rangle = 0,315\text{nm}$ a temperatura ambiente. De acuerdo a la fórmula obtenida en este problema, el espaciado debería aumentar $4,8 \times 10^{-6}\text{nm}$ por cada aumento de grado Kelvin de temperatura. Los experimentos dan un valor que es $1/4$ del medido experimentalmente. Para mejorar el modelo es preciso incluir términos adicionales provenientes de la influencia de iones más lejanos.

- 12.- Un péndulo simple se hace oscilar con una amplitud inicial de 45°
- a) Calcule su frecuencia en terminos de ν_0 , la frecuencia correspondiente a las pequeñas oscilaciones.
 - b) La amplitud decrece gradualmente como consecuencia de la disipación de energía interna en el resorte, con lo que la frecuencia va creciendo hacia el valor ν_0 . Obtenga la amplitud del movimiento en el momento en que la frecuencia vale $0,990 \nu_0$. Asuma que el amortiguamiento afecta a la frecuencia sólo a través de la variación de la amplitud.
- 13.- Un objeto de masa M se ubica sobre una correa transportadora que se mueve con una rapidez V . Este objeto está atado a un resorte de rigidez k que se mantiene fijo en el extremo opuesto. La fuerza de fricción entre el objeto y la correa transportadora se caracteriza por los coeficientes $\mu_{\text{estático}}$ y $\mu_{\text{dinámico}}$, tal que $\mu_{\text{est}} \leq \mu_{\text{din}}$, de acuerdo con la ley de Coulomb-Euler. Describa el movimiento de la masa m sobre la correa. Suponga que la fuerza de roce dinámico es constante. Dibuje la trayectoria en el espacio velocidad versus posición. Indique cómo evoluciona esta trayectoria en el espacio de fase en el tiempo.
- 14.- En la figura aparece un par de resortes idénticos unidos, en uno de los extremos, a una rótula fija y a una masa m en el centro. La masa puede deslizarse, sin roce, sobre una barra horizontal. (No considere g).
- a.-De acuerdo a los datos indicados en la figura, escriba la ecuación de

movimiento de la masa m . Utilice x , como la variable dinámica. No suponga oscilaciones pequeñas. Es conveniente utilizar variables adimensionales para trabajar en forma general: $z = x/a$ y $\lambda = l/a$. Use $\omega_0^2 = k/m$.

b.-Suponga $\lambda < 1$ y desarrolle en serie de Taylor hasta potencias de z^3 , alrededor del origen. Encuentre la solución para la parte lineal de esta ecuación.

c.-Encuentre la perturbación a primer orden (incluyendo el término cúbico) de la ecuación de la parte b. Determine la amplitud y el cambio en la frecuencia. Suponga que inicialmente parte desde el reposo y con $x/a = A$.

d.- Qué característica presenta la ecuación de movimiento si $\lambda = 1$. Indique cómo Ud. resolvería este caso. Calcule el período.

- 15.- Para una oscilación gobernada por una fuerza cuadrática de la forma $F = -(1 - \beta \psi) \psi$, muestre que la diferencia de recorrido hacia el lado *blando* (bajo kx) con respecto al recorrido hacia el lado *duro* (sobre kx) vale $\frac{2}{3} \beta A^2$.

- 16.- A partir del potencial interiónico:

$$V(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{B}{r\rho} \quad B \text{ y } \rho > 0,$$

a) Muestre que $\beta R = -(\rho^2 + 3\rho - 4)/[2(\rho - 1)]$ con el parámetro β definido como en los problemas anteriores y R corresponde al mínimo del potencial.

- 17.- Una aproximación usada, para el potencial entre átomos neutros o moléculas tiene la forma

$$V(r) = W \left[-2 \left(\frac{R}{r} \right)^6 + \left(\frac{R}{r} \right)^{12} \right]$$

donde R es el largo del enlace y W una constante con dimensiones de energía.

- a) Demuestre que $R^2 = 72 W$ y $\beta R = -10,5$
- b) Muestre que la distancia media entre dos átomos se incrementa en una fracción $0.15 k/W$ por cada grado Kelvin que aumenta la temperatura. k es la constante de Boltzmann.
- c) El coeficiente de expansión lineal de un cierto sólido es $0,001 \text{ [K}^{-1}\text{]}$. Estime W para el potencial entre dos átomos.

