

FISICA MODERNA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 24 de mayo de 2005

Índice general

IV. Sistemas Hamiltonianos	111
IV.1. Transformada de Legendre	112
IV.1.1. Interpretación geométrica	113
IV.1.2. Sistemas Hamiltonianos	118
IV.1.3. Sistemas Conservativos	120
IV.1.4. Definición de punto fijo	122
IV.2. Paréntesis de Poisson	131
IV.2.1. Propiedades del paréntesis de Poisson	132
IV.3. Ecuación de Liouville	135
IV.4. Transformaciones canónicas	139
IV.5. Constantes de Movimiento y la Integrabilidad del Hamiltoniano .	144
IV.5.1. Variables de Acción	144
IV.6. La acción como función de las coordenadas y el tiempo	148
IV.7. Ejercicios	157

Capítulo IV

Sistemas Hamiltonianos

Hamilton fue un hombre con una capacidad intelectual impresionante. A la edad de trece años dominaba trece idiomas. Llegó a ser profesor a los 22 años. A los 28, en 1834, ya había establecido una forma diferente de considerar la mecánica, que hasta hoy se estudia en los textos de física ([1]).

Introdujo números que no conmutaban, antes que Cayley desplegara sus matrices. Hamilton rehizo la mecánica al introducir el momentum p , y q , la posición, como sus variables fundamentales. El gráfico que tiene p como ordenada y q como abscisa se denomina el espacio de fase. La trayectoria de una partícula queda representada por una curva en este espacio, como veremos en este capítulo más adelante. Hamilton logró imitar la trayectoria de un rayo de luz introduciendo una cierta inhomogeneidad en este espacio de fase. De esta forma logró representar la trayectoria de un rayo de luz, estableciendo, de paso, un formalismo que unificó la trayectoria de los rayos de luz con la dinámica de una partícula.

Este formalismo resultó ser de gran utilidad en las investigaciones en física atómica. Simultáneamente, introdujo una expresión para la energía conocida hasta hoy como el hamiltoniano y que es una pieza central para modelar la dinámica de las partículas tanto clásicas como cuánticas.

La ventaja de los métodos hamiltonianos es su riqueza de posibilidades. A partir de las transformaciones de coordenadas $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, que preservan la estructura de las ecuaciones de hamilton -denominadas transformaciones canónicas-, es posible, como ilustraremos con un ejemplo, simplificar las ecuaciones de movimiento.

Dadas dos partículas, cuya dinámica obedece las ecuaciones de Hamilton, con condiciones iniciales q_o y p_o distintas para cada una, sus trayectorias no se cruzan en el espacio de fase, salvo en un punto fijo, donde permanecen en reposo.

IV.1. Transformada de Legendre

Examinemos el valor de la derivada total del Lagrangiano con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} L(q, \dot{q}; t) = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Si q y \dot{q} son solución de la ecuación de Euler-Lagrange, entonces la expresión anterior se simplifica:

$$\frac{dL}{dt} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right),$$

reuniendo ambas expresiones en un mismo miembro, tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) = 0. \quad (\text{IV.1})$$

El hecho que la derivada total con respecto al tiempo de la expresión $\left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right)$ sea nula, nos indica que es una *cantidad conservada* a lo largo de la trayectoria de una partícula. En las siguientes secciones mostraremos que esta cantidad se identifica con la energía asociada a un sistema mecánico. A continuación mostraremos que a partir de esta expresión es posible introducir una función que se conoce como el Hamiltoniano y que es una función que depende de q y p , $H = H(q, p)$ donde p es el momentum y está definido como:

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}.$$

$$H(q, p) \equiv \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L, \quad (\text{IV.2})$$

la cual depende sólo de las variables q y p , consideradas *independientes* entre sí.

A partir de la dependencia de $H(q, p)$ en p , q y L [IV.2], podemos encontrar las ecuaciones de movimiento de q y p . Esto es, encontrar el valor de la derivada total de q (o p) con respecto al tiempo para cada par q , p . Para encontrar esta dependencia debemos diferenciar el Hamiltoniano:

$$dH(q, p) = \frac{\partial H(q, p)}{\partial q} dq + \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} dp.$$

Por otra parte utilizando su definición IV.2:

$$H(p, q) \equiv \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \dot{q} p - L, \quad \text{y diferenciando esta última expresión, obtenemos:}$$

$$dH(q, p) = -\frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \dot{q} dp + p d\dot{q},$$

introduciendo la definición del momentum, tenemos:

$$dH(q, p) = -\dot{p} dq + \dot{q} dp.$$

Como para obtener este resultado se utilizaron las ecuaciones de movimiento, la restricción que establece la ecuación anterior entre el diferencial del Hamiltoniano y la diferencial de mano derecha, constituyen las ecuaciones de movimiento en esta nueva representación:

$$\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} = -\dot{p}, \quad (\text{IV.3})$$

$$\frac{\partial H(q, p)}{\partial p} = \dot{q}. \quad (\text{IV.4})$$

Estas son las *ecuaciones de Hamilton*.

Las definiciones y transformaciones de coordenada utilizadas en esta deducción corresponden a un método conocido como las *transformaciones de Legendre*. Este tipo de transformaciones se utiliza en otras áreas de la física como: en Termodinámica para obtener la función de Gibbs, la energía libre..etc...

IV.1.1. Interpretación geométrica

Para ilustrar este método, analicemos el caso de una transformación de Legendre en una dimensión.

La idea básica es simple: una curva definida como un par ordenado de números $[x, y]$, o expresada como una función $y = y(x)$, también puede ser definida indicando el valor de la tangente en cada punto y el punto donde esta tangente corta al eje y . En otras palabras, una curva se puede especificar mediante la ecuación de la familia de rectas tangentes a ellas, lo que se denomina su *envolvente*.

Debemos incluir el punto de intersección con el eje y puesto que existen familias de curvas diferentes que tienen la misma tangente (ver Figura).

Definamos como ψ , el punto de intersección entre la tangente y el eje de la ordenada. El punto de la figura puede estar determinado por (x, y) o, en la representación alternativa por (p, ψ) , donde p representa la *pendiente* de la curva en el punto P . La curva definida inicialmente como $y = y(x)$, puede ahora identificarse como

$$\psi = \psi(p) \quad (\text{envolvente}).$$

Veamos como relacionar ambas representaciones. De acuerdo a la definición de p , tenemos:

$$p = \frac{y - \psi}{x - 0} \Rightarrow \psi = y - x p$$

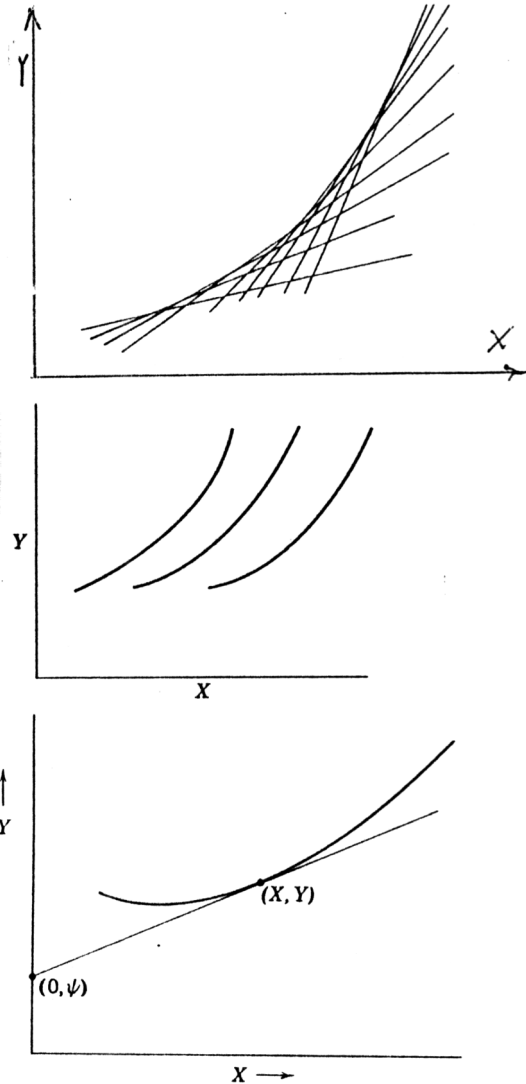


Figura IV.1: Referencia: Callen *Thermodynamics*, pág. 90 - 95.

La segunda ecuación representa la definición de ψ . Diferenciando:

$$\begin{aligned}
 d\psi &= dy - dx p - dp x \\
 \text{reemplazando } p &\equiv \frac{dy}{dx} \\
 &= p dx - dx p - dp x, \\
 d\psi &= -dp x.
 \end{aligned}$$

Esta última ecuación asegura que ψ sólo depende de la variable p : $\psi = \psi(p)$. Es posible demostrar que: $\frac{d\psi}{dp} = -x$. También es fácil apreciar que la transformación de variables $\psi = y - x p$ es -salvo un signo-, la equivalente a:

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \dot{q} p - L,$$

que genera el Hamiltoniano a partir del Lagrangiano.

TABLA DE TRANSFORMACIONES: DIRECTA e INVERSA

Dado $y = y(x)$	Dado $\psi = \psi(p)$
Defino $\psi \equiv -p x + y$	Defino $y \equiv x p + \psi$
$p \equiv \frac{dy}{dx} \implies x = x(p).$	$-x \equiv \frac{d\psi}{dp} \implies p = p(x).$
Introduciendo $x(p)$ e $y(x(p))$	Introduciendo $p(x)$ y $\psi(x)$
se obtiene $\psi = \psi(p).$	se obtiene $y = y(x).$

Ejemplo

A partir de la expresión para la energía $U = U(S, V)$, encuentre otra función F , que dependa de T y V , $F = F(T, V)$. Utilice la transformada de Legendre para realizar este cambio de variables.

Este es un ejemplo extraído de la termodinámica: S es la entropía, U la energía interna, V el volumen y T la temperatura.

$$U = U(S, V), \quad dU = T dS - p dV \quad (\text{Primera ley de la termodinámica,})$$

donde T no aparece explícitamente al derivar la función U , sino que es una función de S y V , $T = \frac{\partial U}{\partial S}$. La idea de este cambio de variables es eliminar la dependencia de la entropía que es una variable que no se puede medir. La temperatura en cambio es accesible.

De acuerdo a lo establecido con la transformación de Legendre, consideremos la siguiente función:

$$F = T S - U(S, V) \quad \text{por analogía con } \psi = y - p x$$

y entonces $dF = -dU(S, V) + T dS + S dT = S dT + p dV \Rightarrow F = F(T, V)$, que era lo buscado.

En este último ejemplo hemos trabajado con una función que depende de más de una variable: S y V . El volumen no es afectado por este cambio de variable.

Otra aproximación a la Transformada de Legendre

A continuación repetimos el argumento anterior para introducir la Transformada de Legendre. Como vimos la idea es hacer un cambio de variable, transforma una función $f(x)$ en una $g(p)$.

Consideremos el caso unidimensional donde las funciones son convexas, con segunda derivada positiva: $f''(x) > 0$. Introduzcamos una nueva función $y = p x$. Para un valor dado de x , tomemos la recta que se aleje (en un sentido que definiremos luego) de la curva $y = f(x)$, para ello definamos la función distancia $F(x, p) \equiv p x - f(x)$, como queremos que la función sea un mínimo, debemos tomar la derivada: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, de donde se obtiene $p = f'(x)$. La solución es única como se ilustra en la Figura.

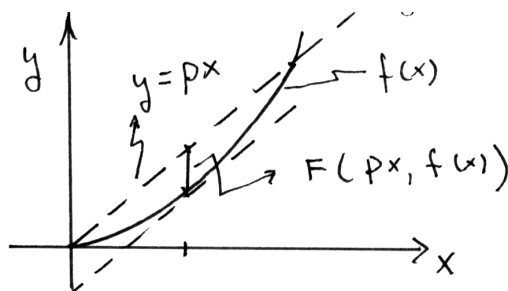


Figura IV.2: La recta que pasa por el origen es paralela a la recta tangente a la curva. La distancia entre las dos curvas toma el mismo valor que la distancia entre el origen y el punto donde la tangente a la curva corta el eje y .

De esta última ecuación podemos despejar (formalmente) la variable x en función de p : $x = x(p)$. Reemplazando este valor en la función $F(x(p), p) \equiv g(p)$ y esta es la nueva función buscada, la transformada de Legendre de $f(x)$.

Ejemplo

Encontrar la transformada de Legendre de la función x^α/α .

La función $F(x, p)$ está definida como:

$$F(x, p) = -\frac{x^\alpha}{\alpha} + px, \quad F' = -x^{\alpha-1} + p = 0,$$

despejando x en función de p , tenemos $x = p^{1/(\alpha-1)}$,

Finalmente, la transformada de Legendre es $g(p) = F(x(p), p) = \frac{p^{\alpha/(\alpha-1)}}{\alpha/(\alpha-1)}$.