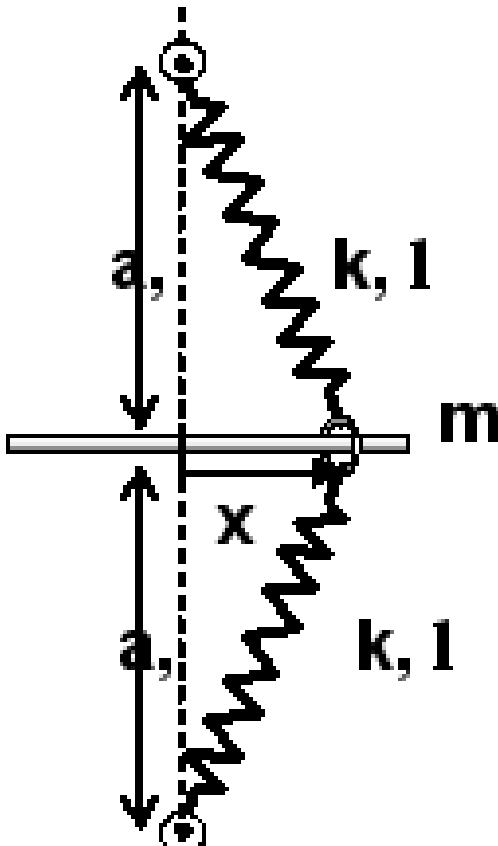


Figura II.21:

18.– Estudiemos la oscilación de un resorte de constante k con masa no nula.

Considere una masa M se sujeta al extremo de un resorte de masa m y rigidez k . El largo inicial del resorte es ℓ_0 .

Calcule la frecuencia de oscilación de este resorte. Utilice la siguiente aproximación: la velocidad de cada elemento de resorte es proporcional a su distancia del origen. Suponga (este no corresponde a la realidad) que el resorte se estira uniformemente.

- 19.– a.- La fase de una onda es relevante en muchos problemas de física e ingeniería. ¿Cuál es el resultado de sumar n armónicos, cada uno desfasado en δ del anterior?

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a| \sin(\varphi + k\delta)$$

b.- la onda proveniente de una ampolla no es coherente, incluso suponiendo que emite en una sola longitud de onda, cada una de ellas tiene, con respecto a la inmediatamente anterior, una fase arbitraria, puesto que no son emitidas simultáneamente, como sucedería en un rayo láser.

¿Qué sucede con la suma del efecto de un conjunto de ondas, si la fase de cada oscilador es aleatoria?

$$\left[\sum_{k=0}^{n-1} |a| \sin \phi_k \right]^2 = ? \quad \phi_k \in (0, 2\pi)$$

- 20.– El péndulo cicloide consiste en un péndulo matemático (una cuerda sin masa y una esferita de masa m en el extremo que oscila debido a la gravedad) rodeado por dos cicloides que limitan la amplitud de oscilación del péndulo. Demuestre que el período está determinado por:

$$T = 4\pi \sqrt{a/g}.$$

a es el radio que genera la cicloide.
(Ver [17].)

II.9. Ejemplos Resueltos

Vibraciones Acústicas

[14]

Considere el sonido característico que se genera al descorchar una botella. El sonido debe provenir, sin duda, de la oscilación de una columna de aire en la botella.

Para resolver este problema haremos algunas suposiciones.

El aire en el cuerpo de la botella se comprime y dilata (como un resorte).
El aire en el cuello de la botella, lo supondremos incompresible (Esta es una aproximación cruda).

La ecuación de Newton para el volumen de aire en el cuello dela botella es:

$$(\ell \alpha \rho) \ddot{Z} = -\alpha \cdot p' = -\alpha p + \alpha p_o$$

donde ℓ es el largo del cuello de la botella, α el radio y ρ es la densidad. Por otra parte p' es la diferencia de presión entre el interior de la botella y la presión externa $p' = p_{\text{interior}} - p_{\text{atmosférica}}$. Este último término NO es relevante para el cálculo de la frecuencia propia, puesto que es una constante que se suma a la ecuación de movimiento y no altera el valor de ω_o . No lo incluiremos en los pasos siguientes.

Otro parámetro que necesitaremos es la compresibilidad del aire: $\mathcal{K} \equiv$ compresibilidad del aire, V volumen del aire.