Si $\alpha = 2$ vemos que la función original es $f(x) = x^2/2$, y su transformada de Legendre $g(p) = p^2/2$. Este resultado es interesante porque se aplica directamente al caso que nos interesa en física, donde la función que deseamos transformar es la energía cinética y que tiene una estructura similar v^2 . Este resultado nos indica que la transformada de Legendre tendrá la misma estructura cuadrática en los momenta. Por otro lado, la energía cinética es también una función convexa. Todo

esto indica que puede ser una buena idea realizar esta transformada de Legendre en mecánica.

Para el caso más general de muchas variables, las exigencias son: $f(\vec{x})$ convexa, es decir $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} > 0$ para todo $i, j=1, 2, \dots, N$. La condición sobre la función $g(\vec{p}) = F(\vec{p}, \vec{x}(\vec{p})) = \text{Máx de } F(\vec{p}, \vec{x})$.

En resumen, el Hamiltoniano es una forma de tratar un sistema mecánico (o cualquier otro, eléctrico, mecánica cuántica ...) en el cual, en lugar de tratar \dot{q} y q como variables dinámicas, se define el momentum p y q como variables independientes. Simultáneamente se disminuye el orden de las ecuaciones diferenciales en un grado y se duplica el número de ecuaciones diferenciales que es necesario resolver.

Este método no es necesariamente más poderoso que el Lagrangiano para encontrar la trayectoria de una partícula. En lugar de restringirse a la solución de una de las órbitas posibles del sistema, este método apunta a conocer las propiedades globales de las órbitas.

IV.1.2. Sistemas Hamiltonianos

En un sistema dinámico asociado con un Lagrangiano $L(\dot{q}_\sigma, q_\sigma, t)$ definimos el Hamiltoniano como la transformada de Legendre del Lagrangiano, donde la nueva variable introducida es el momentum p_σ , definido como:

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}, \quad (\text{IV.5})$$

las variables p_σ y q_σ se denominan *variables conjugadas*. Por otra parte el Hamiltoniano se define como:

$$H(q_\sigma, p_\sigma) \equiv \dot{q}_\sigma p_\sigma - L. \quad (\text{IV.6})$$

Finalmente, las ecuaciones de movimiento son:

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad (\text{IV.7})$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_\sigma &= -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t}.\end{aligned}\tag{IV.8}$$

La última ecuación no ha sido demostrada pero la dejamos como ejercicio propuesto.

A continuación se da una forma elemental para obtener el Hamiltoniano en un problema de mecánica en una dimensión. Obviamente los pasos que se siguen en este ejemplo están ordenados para llegar al resultado esperado de las ecuaciones IV.7.

Veamos el caso de una ecuación de segundo orden en una sola variable. Definamos $\dot{x} \equiv \dot{q}$ en la ecuación: $m \ddot{x} = F(x)$.

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad \dot{p} = F(q).$$

Las variables q y p se denominan *conjugadas*. La trayectoria de una partícula seguida en un gráfico que contiene q y p como ejes coordenados se denomina *espacio de fase*. En este formalismo p y q son variables *independientes*.

Aquí nos interesan sistemas conservativos, aquellos en los cuales existe una función:

$$F(q) = -\frac{\partial V(q)}{\partial q}, \quad \text{donde } V(q) \equiv \text{Potencial}, \quad V(q) = -\int_{q_0}^q dq' F(q').$$

Si escribimos p/m como la derivada de una cierta función:

$$\frac{p}{m} \equiv \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2}{2m} \right),$$

entonces podemos definir una nueva función $H(q, p) \equiv \frac{p^2}{2m} + V(q)$. Esta función satisface las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}.$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de **Ecuaciones de Hamilton**.

Existen diversos sistemas: físicos, biológicos, meteorológicos...etc. cuya evolución puede ser descrita por ecuaciones de este tipo.

IV.1.3. Sistemas Conservativos

Estudiemos la evolución de un Hamiltoniano que no depende explícitamente del tiempo:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt}$$

Usando las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0 \Rightarrow H_o = \text{Constante}.$$

Este es un resultado general, en todo sistema dinámico cuyo Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, se conserva la energía a lo largo de su trayectoria en el espacio de fase. El espacio de fase es el espacio cuyas coordenadas son los momentos p y coordenadas q del sistema.

Si la energía se conserva, las órbitas de las partículas se deslizan a lo largo de la superficie $E = \text{constante}$.

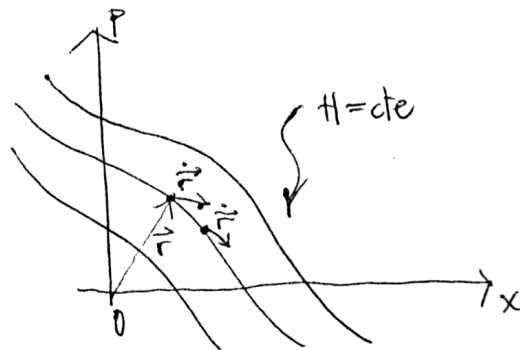
Estudiemos el comportamiento de $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$. $\frac{p^2}{2m}$ representa la transformada de Legendre de la energía cinética de la partícula.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \equiv \frac{1}{2} m \dot{q}^2 = \frac{1}{2} m \frac{p^2}{m^2} = \frac{p^2}{2m}$$

$V(q)$ es la energía potencial, de aquí la asociación de H con la energía del sistema.

$$H(q, p) = \text{Constante} \equiv \text{Energía} \Rightarrow \text{Sistema Conservativo}.$$

Supongamos que un sistema tiene $2N$ grados de libertad, es decir tiene N coordenadas q y N coordenadas p . Que la energía se conserve indica que el movimiento en el diagrama de fase ocurre en una hipersuperficie de $2N-1$ dimensiones. Examinemos las propiedades geométricas de la conservación de



la energía en estos diagramas.

Al final de este cálculo concluiremos que las partículas se mueven a lo largo de las líneas $H(p, q) = \text{Constante}$, como lo demostraremos a continuación.

Definimos un operador gradiente (o divergencia, según el caso) en forma similar al operador que actúa en un sistema de muchas variables:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right). \text{ En el espacio de fase } (q, p), \quad \nabla f(q, p) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial q}, \frac{\partial f}{\partial p} \right).$$

En 2N dimensiones, las coordenadas del espacio de fase son: $(q_1, q_2, q_3, \dots, p_1, p_2, \dots)$.

Estudiemos el gradiente del Hamiltoniano en el espacio de fase:

$$\nabla H(q, p) = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right) (-\dot{p}, \dot{q}),$$

donde hemos introducido las ecuaciones de Hamilton en la última igualdad, es decir, el resultado indica el valor del gradiente del Hamiltoniano a lo largo de la trayectoria de una partícula.

Por otra parte, en el diagrama de fase, el vector posición de la partícula es: $\vec{r} = (q, p)$ y su cambio en el tiempo:

$$\dot{\vec{r}} \equiv (\dot{q}, \dot{p}),$$

de modo que el producto con el gradiente del Hamiltoniano es nulo: $\dot{\vec{r}} \cdot \nabla H = 0$,

la interpretación geométrica de este resultado nos dice que el gradiente de una función que representa una curva en el espacio de dos dimensiones, es un vector perpendicular a la trayectoria de la partícula en cada uno de sus puntos. De aquí, el resultado obtenido en la última ecuación indica que el vector $\dot{\vec{r}}$ es perpendicular a ∇H en cada punto de la trayectoria de la partícula. de este modo, el vector $\dot{\vec{r}} \equiv (\dot{q}, \dot{p})$ es tangente a la trayectoria.

La *velocidad*, $\dot{\vec{r}}$ definida en el espacio de fase, es *tangente* a la curva:

$$H(q, p) = E_o = \text{Constante}.$$

Deducimos de aquí que las partículas se deslizan a lo largo de las líneas $H(q, p) = \text{Constante}$.

IV.1.4. Definición de punto fijo

En el espacio de fase los sistemas Hamiltonianos describen curvas que no se interceptan. Si existe un punto en el cual dos órbitas se cruzan, el sistema dinámico tiene más de una alternativa por la cual seguir evolucionando. Este hecho atenta contra la unicidad de las soluciones de los problemas de mecánica. Una manera de resolver este problema es suponer que las partículas que llegan a este punto, se detienen allí. Se denominan *puntos fijos* y, por razones que estudiaremos en más detalle posteriormente, nos interesa determinar su existencia y su estabilidad para cada sistema dinámico.

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \end{aligned} \right\} \quad q = \text{Constante}, \quad p = \text{Constante}.$$

Incompresibilidad de un sistema Hamiltoniano

Los fluidos incompresibles se caracterizan por tener una divergencia nula de su campo de velocidades $\vec{V}(\vec{x}, t)$. En el espacio de fase, un *fluido Hamiltoniano* despliega esta misma característica, como demostraremos a continuación.

$$\vec{r} \equiv \vec{V} = [\dot{q}, \dot{p}]. \quad \text{La divergencia de } \vec{V} \text{ es:} \quad \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}.$$

Usando las ecuaciones de movimiento de Hamilton, es decir: derivando a lo largo de las trayectorias de las partículas, tenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} + (-) \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0, \quad \text{puesto que } H(p, q) \text{ es una función continua.}$$

Ejemplos del uso del espacio de fase

A continuación, resolveremos algunos ejemplos para mostrar el funcionamiento del formalismo Hamiltoniano.

Oscilador Armónico

La energía potencial es: $V(q) = \frac{1}{2} k q^2$. El hamiltoniano es $H = T + V$.

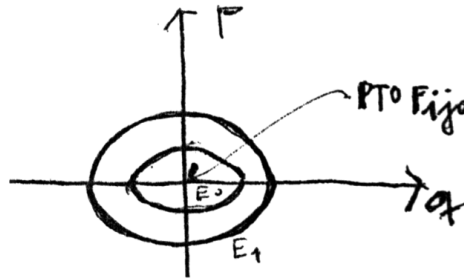
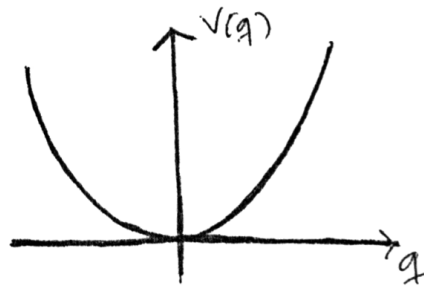
$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2, \text{ como}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2 = E$$

Escribiendo las variables en forma conveniente, tenemos:

$$1 = \left[\frac{p}{(2 E m)^{1/2}} \right]^2 + \left[\frac{q}{(2 E / k)^{1/2}} \right]^2$$

Esta ecuación indica que la órbita en el espacio de fase, con un escalamiento adecuado de los ejes p y q , es una circunferencia. Esto es lo esperado, el sistema tiene inicialmente 2 grados de libertad, se le quita uno de ellos con la conservación de la energía, resta uno solo que corresponde a la órbita descrita.



Como $\omega^2 \equiv k/m$, entonces:

$$\begin{aligned} q(t) &= \left(\frac{2 E}{k} \right)^{1/2} \cos(\omega t + \delta), \quad p(t) \\ &= -\omega m \left(\frac{2 E}{k} \right)^{1/2} \text{sen}(\omega t + \delta). \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \Rightarrow \dot{p} = -kq. \end{aligned} \right\} \quad \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$$

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0,$$

$$q(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

Se obtiene también:

$$A^2 = \frac{2E}{k} \quad \text{o} \quad \frac{kA^2}{2E} = 1$$

Usando la definición de ω^2 obtenemos

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

La fase δ , está determinado por las condiciones iniciales del oscilador.

Ejemplo

Repitamos un caso como el de un oscilador con una salvedad: cambiamos el signo del potencial. Estudiaremos el movimiento de una partícula en un potencial repulsivo.

$$V(q) = -\frac{1}{2} a q^2$$

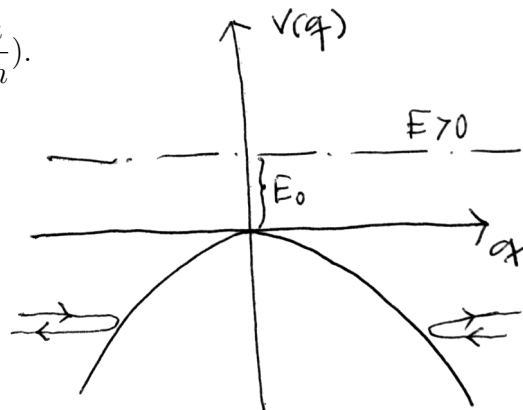
$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} - \frac{m\gamma^2}{2} q^2, \quad (\gamma^2 = \frac{a}{m}).$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= m\gamma^2 q \end{aligned} \right\} \quad \ddot{q} = +\gamma^2 q$$

$$q(t) = A_+ e^{\gamma t} + A_- e^{-\gamma t}$$

Como es un sistema conservativo la energía es una constante de movimiento: $H = E$,

$$2mE = p^2 - (m\gamma q)^2$$

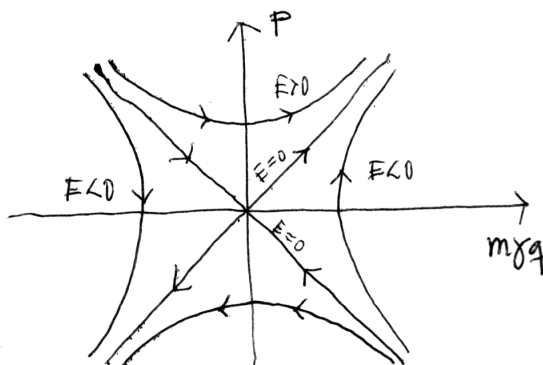


$$2mE = (p - m\gamma q)(p + m\gamma q).$$

Analicemos el diagrama de fase. Las soluciones más simples de esta ecuación, corresponden al momentum proporcional a la posición: $p = \pm m\gamma q$. Estos quedan representados por líneas rectas en el espacio de fase que cruzan el origen formando un ángulo de 45° con la abcisa. Los casos restantes satisfacen una ecuación algebraica del tipo $x^2 - y^2 = \text{Constante}$: la ecuación de una hipérbola.

Nuevamente el punto fijo se ubica en el origen $q = p = 0$.

Para determinar los sentidos de las hipérbolas utilizamos el diagrama de la conservación de la energía (ver Figura). Esto parece un contrasentido, puesto que estamos describiendo el sistema mediante el espacio de fase y para determinar su sentido volvemos al sistema original. Sin embargo no es así. Más tarde determinaremos las trayectorias resolviendo las órbitas alrededor de los puntos fijos, con ello determinaremos el flujo en su vecindad y, por continuidad, en todo el espacio de fase. Simultáneamente podremos determinar la estabilidad del sistema alrededor de estos puntos.



Las líneas rectas separan los casos con energía positiva y energía negativa (aquellas partículas que rebotan al llegar al potencial). Las líneas rectas corresponden al caso de partículas con energía cero.

Reemplazando la expresión de p y q en función del tiempo en el Hamiltoniano, se obtiene:

$$E = -2m\gamma^2 A_+ A_-$$

Como se indicó anteriormente, dos trayectorias distintas —es decir, con condiciones iniciales diferentes—, no pueden converger en el espacio de fase, puesto que de suceder así el sistema no podría decidir qué camino seguir. Sólo si el sistema se detiene allí, desaparece esta ambigüedad. Esta es la propiedad que caracteriza

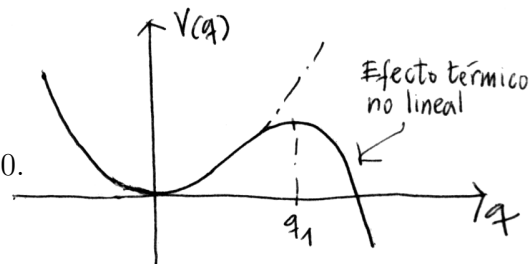
a un punto fijo.

Nuestra labor en el siguiente capítulo será determinar la estabilidad de estos puntos: como evoluciona el sistema al ser sacado de esta posición de equilibrio.

Ejemplo

Analicemos una vez más el oscilador armónico. Esta vez le añadimos un término extra, no-lineal, al potencial:

$$V(q) = \frac{1}{2} \omega^2 q^2 - \frac{1}{3} A q^3, \quad \text{con } A > 0.$$



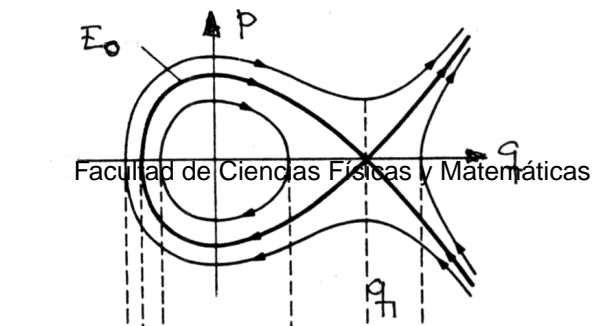
Explicemos brevemente el origen de este modelo para un oscilador armónico. Cuando un cristal está en equilibrio, sus oscilaciones térmicas (por ejemplo) encuentran una resistencia como la generada por el potencial de un oscilador armónico. Esto es así porque se trata de una oscilación pequeña alrededor de un punto de equilibrio estable, por lo tanto en el desarrollo de Taylor sólo aparecen los términos cuadráticos en las coordenadas. Sin embargo al comprimir más el cristal, aparecen desviaciones del oscilador, la fuerza de resistencia del cristal se acrecienta, éste es el efecto que modela el término cúbico sumado al potencial original. Al contrario, cuando al cristal se le trata de elongar, después de un cierto valor su resistencia se debilita comparada con la de un oscilador armónico.

La elongación más allá del máximo es sólo, en este contexto, un problema formal.

El Hamiltoniano es: $H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 - \frac{1}{3} A q^3$, y las ecuaciones de Hamilton son:

$$\dot{q} = \frac{p}{m},$$

$$\dot{p} = -\omega^2 q + A q^2,$$



Los puntos fijos son:

$$1) p = q = 0,$$

$$2) p = 0, q_1 = \frac{\omega^2}{A}.$$

El valor del potencial en el segundo punto fijo es:

$$V(q_1) = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\frac{\omega^2}{A} \right)^2 - \frac{1}{3} A \left(\frac{\omega^2}{A} \right)^3 = \frac{1}{6} \frac{\omega^6}{A^2}.$$

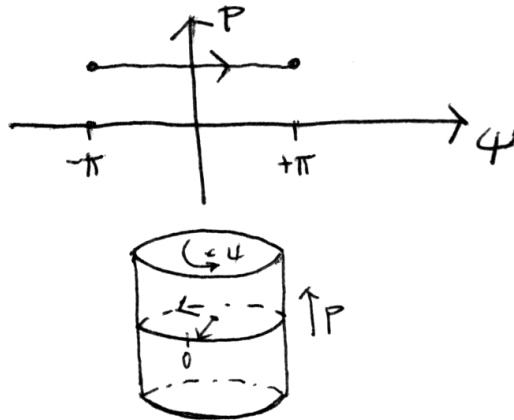
Para tener una información parcial del movimiento no necesitamos resolver las ecuaciones de movimiento, basta analizar el diagrama de energía.

$p = 0, q_1 = \frac{\omega^2}{A}$ representa un equilibrio inestable.

Ejemplo

Escribir el Hamiltoniano y las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rotando en un plano en torno a uno de sus ejes principales.

La única diferencia con los casos anteriores es que una de sus coordenadas es periódica. Si identificamos el punto $\psi = 0$ con $\psi = 2\pi$, el rango de coordenadas queda establecido como: $2\pi \geq \psi > 0$. Por otra parte, como $H(q, p) = T + V$, tenemos:



$$H = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad I \equiv \text{Momento de Inercia}$$

Universidad de Chile



$$L = \frac{1}{2} I \dot{\psi}^2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \equiv p = I \dot{\psi},$$

$$\text{de aquí : } H = \frac{p^2}{2I}$$

donde p = momento angular del cuerpo.

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{I}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0,$$

$$p = p_o, \quad \psi = \frac{p_o}{I} t + \psi_o.$$

El diagrama de fase aparece en la Figura.

Aquí se han identificado los dos puntos extremos de la trayectoria. Esta trayectoria es una línea horizontal que se extiende desde $-\pi$ hasta $+\pi$.

Resulta natural proyectarla sobre el manto de un cilindro de radio arbitrario.

Ejemplo

Analicemos el caso de un péndulo vertical. Escribamos el Hamiltoniano correspondiente:

$$H = \frac{p^2}{2I} - F_o/2 \ell \cos \psi,$$

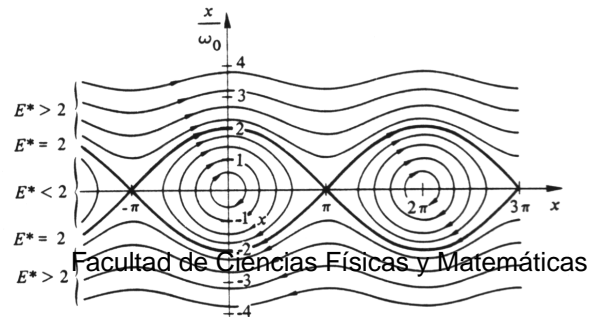
$$F_o \equiv m g \ell \equiv \text{largo del péndulo.}$$

En este caso las ecuaciones de Hamilton son:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{p}{I} \\ \dot{p} &= -F_o \ell \sin \psi. \end{aligned} \right\}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\dot{p}}{I} = -\frac{F_o \ell}{I} \sin \psi$$

IV.1. TRANSFORMADA DE LEGENDRE



$$\ddot{\psi} + \left(\frac{F_o \ell}{I} \right) \sin \psi = 0.$$

La ecuación que describe la trayectoria de las partículas en el diagrama de fase es la siguiente:

$$\frac{d\psi}{dp} = -\frac{p}{F_o \ell I \sin \psi} \Rightarrow \cos \psi + \frac{p^2}{2 F_o \ell I} = \text{Constante}.$$

La solución exacta de las variables en función del tiempo está dada por una integral elíptica.

Los puntos fijos son: $p = 0$, $\psi = 0, \pm\pi$. Dibujando cualitativamente las órbitas en el diagrama de fase, se puede analizar las características que contiene este sistema.

Ejemplo

Encontrar la expresión del período de un sistema sin resolver las ecuaciones de movimiento en forma explícita.

Despejando el momentum del Hamiltoniano, tenemos:

$$P = \pm [2m(E - V(q))]^{1/2}, \quad \text{Por otra parte } \dot{q} = \frac{p}{m} = \dot{q} = \sqrt{\frac{2}{m}} [E - V(q)]^{1/2}.$$

Integrando esta ecuación obtenemos

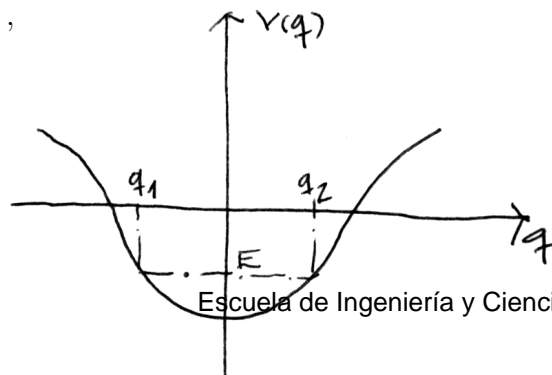
$$\int dt = \int dq \sqrt{\frac{m}{2}} [E - V(q)]^{-1/2}.$$

Si integramos en un período

$$T = 2 \int_{q_1}^{q_2} dq \sqrt{\frac{m}{2}} [E - V(q)]^{-1/2},$$

donde $V(q_1) = V(q_2) = E$ ($q_1 < q_2$),

$$T = \sqrt{2m} \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{[E - V(q)]^{1/2}}.$$



Ejemplo

Se tiene una partícula, que podemos representar por una pequeña argolla, que se mueve por un alambre y rebota elásticamente en los extremos del alambre.

- Dibujar la trayectoria de este aro en el diagrama de fase.
- Dibuje el diagrama de fase para el caso de tres aros que en $t = 0$ se ubican en un extremo del trozo de alambre ($x = -a$), y que no interactúan entre ellos, es decir, uno puede pasar sobre el otro sin modificar su movimiento.

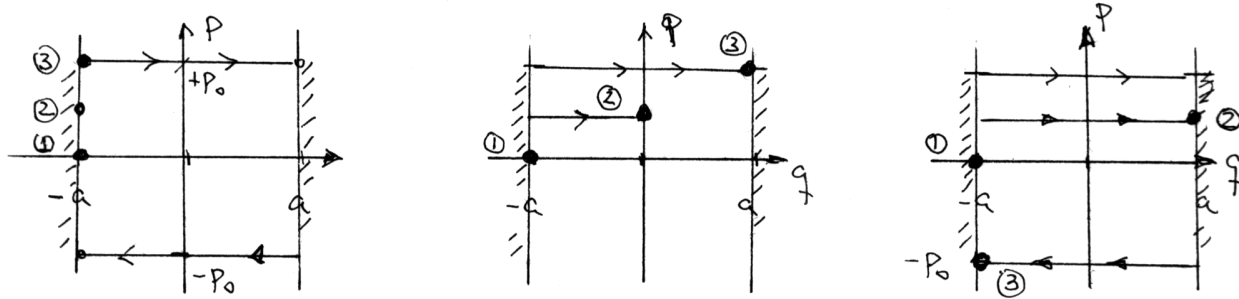


Figura IV.3: Los intervalos de tiempo dibujados corresponden a: $t = 0$, $t = (2a)/p_0$, $t = (4a)/p_0$.