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right) \\ \frac{\Delta v}{v} &\simeq \frac{\alpha \cdot Z}{v} \quad \mathcal{K} \equiv -\frac{1}{v} \frac{\alpha z}{p'} \\ \Rightarrow (\ell \alpha \rho) \ddot{Z} &= -\alpha \cdot \frac{\alpha Z}{v \mathcal{K}} \Rightarrow \\ \ddot{Z} &\equiv \left(\frac{\alpha}{\ell V \mathcal{K} \rho} \right) Z \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

Suponemos una compresión adiabática puesto que ocurre tan rápidamente que no alcanza a calentar el gas.

El gas encerrado es un gas ideal,por tanto:

$$pv = RT$$

El hecho que la compresión sea adiabática requiere que cumpla adicionalmente esta otra relación:

$$pV^\gamma = C^{te} = C \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$$

La densidad del gas está dada por:

$$\rho = \frac{\text{Masa molar}}{V} = \frac{M p}{R T}$$

El término que aparece en la ecuación de movimiento es

$$\rho \mathcal{K}_s = \frac{M}{\gamma R T}$$

Con esta cantidad podemos evaluar la frecuencia propia, reemplazándola en [II.74] A continuación, deduciremos esta expresión.

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{C}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{C}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \times \frac{-C}{p^2} = -\frac{V}{\gamma p}$$

$$\mathcal{K}_s = \frac{1}{\gamma p} = \frac{V}{\gamma R T} =$$

$$\rho \mathcal{K}_s = \frac{M}{\gamma R T}$$

que era la expresión buscada.

$$\omega_0 \sim \left[\frac{a}{\ell V} \left(\frac{\gamma R T}{M} \right) \right]^{1/2} \quad \omega_0 \sim \sqrt{T}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= 1,4 \\ R &= 8,3 \frac{\text{Joule}}{\text{Mol} \cdot ^\circ\text{K}}\end{aligned}$$

$$\text{Masa molar del aire} = 0,029 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

$$\begin{aligned}T &\sim 300^\circ\text{K} \\ V &= 1\text{litro} = 10^{-3}\text{m}^3 \\ a &= 1\text{cm}^2 = 10^{-4}\text{m}^2 \\ \ell &= 5 \times 10^{-2}\text{m}\end{aligned}$$

Con estos valores obtenemos

$$\omega_0 \sim 500 \text{ s}^{-1}, \text{ la frecuencia asociada es } \nu_0 \sim 80 \text{ Hz} \quad (\text{II.75})$$

Comparemos este valor con las frecuencias e notas conocidas: La $\sim 440 \text{ Hz}$, Do $\sim 261 \text{ Hz}$ y Re $^\# = 311 \text{ Hz}$.

La frecuencia obtenida corresponde a dos octavas más bajos que el Do.

Existe una página donde puede verificar los tonos correspondientes:

[http : //www.xtec.es/centres/a8019411/caixa/mesqs.htm](http://www.xtec.es/centres/a8019411/caixa/mesqs.htm)

Un ejemplo de desarrollo en serie

Para el mecanismo de tres barras de la figura, encuentre ⁴:

- a.- Las coordenadas del punto P : el punto medio de la barra BC
- b.- Demuestre que la restricción entre los ángulos θ y ϕ está dada por la ecuación $\cos(\phi + \theta) = -3 + 2(\cos \phi + \cos \theta) - 2\lambda(\sin \phi - \sin \theta)$, con $\lambda = \frac{b}{a}$

⁴Referencia: "Simple Properties of a Geometric Structure of Four-Bar Links?" Monthly, Vol 110, #6, page 482, June - July 2003.

c.- Demuestre que para ángulos pequeño, $\phi \simeq \phi + 0(\theta^3)$ hasta segundo orden de aproximación ($\sin \theta \sim \theta$, $\cos \theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$ y análogamente para ϕ), el punto P del mecanismo de Watts, se mueve (aproximadamente) en la línea vertical.

La estructura está pivoteada en los vértices A, B, C y D. A y D están fijos.