Podemos extender este ejercicio al caso de un continuo de partículas, todas ellas ubicadas en $q = -a$ en el instante inicial y con distintos valores asignados al momentum comprendidos entre $p_{\min.} = 0$ y $p_{\max.} = p_0$.

Como el número de partículas *no* cambia, puesto que no hay absorción en las paredes, tampoco las partículas interactúan entre ellas, cada una sigue su propia trayectoria en este espacio de fase.

Al seguir la trayectoria de diversas partículas después que han sufrido varios rebotes en los extremos, podemos apreciar que al transcurrir mucho tiempo el diagrama de fase se transforma en un cuadrado cubierto de franjas cada vez más angostas. Uno espera que cuando $t \rightarrow +\infty$, éstas terminan por llenar todo el espacio de fase.

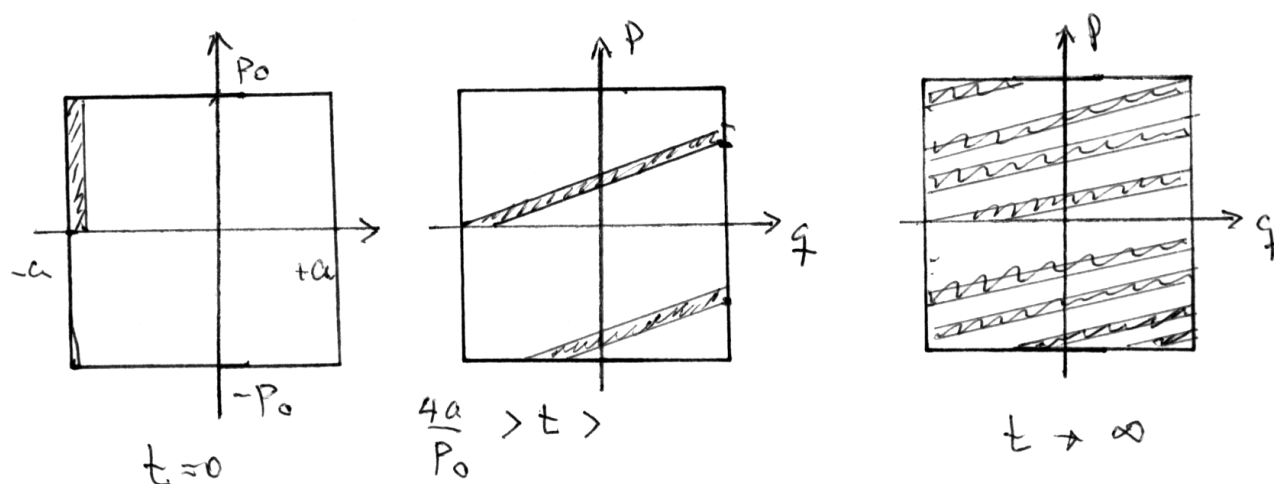


Figura IV.4: Este es un problema unidimensional, donde hemos ubicado un conjunto de partículas en el origen con distintos valores para el momentum. Las partículas no tienen volumen, tampoco chocan entre ellas. La evolución en el tiempo está dibujada en la Figura.

El área achurada debe tener el mismo valor que al comienzo, puesto que no hay pérdida de materia en este sistema.

IV.2. Paréntesis de Poisson

Dada $f(q, p, t)$, una función de q y el momentum p , su derivada total con respecto al tiempo es:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt}.$$

Ahora si f es una función de variables dinámicas, es decir en $f = f(q, p)$, la evolución de q y p no son arbitrarias sino están dadas por las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\},$$

donde hemos definido $\{H, f\}$, como el *paréntesis de Poisson*:

$$\{H, f\} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (\text{IV.9})$$

El corchete $\{ \ , \ }$, representa un operador que actúa sobre un par ordenado de funciones. Por ejemplo, para dos funciones cualesquiera: $f(q, p)$ y $g(q, p)$ se tiene:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p}.$$

IV.2.1. Propiedades del paréntesis de Poisson

a) Sea M una cantidad conservada (momento angular, por ejemplo), entonces debe ocurrir que $\frac{dM}{dt} = 0$. Suponiendo que la variable M , depende de las variables canónicas q y p , se tiene que:

$$\frac{dM(q, p)}{dt} = 0 = \{H, M\} + \frac{\partial M}{\partial t}.$$

Si además M no es una función explícita de t , $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$, entonces concluimos que: *una función que es constante de movimiento y que no depende explícitamente del tiempo, conmuta con el Hamiltoniano.*

Se dice que una función conmuta con el Hamiltoniano si $\{f, H\} = 0$.

Por otra parte, si nos dan una función de las variables q y p asociadas a un sistema dinámico, y esta función conmuta con el Hamiltoniano, sabemos que es una cantidad conservada.

b) El paréntesis de Poisson entre las coordenadas q y p es:

$$\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial p} = -1.$$

Aquí identificamos $f(q, p) \equiv q$ y $g(q, p) \equiv p$.

En general, en el caso de una función de muchas variables

$$f(q_1, q_2 \cdots q_n; p_1 \cdots p_n) \quad \text{y} \quad g(q_1, \cdots q_n; p_1, \cdots p_n),$$

el paréntesis de Poisson se define mediante una sumatoria:

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) = \sum_{k=1}^n \{\dots\}_k,$$

en particular, el paréntesis de Poisson entre una coordenada y un momentum arbitrario en un sistema de muchos grados de libertad, es:

$$\{q_\ell, p_r\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_\ell}{\partial p_k} \frac{\partial p_r}{\partial q_k} - \frac{\partial q_\ell}{\partial q_k} \frac{\partial p_r}{\partial p_k} \right) = - \sum_k \delta_k^\ell \delta_k^r = -\delta_r^\ell,$$

$$\text{donde } \delta_k^\ell = 0 \text{ si } \ell \neq k, \text{ y } \delta_k^\ell = 1 \text{ si } \ell = k.$$

c) Las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico que obedece las ecuaciones de Hamilton, se pueden escribir como:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \{H, q\},$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \{H, p\}.$$

En palabras, el paréntesis de Poisson de q con el Hamiltoniano determina la evolución de q (es decir \dot{q}). La dinámica de los sistemas está totalmente determinada por el Hamiltoniano.

Ejemplo

Demuestre que las cantidades conservadas asociadas a una partícula moviéndose libremente, es decir sin una fuerza externa, en una dimensión son:

$$h_1 = p \quad \text{y} \quad h_2 = p \frac{t}{m} - x.$$

El Hamiltoniano no tiene en este caso un término proveniente del potencial porque la partícula se desliza libremente:

$$H = \frac{p^2}{2m}, \quad \text{como } H = H(p), \quad \{H(p), f(p)\} = 0, \quad \text{para cualquier función de } p,$$

en particular, una cantidad conservada que tiene una interpretación física directa es $f(p) = p_o \equiv h_1$.

Investiguemos el caso $h(x, p_o, t)$. El conmutador de esta cantidad con el Hamiltoniano es:

$$\begin{aligned} \{H(p), h_2(p, x, t)\} + \frac{\partial h_2}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial t} = 0 \equiv \frac{d h_2}{d t} \\ &= \frac{p_o}{m} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial t} \\ \text{redefiniendo } x \text{ como } u &\equiv \left(\frac{m x}{p_o} \right) \\ &= \frac{\partial h_2}{\partial u} + \frac{\partial h_2}{\partial t} \end{aligned}$$

La solución general de esta última ecuación es:

$$h_2(u, t) = g(u - t), \quad \text{donde } g(u - t) \text{ es una función arbitraria.}$$

Como $\frac{d h_2}{d t} = 0$ a lo largo de la trayectoria, es una constante de movimiento, de modo que, el caso más simple corresponde a:

$$g(t - u) = \text{constante} = K(t - u), \quad \text{con } k = \text{constante.}$$

Multiplicando esta ecuación por la constante m/p_o , y adecuando el valor de las constantes obtenemos:

$$h_2 = \frac{p_o t}{m} - x.$$

Esta última cantidad conservada corresponde a la posición inicial de la partícula. En cambio h_1 corresponde al momentum inicial.

Cualquier combinación de estas cantidades es otra cantidad conservada. Al elegir la forma de las cantidades conservadas indicada aquí, estamos facilitando su interpretación física a partir de las condiciones iniciales del movimiento.

Ejemplo

A partir de las expresiones para las componentes M_x y M_y del momento angular, calcule el valor de $[M_x, M_y]$.

Dada la definición de $M_x \equiv y P_z - z P_y$ y $M_y \equiv z P_x - x P_z$, el operador diferencial

$$\{ , \} = \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right\}, \quad \text{con}$$

$p_1 \equiv p_x, p_2 \equiv p_y, p_3 \equiv p_z$, y análogamente para q_k , entonces, el conmutador pedido es:

$$\begin{aligned} & \{y p_z - z p_y, z p_x - x p_z\} = \\ &= \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial p_k} (y p_z - z p_y) \frac{\partial}{\partial q_k} (z p_x - x p_z) - \frac{\partial}{\partial q_k} (y p_z - z p_y) \frac{\partial}{\partial p_k} (z p_x - x p_z) \right\}. \end{aligned}$$

Desarrollando cada uno de los términos de la sumatoria, tenemos:

$$\begin{aligned} \{M_x, M_y\} &= \left(\overset{k=1}{0 - 0} \right) + \left(\overset{k=2}{(-z) \cdot 0 - 0} \right) + \left(\overset{k=3}{y \cdot p_x - (-p_y) \cdot (-x)} \right), \\ &= y p_x - x p_y = -(x p_y - y p_x) = -M_z \end{aligned}$$

$$\text{De modo que: } \{M_x, M_y\} = -M_z.$$

En forma análoga se puede demostrar que $\{M_y, M_z\} = -M_x$ y así sucesivamente.

Ejercicio

Demuestre que: a) $\{M_y, M_z\} = -M_x$, b) $\{P_x, x\} = 1$, c) $\{M_x, P_x\} = ?$.

IV.3. Ecuación de Liouville

Si tenemos un sistema dinámico cuyo número de partículas N se conserva durante la evolución, entonces:

$$\frac{dN}{dt} = 0, \quad \text{con } N = N_o,$$

pero, si modelamos este sistema como un continuo y le asociamos una densidad en el espacio de fase $(dq_1, \dots, dq_n, dp_1, \dots, dp_n)$, que denominamos como $D(dq_1, \dots, dq_n, dp_1, \dots, dp_n, t)$,

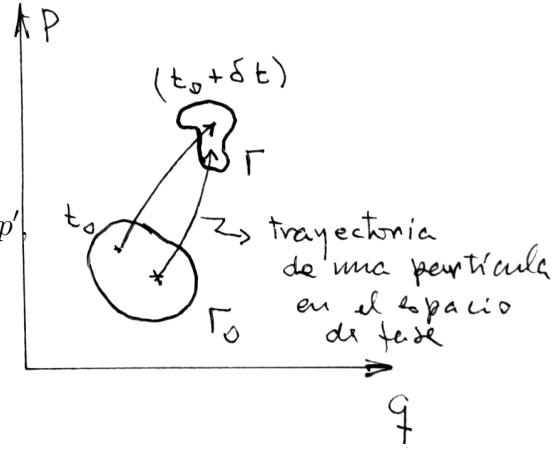
y que depende de las coordenadas del espacio de fase y el tiempo. Ahora podemos definir el número de partículas N , como:

$$N = \int_{\Gamma_o} D(q, p, t) dq dp,$$

donde Γ_o representa el *volumen* en el espacio de fase en el instante t . En un instante posterior: $(t + \delta t)$, se cumple la siguiente relación:

$$N(t + \delta t) = \int_{\Gamma} D(q', p', t_o + \delta t) dq' dp',$$

donde $\Gamma \neq \Gamma_o$, ya que el *volumen* en el espacio de fase cambia con el transcurso del tiempo, a medida que las partículas recorren el espacio de fase, como apreciamos en la Figura. Si hacemos un desarrollo de Taylor alrededor del *volumen* ocupado en el instante inicial, tenemos:



$$D(q, p, t + \delta t) = D(q, p, t) + \frac{\partial D}{\partial t} \delta t + \frac{\partial D}{\partial q} \dot{q} \delta t + \frac{\partial D}{\partial p} \dot{p} \delta t,$$

$$\begin{aligned} \text{con } dq' &= dq(t + \delta t) = d\{q(t) + \dot{q} \delta t\}, \\ &= dq + d\dot{q} \delta t + O[(\delta t)^2], \end{aligned}$$

$$\text{análogamente } dp' = d(p(t + \delta t)) = dp + d\dot{p} \delta t + O[(\delta t)^2].$$

Introduciendo esta expresión en la integral:

$$N(t + \delta t) = \int_{\Gamma_o} \left\{ D(q, p, t) + \frac{\partial D}{\partial t} \delta t + \frac{\partial D}{\partial q} \dot{q} \delta t + \frac{\partial D}{\partial p} \dot{p} \delta t \right\} (dq + d\dot{q} \delta t)(dp + d\dot{p} \delta t).$$

Note que $d\{\dot{q}\delta t\} = O[(\delta t)^2]$, como demostramos a continuación:

$$d\{\dot{q}\} = d\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \dot{q} \delta t + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \dot{p} \delta t.$$

Como este término es proporcional a δt , y en la ecuación original aparece multiplicado por un factor δ , hemos demostrado que $d\{\dot{q}\delta t\}$ es proporcional a $O[(\delta t)^2]$. El nuevo volumen en el espacio de fase se puede expresar como:

$$\Gamma = \Gamma_o + \delta\Gamma, \quad \text{y recordando la notación } \{H, D\} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial D}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial D}{\partial p},$$

podemos desarrollar $N(t + \delta t)$ en serie hasta orden $O(\delta^2)$:

$$N(t + \delta t) \equiv N(t) + \frac{dN(t)}{dt} \delta t = \int_{\Gamma_o} D dq dp + \int_{\Gamma_o} \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \{H, D\} \right) dp dq \delta t + O(\delta^2)$$

Como $N \equiv \int_{\Gamma_o} D dq dp$, reemplazando en la ecuación anterior se tiene, a primer orden en δt :

$$0 = \left(\int_{\Gamma_o} \left\{ \frac{\partial D}{\partial t} + \{H, D\} \right\} dq dp \right) \delta t.$$

Como no hemos impuesto ninguna propiedad especial sobre el *volumen* Γ_o del espacio de fase, esta integral debe anularse para cualquier instante. Para que esto ocurra en cualquier instante y con cualquier *volumen* se debe cumplir necesariamente que el integrando debe ser idénticamente nulo:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \{H, D\} = 0$$

Ecuación de Liouville

Esta es la ecuación de continuidad en el espacio de fase. Si reemplazamos $D(q, p, t)$

por $\rho(q, t)$, la ecuación de Liouville se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho = 0, \quad \text{debido a que } D \text{ no depende de } p.$$

Aquí hemos definido $\vec{u} \equiv \partial H / \partial p$. la ecuación de continuidad usada en fluidos incompresibles.

Operadores

A continuación ilustraremos la idea de un operador con el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Sea $f(p, q, t)$ una cantidad conservada en un sistema dinámico. Demuestre que, dado el Hamiltoniano del sistema y el valor de f en el instante inicial t_o : $f(p, q, t_o)$, usando la notación de los paréntesis de Poisson podemos determinar $f(p, q, t)$ en cualquier instante posterior expresándola como un desarrollo en serie de Taylor.

Como f es una cantidad conservada, se cumple la siguiente relación

$$\frac{df}{dt} = 0 \Leftrightarrow \text{una cantidad conservada} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\}.$$

Definiendo f_o como $f(q, p, t_o)$ y análogamente $\{H, f_o\}$, como el conmutador evaluado en $t = t_o$, tenemos:

$$f(p, q, t_o + \delta t) = f_o + \{f_o, H\} \delta t + \{\{f_o, H\}, H\} \frac{(\delta t)^2}{2!} + \dots,$$

donde hemos definido

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \equiv \{\{f_o, H\}, H\}.$$

Ejemplo

Demuestre que el desarrollo de Taylor de una función se puede escribir de la siguiente forma:

$$f(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \left(e^{\delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla}} \right) f(\vec{x}), \quad \text{donde, por definición}$$

$$e^A \equiv I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

A es un operador que puede ser una matriz o, como en nuestro ejemplo, un operador diferencial $\vec{\nabla}$. En este caso

$$A = \delta\vec{x} \cdot \nabla, \quad A^2 = (\delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla})(\delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla}), \dots$$

Si $\delta\vec{x} = a \hat{i}$ donde \hat{i} es un vector unitario apuntando en el eje x, y a es una cantidad constante, este operador toma una forma más simple:

$$e^{(\delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla})} \equiv e\left(a \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad (\delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla})^2 = a \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial}{\partial x}\right) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots$$

y el resultado es similar para el resto de los términos, cambiando sólo las potencias de a y de la derivada. Note que si

$$a \ll 1 \Rightarrow e^{a[\partial/\partial x]} \simeq 1 + a \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

y a primer orden en $a \equiv \delta x$, este operador se puede interpretar como un operador de traslación: $\{e^{\delta x [\partial/\partial x]}\} f(x) \simeq f(x + \delta x)$.

IV.4. Transformaciones canónicas

En la mecánica de Newton es necesario elegir las coordenadas de acuerdo a la simetría del problema, siempre podemos realizar las transformaciones de coordenadas que nos parezcan más convenientes: de coordenadas esféricas a cilíndricas o cartesianas. Por otra parte, la dinámica de un sistema también se puede representar mediante las ecuaciones de Hamilton, y la pregunta es si esta operación de expresar las ecuaciones en diferentes sistemas de coordenadas es válida en este otro esquema. La respuesta es clara: es posible cambiar de un conjunto de coordenadas a otro:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_k, t) \equiv Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad \text{con } i = 1, \dots, N, \\ P_i &= P_i(p_k, t) \equiv P_i(p_1, p_2, \dots, p_n, t), \quad \text{con } i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

De hecho, en el caso de una transformación de coordenadas cartesianas a esféricas:

$$q_1 \equiv x, \quad q_2 \equiv y, \quad q_3 \equiv z,$$

se tiene $Q_1 = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \dots$

También se puede incluir explícitamente al tiempo como una variable más, si uno se ubica en un sistema no inercial.

Existe un problema en el caso de las ecuaciones de Hamilton, a pesar que es posible hacer una transformación de coordenadas arbitraria en los q_k y los p_k , no

se puede asegurar que la simplicidad de las ecuaciones de Hamilton se mantenga en el nuevo sistema de coordenadas. En la nuevas coordenadas se pierde la forma canónica de las ecuaciones de Hamilton. Al perder esta simetría de las ecuaciones se pierde parte importante de sus propiedades. En resumen es deseable poder cambiar el sistema de coordenadas de los (q, p) a los (Q, P) , sin perder la simplicidad de las ecuaciones de Hamilton. La tarea es lograr:

$$\text{comenzando de este sistema } \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\text{llegar a } \dot{Q}_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k} \quad k = 1, \dots, N.$$

Existe un conjunto de transformaciones que conservan la forma canónica (la forma usual) de las ecuaciones de movimiento, estas transformaciones se denominan las *transformaciones canónicas*.

¿Cómo se sabe cuando una transformación de coordenadas es canónica?

Existen varias formas (ver cualquier libro de mecánica clásica como Landau y Lifshitz o H. Goldstein . . .). La comprobación más simple, que ilustraremos aquí, consiste en verificar si la transformación de coordenadas conserva el área en el diagrama de fase.

Para que se conserve el *volumen* en el espacio de fase al pasar de las coordenadas $(q_1, q_2, \dots, p_1, p_2, \dots, p_n)$ a $(Q_1, Q_2, \dots, P_1, P_2, \dots, P_n)$, se debe cumplir que:

$$\int_{\Gamma_o} dq_1 dq_2 \dots dp_1 \dots dp_n = \int_{\Gamma} dQ_1 dQ_2 \dots dP_1 dP_2 \dots dP_n,$$

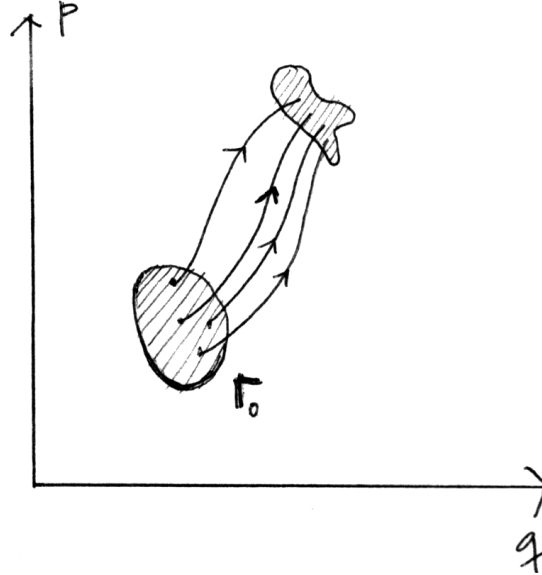
con $Q_k = Q_k(q_j, p_l)$ y $P_k = P_k(q_j, p_l)$, en general. Usando la ley de transformación de coordenadas, esto se puede escribir como:

$$\int_{\Gamma} \dots dQ_k \dots dP_k = \int_{\Gamma_o} \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(q_j, p_j)} \dots dq_j \dots dp_j.$$

Para que el *volumen* se conserve en el espacio de fase, el Jacobiano de la transformación de coordenadas debe ser la unidad:

$$\text{Transformación Canónica} \Leftrightarrow \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(q_j, p_j)} = 1$$

Como vimos en el ejemplo anterior, la evolución del sistema cambia (en general) la forma inicial Γ_0 que encerraba al sistema de puntos en $t = 0$. Al transcurrir el tiempo de $0 \rightarrow t$ cada una de las partículas va a evolucionar desde la coordenada q_k a otra cercana $q_k + \delta q_k$. Podemos hacer una transformación de coordenadas tal que la nueva coordenada Q_k , sea precisamente la que asocia la nueva posición de la partícula con esta nueva coordenada, es decir: $Q_k = q_k + \delta q_k$.



Ejemplo

La transformación de coordenadas más interesante es aquella que usa las ecuaciones de movimiento para generar una nueva coordenada asociada a la partícula. Esta transformación es también una transformación canónica. Lo demostraremos a continuación. La nueva coordenada es $Q_k = q_k + \delta q_k$ como la variación de posición está dada por las ecuaciones de movimiento, entonces $\delta q_k = \dot{q}_k \delta t = \partial H / \partial p_k \delta t$. Lo mismo es válido para el momentum, de este modo la relación entre las nuevas coordenadas y las antiguas es:

$$Q_k = q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta t$$

$$P_k = p_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta t$$

En el caso particular de una dimensión (q, p) , el Jacobiano de la transformación de coordenadas es:

$$\frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(q_j, p_j)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \delta t & \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \delta t \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \delta t & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \delta t \end{vmatrix} = 1 + 0(\delta t)^2$$

A primer orden entonces esta es una transformación canónica de acuerdo a lo establecido –sin demostración– anteriormente.

También, la ecuación de Liouville es el punto de partida para derivar la ecuación de Boltzmann, usada en Teoría Cinética, en ecuaciones de difusión de reactores y muchos otros sistemas.

Ejemplo

La transformación trivial. Aquella que ocurre si el sistema está en un punto fijo y no sufre ningún tipo de evolución:

$$\left. \begin{array}{l} Q_k = q_k \\ P_k = p_k \end{array} \right\} \rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 1$$

Ejemplo

Si el sistema se contrae en una dirección y se alarga en otra:

$$\left. \begin{array}{l} Q = \frac{1}{a} q \\ P = a p \end{array} \right\} \rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & a \end{array} \right| = 1.$$

Ejemplo

Estudiemos la evolución en el espacio de fase de un conjunto de osciladores armónicos, todos ellos independientes entre sí.

La ecuación que obedece cada uno de ellos es:

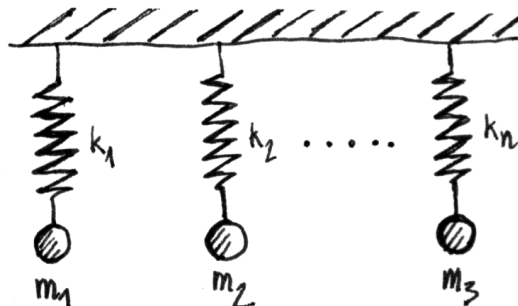
$$\ddot{x}_i + \frac{k_i}{m_i} x_i = 0, \quad \text{todo } i = 1, 2, 3, \dots$$

Cada una de las partículas sigue una trayectoria circular en el espacio de fase como demostraremos a continuación. También cada una de ellas sigue una trayectoria que está determinada por las condiciones iniciales y no intercepta a ninguna otra de sus vecinas.