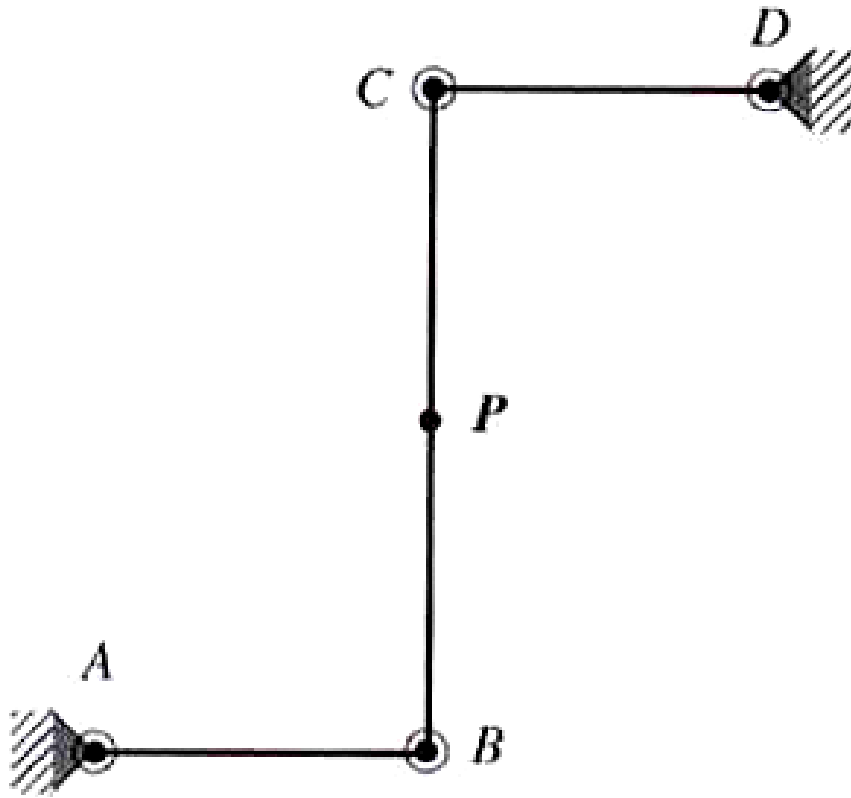


Figura II.22:

Nota. Este mecanismo fue patentado por James Watt en 1784. Lo usó en sus máquinas de vapor. Actualmente estos mecanismos han recuperado su interés por sus aplicaciones en biología y en los mecanismos para controlar los movimientos de los robots.

$$\begin{aligned}
X_P &= (X_{B'} + X_{C'})/2 = (a \cos \theta + (2a - a \cos \phi))/2 \\
X_P &= \frac{a}{2}[\cos \theta + 2 - \cos \phi] = a + \frac{a}{2}(\cos \theta - \cos \phi) \\
Y_P &= (Y_{C'} + Y_{B'})/2 = (2b + a \sin \phi + a \sin \theta)/2 \\
Y_P &= b + \frac{a}{2}(\sin \theta + \sin \phi)
\end{aligned}$$

Queda claro que si $\theta = \phi \Rightarrow X_P = a$ y el punto P se desliza sobre la vertical con coordenadas $Y_P = b + a \sin \theta$ ¿Cómo encontrar la relación entre los ángulos θ y ϕ ? Siendo rígida la barra BC, la distancia entre B y C es $2b$:

$$(X_{C'} - X_{B'})^2 + (Y_{C'} - Y_{B'})^2 = 4b^2.$$

Introduciendo en la ecuación anterior las coordenadas de cada uno de los vértices, tenemos:

$$[(2a - a \cos \phi) - a \cos \theta]^2 + [2b + a \sin \phi - a \sin \theta]^2 = 4b^2$$

$$6a^2 - 4a^2(\cos \phi + \cos \theta) + 2a^2 \cos(\phi + \theta) + 4ab(\sin \phi - \sin \theta) = 0, \quad (\text{II.76})$$

donde hemos definido $\lambda \equiv \frac{b}{a}$. De aquí se obtiene:

$$\cos(\phi + \theta) = -3 + 2(\cos \phi + \cos \theta) - 2\lambda(\sin \phi - \sin \theta)$$

En la aproximación de primer orden, $\phi \ll 1$, y $\theta \ll 1$, reemplazamos: $\cos \theta \sim 1$, $\cos \phi \sim 1$, $\sin \phi \sim \phi$ y $\sin \theta \sim \theta$. Obtenemos:

$$1 = -3 + 2(1 + 1) - 2\lambda(\phi - \theta), \quad 2\lambda(\phi - \theta) = 0 \Rightarrow \phi = \theta.$$