El Hamiltoniano de este sistema es

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\dot{p}_i^2}{2m_i} + \frac{k_i q_i^2}{2} \right].$$

Como las partículas son independientes entre sí, el Hamiltoniano es la suma del Hamiltoniano de cada una de las partículas. Redefiniendo las variables q_i y p_i :



$$q_i = \mu^{-1} (2 P_i)^{1/2} \sin Q_i,$$

$$p_i = \mu (2 P_i)^{1/2} \cos Q_i.$$

Con $\mu_i \equiv (k_i m_i)^{1/4}$. Si definimos $\omega_i \equiv [k_i/m_i]^{1/2}$, el Hamiltoniano queda como:

$$H_i = \sum_{i=1}^n \omega_i P_i.$$

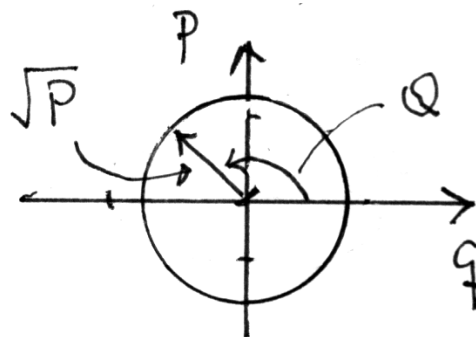
(Ejercicio: Demuestre que esta transformación de coordenadas es canónica.)

Las ecuaciones de Hamilton para este sistema son:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = \omega_i,$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0.$$

De aquí se obtiene $Q_i = \omega_i t + D_i$, donde D_i es una constante y Q_i indica el ángulo del vector que señala a la partícula. A su vez P_i , corresponde al radio de este vector. Así diferentes partículas describen una circunferencia de radio $P_i = \mu_i^2 q_i^2 + p_i^2 / \mu_i^2$. Si queremos que las partículas



viajen como un bloque, se debe cumplir la siguiente condición: $\omega_i = \text{Constante}$ para todo $i=1, 2, 3...$

Este es el caso que se indica en la Figura.

IV.5. Constantes de Movimiento y la Integrabilidad del Hamiltoniano

En esta sección podremos apreciar -aunque sólo superficialmente- la fuerza y la profundidad que puede desarrollar el punto de vista variacional en la mecánica. Las matemáticas asociadas a los resultados que queremos mostrar (no demostrar) son más amplias y más sofisticadas, pero nuestro énfasis estará centrado en ilustrar los resultados matemáticos con ejemplos físicos que nos permitan verificar los teoremas y que concreten la idea.

Nos interesan los sistemas dinámicos que, al menos formalmente, sean integrables. También exigiremos que la trayectoria del sistema en el espacio de fase sea acotada, que ocupe un volumen finito. Ya hemos visto que esta situación aparece en un conjunto reducido pero muy importante de problemas.

Comencemos por la definición de un sistema dinámico integrable¹ [7] . Este es un sistema que tiene $2N$ grados de libertad y N cantidades conservadas, independientes, analíticas y cuyas integrales sean monovaluadas. Funciones del tipo:

$$F_m(\vec{q}, \vec{p}) \quad 1 \leq m \leq N,$$

constantes a lo largo de la trayectoria del sistema.

Si designamos el valor de la constante como f_m ,

$$F_m(\vec{q}, \vec{p}) = f_m, \quad 1 \leq m \leq N.$$

IV.5.1. Variables de Acción

La razón para generar estas nuevas coordenadas, las denominadas variables de acción, es que el espacio de fase en estas nuevas variables sea el de un toro. Para lograrlo necesitamos que existan N cantidades conservadas, F_m , con $0 < m <$

¹Esta sección está basada en los apuntes de M. Berry, referidos al final del capítulo

$(N + 1)$. Buscamos una transformación canónica de coordenadas que nos a un momentum que sean una combinación de las cantidades conservadas F_m . Por esta razón, los nuevos momentos son constantes de movimiento y los nuevos Q no aparecen en el nuevo Hamiltoniano, puesto que los nuevos momentos P son constantes de movimiento.

En el ejemplo del oscilador armónico de la sección anterior se hizo precisamente este cambio de variables para dejar el nuevo Hamiltoniano (que representa la conservación de la energía) como una función de P que es una constante. Esta es la estrategia que se puede generalizar a todos los sistemas integrables que ocupan un volumen finito en el espacio de fase.

Estas nuevas coordenadas, que usualmente se denominan *variables de acción*. Asociada a esta variable, existe otra denominada *variable angular* y que se identifica como θ_m . Las ecuaciones de Hamilton en estas nuevas coordenadas son:

$$\dot{J}_m = \frac{\partial H(J, \theta)}{\partial \theta_m}, \quad (\text{IV.10})$$

$$(\text{IV.11})$$

$$\dot{\theta}_m = \frac{\partial H(J, \theta)}{\partial J_m}, \quad (\text{IV.12})$$

Como mencionamos anteriormente, la estrategia es que las nuevas coordenadas de acción J_m sean precisamente combinaciones de las constantes de movimiento $F_m(q, p) = f_m$, del sistema. De esta forma $\dot{J}_m = 0$, de manera que la derivada parcial en la segunda ecuación es nula y en consecuencia el Hamiltoniano no depende de la variable angular θ_m .

Integrando la otra familia de ecuaciones, encontramos que:

$$\theta_m = \left[\frac{\partial H(J)}{\partial J_m} \right] t + \theta_m(0).$$

La variable θ_m depende linealmente en el tiempo y el factor $\frac{\partial H(J)}{\partial J_m}$ es constante, ya que está formado por las constantes de movimiento de este sistema.

Esta variable se comporta como un ángulo, de allí su denominación. En consecuencia, el término $\frac{\partial H(J)}{\partial J_m}$, se denomina $\omega_m = \omega_m(J)$.

En este punto conviene destacar que el hecho que existan N cantidades conservadas es el que le otorga el nombre de integrable a estos sistemas, independiente

si somos capaces de encontrar la transformación canónica de coordenadas que permite describir el sistema de esta forma tan favorable.

La existencia de toroides asociados a los sistema integrables

A continuación pretendemos hacer plausible la idea que la evolución de un sistema integrable no cubre la totalidad del espacio de fase (de $2N$ dimensiones) sino un subespacio de éste y además que la topología de este subespacio es la de un toroide.

Recordemos que el espacio de fase asociado a los sistemas que nos interesan es compacto (ocupa un volumen finito), conectado (siempre podemos volver al punto de partida) y además existen N funciones $F_m(q, p)$ definidas en este espacio que representan las N cantidades conservadas. Estas cantidades conservadas deben estar en involución, es decir su paréntesis de Poisson debe anularse:

$$[F_k, F_l] = 0.$$

Geométricamente esto significa que al desplazarme a lo largo de una de ellas, digamos $F_k = f_k = \text{constante}$ y después desplazarme a lo largo de $F_l = f_l = \text{constante}$, llego al mismo punto que si hago el recorrido intercambiando el orden, es decir viajando a lo largo de F_l primero y F_k después.

Por otra parte el sistema (o la partícula) en su evolución recorre este espacio de N dimensiones. La evolución ocurre mediante el Hamiltoniano que lo designamos, por conveniencia, $H \equiv F_1(q, p) = f_1$. Las ecuaciones de Hamilton determinan la evolución del sistema:

$$\dot{q}_k = [H, q_k], \quad \dot{p}_k = [H, p_k],$$

pero además, por la condición impuesta anteriormente, ocurre que $[H, F_k] = [F_1, F_k] = 0$, de modo que la órbita del sistema se mantiene en el subespacio generado por las N cantidades conservadas F_k . Como este es un sistema Hamiltoniano, salvo un conjunto de medida cero, todas las órbitas evolucionan en forma suave sin presentar singularidades, para cualquiera de sus valores iniciales. Aquí debemos recurrir a un teorema topológico que establece que un espacio compacto, conectado, paralelizable con N campos vectoriales linealmente independientes, es un N -toroide. Los N vectores corresponden a las tangentes a cada una de las curvas generadas por las respectivas funciones F_k .

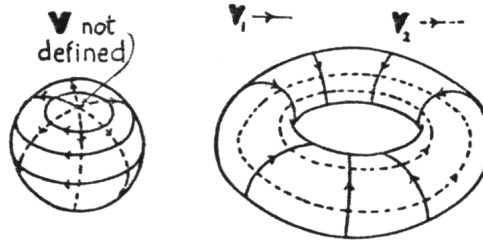


Figura IV.5: Las superficies no pueden tener la topología de una esfera porque en ellas no es posible *peinarlas* sin crear un remolino (o topológicamente hablando, una singularidad de coordenadas) en un punto. la situación es diferente si la trayectoria se desliza sobre un toroide.

Nos corresponde esclarecer el significado de los nuevos momentos I_k mencionados en la sección anterior. En el siguiente párrafo nos referiremos a cómo obtener las nuevas coordenadas que describen en forma natural el toroide mencionado.

Supongamos que utilizando las constantes de movimiento

$$F_m(\vec{q}, \vec{p}) = f_m = \text{Constantes, con } m = 1, 2, \dots, N,$$

puedo definir un nuevo momento P_σ tal que sea igual a una combinación lineal de las cantidades conservadas $F_\sigma(q_\sigma, p_\sigma)$. En las ecuaciones que escribimos a continuación suponemos que es igual a cada una de las constantes. Esto es, sin embargo, un caso particular.

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q}_\sigma &= \frac{\partial H}{\partial P_\sigma} = \text{Constante} \\ \dot{P}_\sigma &= -\frac{\partial H}{\partial Q_\sigma} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Esto es así porque los P_σ son constantes de movimiento y de este modo las variables conjugadas Q_σ no pueden aparecer en el nuevo Hamiltoniano. De la misma forma como el hamiltoniano depende sólo de los P_σ que son constantes de movimiento, se pueden integrar:

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q} &= \text{constante } t + Q_o \\ \dot{P} &= C^{te} \end{aligned} \right\}$$

Hemos supuesto que las nuevas variables satisfacen las ecuaciones de Hamilton. Esto supone que los cambios de coordenadas son transformaciones canónicas. A continuación *indicamos* (no es una justificación matemática) la receta para hacer estas transformaciones de coordenadas y lograr esta descripción tan favorable del sistema.

IV.6. La acción como función de las coordenadas y el tiempo

Antes de indicar la forma canónica de obtener las variables angulares y de acción en un problema específico, debemos revisar algunas propiedades de la acción S y su dependencia en las coordenadas cuando en su variación permitimos que la coordenada en el punto final pueda ser variada y no permanezca fija como hemos supuesto anteriormente.

Hemos definido la acción como:

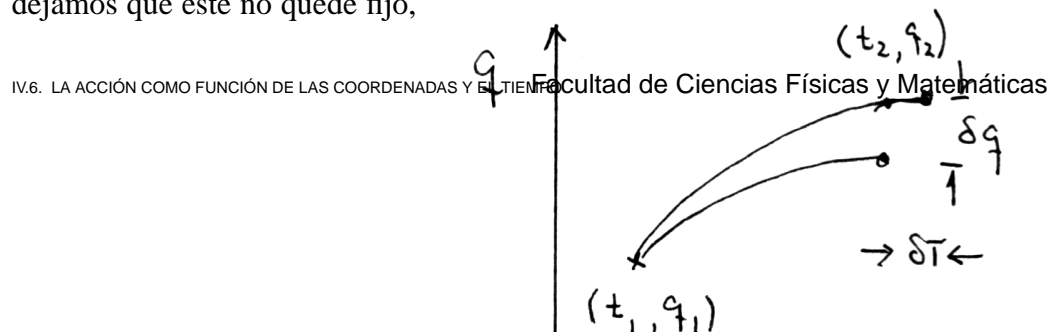
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

una pequeña variación de la acción está dada por:

$$\delta S = \delta q_\sigma \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} \right] dt$$

A lo largo de una órbita (es decir una trayectoria a lo largo de la cual se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange), el segundo término es nulo, de modo que la variación se reduce a: $\delta S = \dot{q}_\sigma p_\sigma \Big|_{t_1}^{t_2}$

La acción depende de la coordenada en el punto extremo si dejamos que éste no quede fijo,



es decir que $\delta q \neq 0$ en $t = t_2$.
El tiempo final t_2 lo mantenemos constante, de modo que:

$$\frac{\partial S}{\partial q_\tau} = p_\tau, \quad \frac{dS}{dt} = L.$$

Por otra parte, la acción depende de las constantes de movimiento y de la variación de las coordenadas

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial S}{\partial t} \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= L - p_\sigma \dot{q}_\sigma = -H \end{aligned}$$

$$\frac{dS}{dt} = p_\sigma \dot{q}_\sigma - H$$

$$S = \int p_\sigma dq_\sigma - \int H dt$$

Recordemos que la repetición de índices indica una sumatoria.