Si consideramos el segundo orden:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{(\phi + \theta)^2}{2} &= -3 + 2\left(1 - \frac{\phi^2}{2} + 1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - 2\lambda(\phi - \theta) \\
-\frac{\phi^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} - \frac{2\theta\phi}{2} &= -\phi^2 - \theta^2 - 2\lambda\theta \\
\frac{\phi^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} - \frac{2\theta\phi}{2} &= -2\lambda\phi + 2\lambda\theta
\end{aligned} \quad (\text{II.77})$$

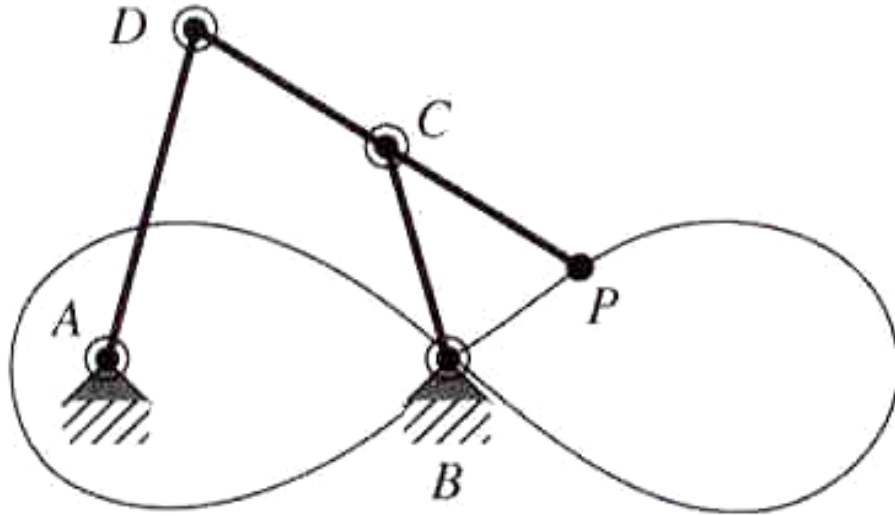


Figura II.23: Si $CD = CB$, DP es una barra rígida, $BC = CD$ y $AB = AD$, el punto P describe la lemniscata de Bernoulli

Esta última relación puede ser escrita como:

$$\phi^2 + (4\lambda - 2\theta)\phi - 4\lambda\theta + \theta^2 = 0.$$

Despejando ϕ , obtenemos:

$$\phi = \frac{1}{2}[(2\theta - 4\lambda) \pm \sqrt{(4\lambda - 2\theta)^2 - 4(\theta^2 - 4\lambda\theta)}]$$

$$\phi = \theta - 2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2}$$

$$\phi = \theta - 2\lambda \pm 2\lambda = \theta + 0(\theta^3). \quad (\text{II.78})$$

Elegimos el signo positivo para que sea compatible con la aproximación de orden cero.

Ecuación no lineal

Considere la siguiente expresión para un oscilador no lineal: $\ddot{\psi} + (1 + \beta\psi)\omega_0^2\psi = 0$, donde ω_0 es una constante característica del sistema dinámico y β un parámetro pequeño, $\beta < 1$, que nos permita enfrentar este problema usando teoría de perturbaciones.

- i.- Dibuje cualitativamente la fuerza de este oscilador versus el desplazamiento. Se recomienda que dibuje primero el caso $\beta = 0$, para tener una referencia. Utilice $|F|/\omega_0^2 = -(1 + \beta\psi)\psi$. ‘En qué región el resorte es más duro?’
- ii.- Encuentre la energía potencial asociada a este movimiento y dibuje un gráfico cualitativo. Escriba la ecuación de conservación de la energía para este movimiento.
- iii.- Si la solución a primer orden de esta ecuación es :

$$\psi(t) = A_0 + A[\cos(\omega t) + \eta \cos(2\omega t) + \dots],$$

$$\text{donde } \omega \approx \omega_0, \eta \approx \beta A/6 \text{ y } A_0 \approx -\beta A^2/2.$$

Demuestre que en esta aproximación la amplitud de oscilación de la masa hacia el lado suave de este péndulo es mayor por una cantidad $2\beta A^2/3$ a la amplitud de oscilación en el lado duro de este péndulo.