Ejemplo

Se demostró que la acción S es una función de las coordenadas y del tiempo.

$$S = \int p dq - Et = \int L dt$$

de manera que

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -E.$$

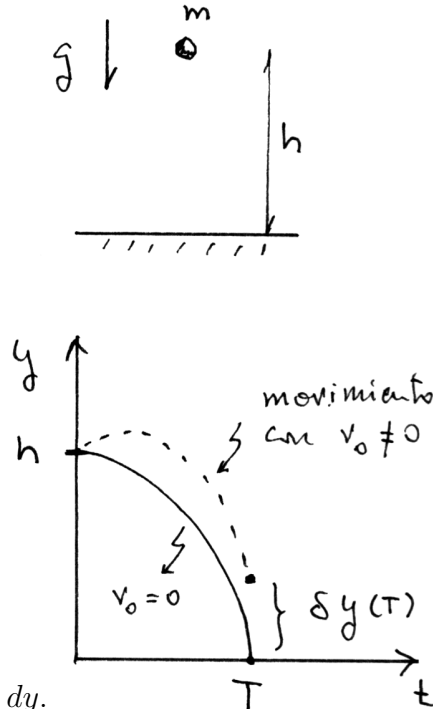
A continuación se propone *verificar* esta expresión para el caso de una partícula en un campo gravitacional constante (caída libre en una dimensión).

Suponga que las coordenadas del punto inicial son $t = 0$, $y = h$, y las correspondientes al punto de llegada $t = T$ e $y = 0$.

Las variaciones permitidas de las trayectorias se reducen a cambiar la velocidad inicial, y de esta forma obtener $\delta y(T) \neq 0$.

[a)] En el caso mencionado, evalúe la integral:

$$\int_0^T p_y dy.$$



Expresa el resultado en función de m , g y T . La velocidad inicial es nula.

[b)] Calcule $S = \int L dt$ directamente. Expresa su resultado de forma tal que, haciendo las identificaciones pertinentes, adquiera la forma:

$$S = -ET + \int p dy$$

Recuerde que la velocidad inicial es nula.

[c)] Si se introduce una velocidad inicial v_o en el punto de partida, el valor de la acción S' para este caso. Compare con el anterior (parte b) y verifique que se cumple

$$\delta S = S' - S = \delta ET - p(T) \delta y(T),$$

haciendo las identificaciones correspondientes. Recuerde que el intervalo T , no se altera.

Las fórmulas necesarias:

$$v^2 = v_o^2 - 2 g h, \quad v(t) = v_o - g t \quad y(t) = h + v_o t - \frac{g t^2}{2}$$

[a)]

$$\begin{aligned} \int p dy &= \int m \dot{y} (dy) = - \int_h^o \sqrt{2g(h-y)} dy \\ &= +\sqrt{2g} \int_o^h \sqrt{u} du = +\sqrt{2g} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_o^h \\ &\quad \uparrow \\ &\quad u = h - y \\ \int p dy &= \frac{2}{3} \sqrt{2g} h^{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{2gh} h \end{aligned}$$

pero $h = \frac{1}{2} g T^2$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \sqrt{2gh} \cdot h &= \frac{2}{3} \sqrt{2g \frac{1}{2} g T^2} \frac{1}{2} g T^2 \\ &= \frac{1}{3} g^2 T^3 \end{aligned}$$

[b)]

El Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - m g y, \quad \text{de modo que}$$

$$S = \int_0^T \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - m g y \right) dt.$$

Como las trayectorias permitidas, obedecen las ecuaciones de movimiento, se cumple que

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2, \quad \dot{y}^2 = 2g(h - y).$$

Reemplazando estas ecuaciones en S e integrando en el tiempo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^T \frac{1}{2} m [2g(h - y)] - mg y] dt \\
 &= \int_0^T mg h dt - 2 \int_0^T mg y dt \\
 S &= mg h T - 2mg \int_0^T y dt \\
 S &= mg h T - 2mg \int_0^T (h - \frac{1}{2} g t^2) dt \\
 &= mg h T - 2mg h T + mg^2 \frac{T^3}{3}
 \end{aligned}$$

$$S = -mg h T + mg^2 \frac{T^3}{3}, \quad E_o = m g h$$

De este modo se identifican cada uno de los términos.

[c)]

Como en este caso la velocidad inicial no es nula, las fórmulas de cinemática necesarias son:

$$\begin{aligned}
 v^2 &= v_o^2 + 2g(h - y) \\
 y &= h + v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \\
 \dot{y} &\equiv v = +v_o - g t
 \end{aligned}$$

El nuevo valor de la acción debido a la presencia de la velocidad inicial v_o , (con $v_o > 0$, para ser más concreto) y manteniendo el intervalo T

$$S' = \frac{m}{2} \int_0^T [\dot{y}^2 - 2g y] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m}{2} \int_0^T [v_o^2 - 2gy - 2g v_o t + g^2 t^2] dt \\
\frac{2}{m} S' &= \int_0^T [v_o^2 - 2g(h + v_o t - \frac{1}{2} g t^2) - 2g v_o t + g^2 t^2] dt \\
&= v_o^2 T - 2g h T - 2g v_o T^2 + \frac{2}{3} g^2 T^3 \\
S' &= \frac{m v_o^2}{2} T - mg h T - mg v_o T^2 + \frac{mg^2 T^3}{3}
\end{aligned}$$

usando $gT = -v(T) + v_o$ obtenemos

$$\begin{aligned}
S' &= \frac{m v_o^2}{2} T - mg h T - m v_o (v_o - v) T + \frac{mg^2 T^3}{3} \\
&= -[\frac{1}{2} m v_o^2 + mg h] T + m v_o v T + \frac{mg^2 T^3}{3} \\
y(T) &= h + v_o T - \frac{1}{2} g T^2 = v_o T \\
S' &= -E' T + m v y(T) + \frac{m g^2 T^3}{3} \\
&\text{tomando la diferencia entre ambas acciones, tenemos} \\
S' - S &= \delta S = -T \delta E + p(T) \delta y(T)
\end{aligned}$$

A partir de este resultado pareciera que

$$\delta S = -T \delta E + p(T) \delta y(T) \quad \text{y no} \quad \delta S = p(T) \delta y(T)$$

como era de esperar. La razón es simple, si consideramos pequeñas variaciones de las trayectorias, entonces debemos poner el cambio de velocidad inicial como $v_o \rightarrow \epsilon v_o$, con $\epsilon \ll 1$. Con este antecedente, tenemos que la energía que aparece en el primer término de la variación de la acción es cuadrática en ϵ y debe ser desechada puesto que los resultados son válidos a primer orden. Una vez usada esta información vemos que la fórmula obtenida al comienzo se cumple.

Si consideramos sólo el primer término de esta expresión de la acción:

$$S_o = \int p_\sigma dq_\sigma, \quad (\text{IV.13})$$

Esta expresión para S_o se denomina la función generadora de transformaciones canónicas y corresponde a la función que necesitamos en este caso como se describe a continuación.

Aceptando el resultado acerca de la topología toroidal asociada a este tipo de problemas, podemos imaginar que integramos la expresión S_o a lo largo de una de las secciones transversales del toroide γ_i , de este modo

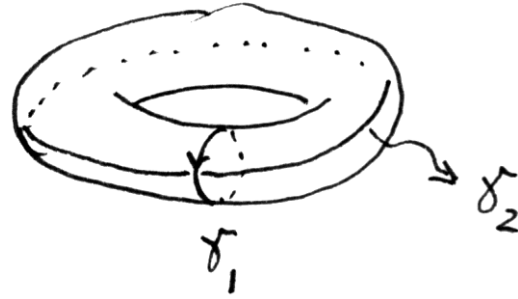
$$\Delta S_o^i = \oint_{\gamma_i} p_\sigma dq_\sigma$$

Definimos el nuevo momento

$P_i \equiv I_i$ como

$$2\pi I_i \equiv \Delta S_o^i = \oint_{\gamma_i} p_\sigma dq_\sigma$$

La letra I_i en lugar de P_i indica que es un invariante asociado a la curva γ_i . La función generadora S_o^i no es una función univaluada, al dar una vuelta alrededor de la curva γ_i cambia su valor en ΔS_o^i .



Podemos ver que esta expresión S_o es una función de las cantidades conservadas del problema, a partir de la ecuación IV.13:

$$S_o = \int p_\sigma(f_m, q) dq_\sigma$$

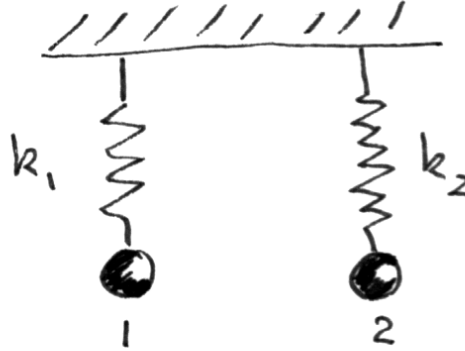
donde los f_m representan las constantes de movimiento de esta trayectoria, y lo que se ha hecho es despejar los p_σ en función de las coordenadas q_σ y las f_m .

Una vez conocidos los I_i , tenemos el problema resuelto.

Ejemplo

Por ejemplo el oscilador armónico en 2-dimensiones, tiene dos cantidades conservadas, las energías de cada uno de los osciladores. Como $N = 2$, el sistema resulta totalmente integrable.

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_1^2 q_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2 q_2^2}{2} \\
 F_1 &\equiv \frac{p_1^2}{2} + \frac{\omega_1^2 q_1^2}{2} \\
 F_2 &\equiv \frac{p_2^2}{2} + \omega_2^2 q_2^2
 \end{aligned}$$



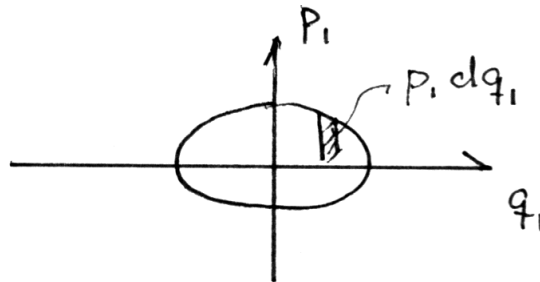
Sabemos que F_1 y F_2 son cantidades conservadas e independientes porque hemos resuelto el oscilador armónico con anterioridad.

Usemos este formalismo para obtener las nuevas variables I_1 e I_2 . De acuerdo a la definición:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq \\
 &= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2(F_1 - \omega_1^2 q_1^2)} \, dq_1
 \end{aligned}$$

Esta cantidad representa el área de la elipse de la Figura

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2F} \sqrt{\frac{2F}{\omega_1^2}} = \frac{F_1}{\omega_1}$$



Análogamente se puede obtener I_2 . Escribiendo el Hamiltoniano en función de estos nuevos números, tenemos:

$$H = F_1 + F_2 = I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2$$

Ejemplo

Estudiemos el caso de una partícula moviéndose dentro de una caja y rebotando elásticamente en sus paredes.

Este es un problema que cumple las condiciones de moverse en un volumen acotado del espacio de fase y tener dos cantidades conservadas. Es un sistema integrable. Las nuevas variables de acción y angulares están dadas por:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx = \frac{1}{2\pi} m|v_x| \cdot 2a$$

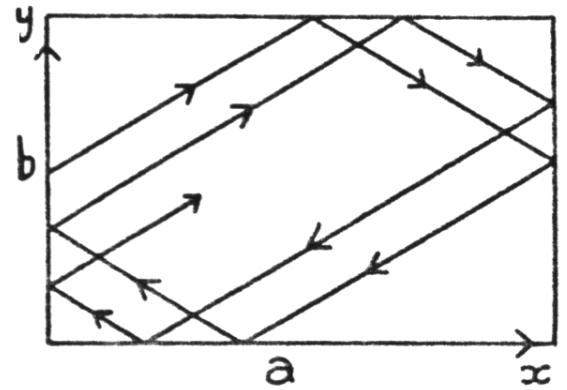
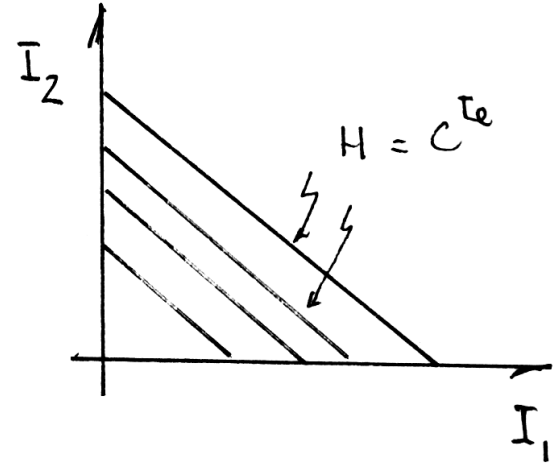
$$I_2 = \frac{1}{2\pi} m|v_y| \cdot 2b$$

$$H = \frac{m}{2} [|v_x|^2 + |v_y|^2]$$

$$= \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{I_1^2}{a^2} + \frac{I_2^2}{b^2} \right)$$

$$\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \frac{\pi^2}{ma^2} I_1$$

$$\omega_2 = \frac{\pi^2}{mb^2} I_2$$



La expresión para las series de Fourier no es un accidente de este problema. Es una regla general, las frecuencias asociadas a la variable angular constituyen la frecuencia fundamental encontrada en la variable angular y las coordenadas iniciales son descritas como una superposición de frecuencias múltiplos de la fundamental.

$$x_k(t) = \sum A_m e^{im\omega_k t + \phi_m}$$

con $k=1,2$. Lo mismo se repite para los momentos.