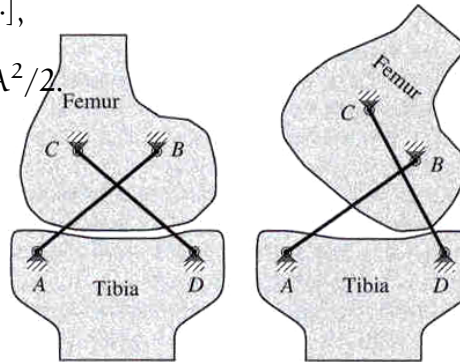


Figura II.24: Las barras cruzadas (AB y CD) representan el funcionamiento de los músculos en la rodilla del hombre.

Solución

i.- $\beta > 0$. Ver figura del problema 9 de los ejercicios.

$$\text{ii.- } V(\psi) = \frac{m}{2} \omega_0^2 (\psi^2 + \frac{2\beta}{3} \psi^3)$$

iii.-

$$\psi(t) = A_0 + A \cos \omega_0 t + \eta A \cos 2\omega_0 t$$

$$\cos^2 \omega_0 t = \cos^2 \omega_0 t - \sin^2 \omega_0 t = -1 + 2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$\psi(t) = A_0 + A \cos \omega_0 t - \eta A + 2\eta A \cos^2 \omega_0 t$$

Así es que $\psi(t)$ oscila alrededor del valor $\psi_0 = (A_0 - \eta A)$ con una velocidad angular ω_0 . Como $\cos^2 \omega_0 t$ es siempre positivo o igual a cero, el valor máximo positivo en(torno a ψ_0) es $\psi_{\max} = A + 2\eta A$. Esto ocurre para $\omega_0 t = 0, 2\pi, \dots$. El valor más negativo ocurre cuando $\omega_0 t = \pi, 3\pi/2, \dots$. De este modo $\psi_{\text{negativo}} = -A + 2\eta A$.

La diferencia entre ambos extremos es $4\eta A = 4 \frac{\beta A^2}{6} = \frac{2}{3} \beta A^2$.

Bibliografía

- [1] **Non-linear Oscillations**, P. Hagedorn, 1982. Oxford University Press.
- [2] **Mecánica**, L. D. Landau y E. M. Lifshitz, 1965, Editorial Reverté.
- [3] **Theory of Oscillations**, A. A. Andronov and C. E. Chaikin, 1949, Princeton University Press.
- [4] **Introduction to Perturbation Techniques**, 1993, A. H. Nayfeh, Wiley Classics Library
- [5] **Classical Dynamics: a contemporary approach**, J. V. José and E. J. Saletan, Cambridge University Press, 1998.
- [6] Y.K.Lee and Kelvin Hoon,
www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise95/journal/vol4/ykl/report.html
- [7] **Investigations on the Theory of the Brownian Motion**, A. Einstein, Dover, USA, 1956.
- [8] **Rozamiento a Escala Atómica**, J. Kim, Investigación y Ciencia, Diciembre 1996.
- [9] **The Feynman Lectures on Physics**, R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, Vol I, Addison -Wesley, Reading, Ma(1963).
- [10] **Fluctuations in Physical Systems**, H. L. Pécseli, Cambridge University Press, Cambridge UK, 2000.
- [11] **Theory of Vibrations with Applications**, W.T.Thomson, Prentice Hall, 1981.

- [12] **The Nature of Light and Colour** , M.Minnaert, Dover Publications Inc., New York,1954.
- [13] **Ondas**, F. S. Crawford, Berkeley Physics Course, Volume 3,Mc Graw-Hill, 1968, Massachusetts.
- [14] **Vibrations and Waves in Physics**, I. G. Main, Cambridge Press, 1984.
- [15] **Theory and Examples of Intrinsically Nonlinear Oscillators**, P. Mohazzabi, Am. J. Phys., **72** (4), April 2004.
- [16] **Sands, Powders and Grains**, J. Duran, Springer-Verlag, New York Inc.,2000.
- [17] **The Cycloidal Pendulum**, J. Brooks and S. Push, **Amer. Math. Monthly**,V 109, # 5, pag. 463.