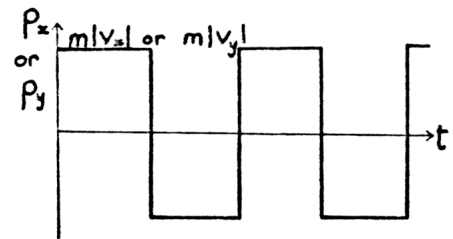
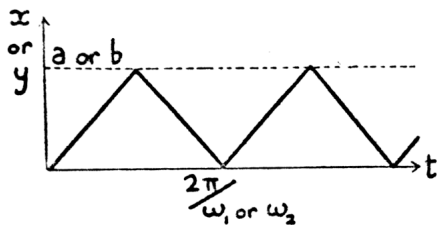
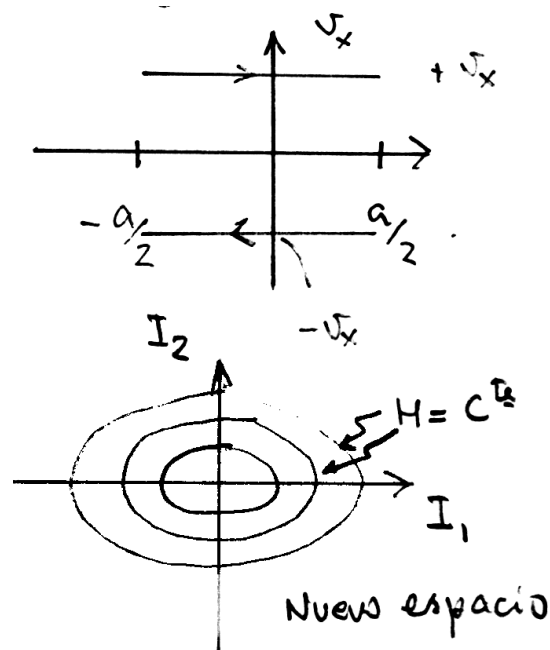


Figura IV.6: La coordenada inicial $x(t)$ (o $y(t)$) puede ser expresada a través de una serie de Fourier correspondiente a un diente de sierra. Análogamente, el momento en función del tiempo es una serie de Fourier de una función escalón.

IV.7. Ejercicios

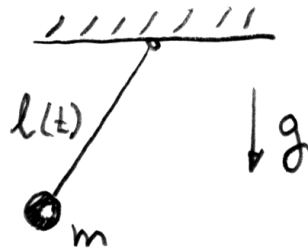
- 1.- El Lagrangiano asociado a una partícula de masa m que se ha lanzado verticalmente hacia arriba, lejos de la superficie de la Tierra, es:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{G M m}{(R + z)},$$

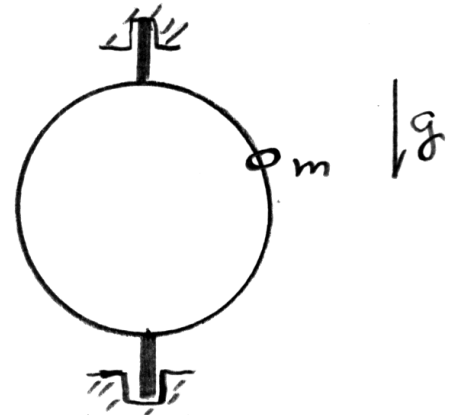
donde $G \equiv$ es la constante de gravitación, M y R , representan la masa y el radio de la Tierra y z altura de la partícula sobre la superficie de la Tierra.

Encuentre el Hamiltoniano asociado y dibuje, en forma cualitativa, las trayectorias en el diagrama de fase, indicando en qué región el movimiento está confinado a una región finita y qué trayectorias pueden escapar hasta infinito.

- 2.- Encontrar el Hamiltoniano asociado a una partícula que oscila bajo el efecto de la gravedad hallándose unida por medio de una cuerda de largo variable $\ell(t)$. Suponga que el movimiento se encuentra confinado a un plano vertical y que $\dot{\ell} = \text{Constante}$.



Problema #2

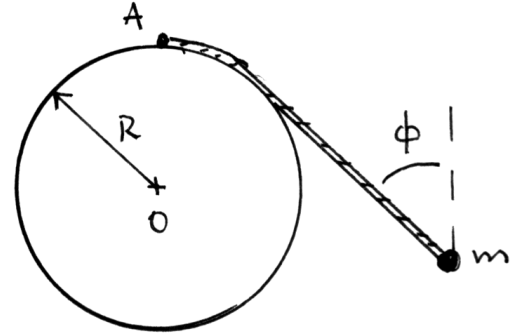
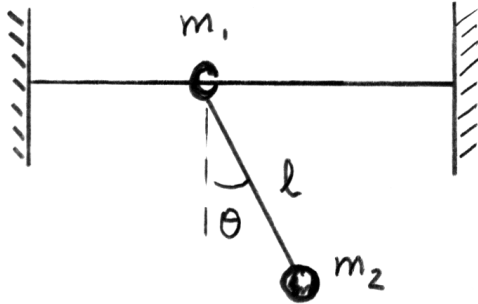


- 3.- Una partícula está restringida a deslizarse siguiendo la trayectoria de un anillo de radio R que rota con velocidad angular constante ω . Si todo el sistema se encuentra en un medio con gravedad constante g muestre que el Hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2mR^2} - m\left(\frac{1}{2}R^2\omega^2 \sin^2 \psi + gR \cos \psi\right)$$

donde ψ es el desplazamiento angular de la partícula con respecto al eje de la rotación. Determine también los puntos fijos del sistema.

- 4.- Un péndulo de masa m_2 y largo L se puede mover en un plano. El punto de soporte está unido a una masa m_1 la cual puede moverse en una línea horizontal en el mismo plano. Encuentre el Hamiltoniano del sistema en función de las coordenadas de la figura. Obtenga las ecuaciones de movimiento.



- 5.- Se construye un péndulo atando una masa m al extremo de una cuerda inextensible de largo ℓ . El otro extremo de la cuerda está fijo al punto más alto de un cilindro horizontal de radio R con $R < 2\ell/\pi$, como se muestra en la Figura. Asumiendo que el movimiento está confinado a un plano vertical que pasa por A y es perpendicular al eje del cilindro y que la cuerda forma un ángulo ϕ con la vertical, muestre que el Hamiltoniano del sistema es:

$$H(\phi, p) = \frac{p^2}{2m(R\phi - 1)} - mg[R(1 - \cos \phi) + (\ell - R\phi) \sin \phi]$$

donde $\phi + \psi = \frac{1}{2}\pi$ y $p = m\dot{\phi}(R\phi - \ell)$. Demuestre que la frecuencia angular para pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio es:

$$\omega = [g/(\ell - \frac{1}{2}R\pi)]^{1/2}.$$

- 6.- La figura IV.7 muestra un marco con momento de inercia $I_z = I$ dentro de este marco hay un péndulo que sólo puede oscilar en el plano del marco. El marco puede girar libremente en torno al eje \hat{z} . El péndulo tiene largo ℓ y una masa m . Encontrar:

- El Hamiltoniano del sistema.
- Las ecuaciones de Hamilton de movimiento.
- Encontrar los puntos fijos del sistema.

Indicación: la energía cinética de un sólido rotando alrededor de un eje fijo con velocidad angular ω es:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

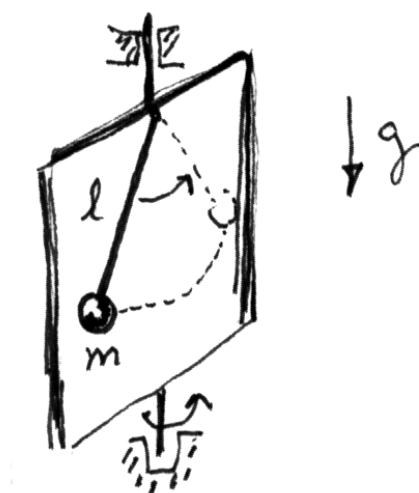


Figura IV.7: Problema 6

7.- El Lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético está dado por:

$$L = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] + \frac{e}{c} [A_x \dot{x} + A_y \dot{y} + A_z \dot{z}] - e\Phi$$

donde \vec{A} y Φ dependen sólo de las coordenadas x, y, z .

El campo magnético \vec{H} y el campo eléctrico \vec{E} están dados por:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi, \quad \vec{H} = \nabla \times \vec{A}$$

Escriba explícitamente el momentum de este sistema. Encontrar el Hamiltoniano de esta partícula.

8.- El Hamiltoniano de un sistema de una dimensión es: $H = p^2/2 - 1/(2q^2)$. Demuestre que $D = pq/2 - Ht$ es una constante de movimiento.

9.- El Hamiltoniano de un sistema tiene la forma:

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{q^2} + p^2 q^4 \right].$$

a) Encuentre la ecuación de movimiento para q .

b) Encuentre una transformación canónica que reduce H a la forma de asociada a un oscilador armónico. Muestre que la transformación de variables satisface la ecuación de movimiento encontrada en a) para la variable q .

10.- Dibuje cualitativamente la evolución en el tiempo del sistema de partículas que se indica en la figura IV.8. Las partículas *no* interactúan entre ellas –pasan una sobre la otra sin afectarse– y se mueven en una dimensión espacial. Suponga que las partículas rebotan con una velocidad $e|v_o|$, con $0 < e < 1$, si inciden con una velocidad $|v_o|$ sobre la pared.

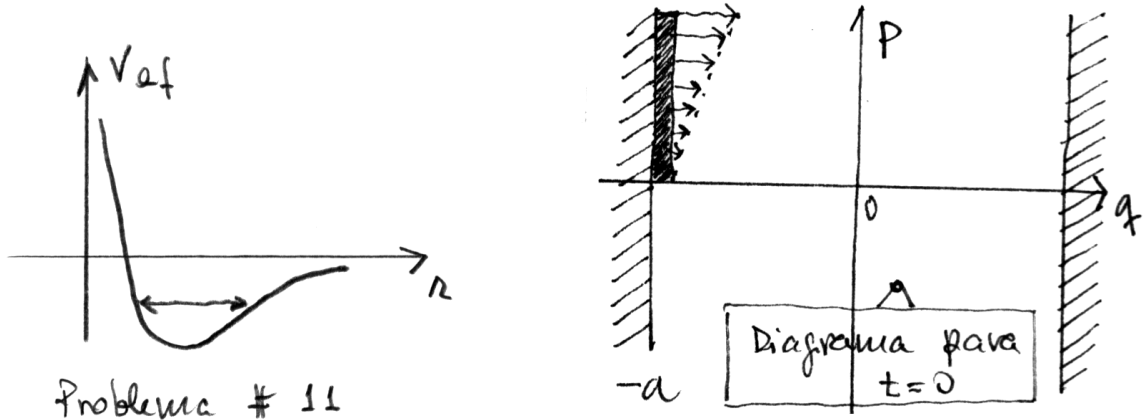


Figura IV.8: Problemas 10 y 11

11.- Utilizando el formalismo de las variables angulares y de acción, encuentre el hamiltoniano $H = H(I_1, I_2)$ asociado al movimiento de un cuerpo puntual bajo el efecto de una fuerza central descrita por el potencial $V(r) = -k/r$. El movimiento ocurre en un plano.

Problema Adicional Resuelto

Para el péndulo de la figura, compuesto por un resorte de constante k , largo natural ℓ_o y una esfera de masa m , se pide encontrar las ecuaciones de movimiento en una vecindad a las posiciones de equilibrio y dibujar el diagrama de fase.

Nota:

- Considerar la aceleración de gravedad g .

- El movimiento está contenido en el plano vertical. **Solución:**

Las coordenadas generalizadas son $q_1 = \theta$, $q_2 = r$.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \text{por lo tanto:}$$

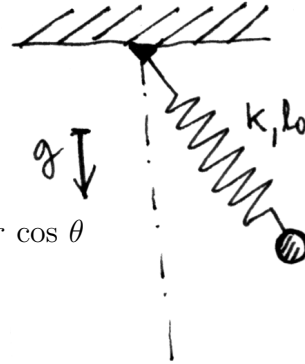
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad U = \frac{1}{2}k(r - \ell_o)^2 - m g r \cos \theta$$

donde

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \\ y &= -r \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} &= -\dot{r} \cos \theta + r\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\text{luego} \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$$



$$\text{Lagrangiano} \quad \equiv \quad L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(r - \ell_o)^2 + m g r \cos \theta$$

$$\text{Hamiltoniano} \quad \equiv \quad H = T + V$$

Si deseamos resolver este problema usando el formalismo hamiltoniano, debemos definir las cantidades de momento generalizados tanto para θ como para r :

$$\left. \begin{aligned} P_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ P_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \end{aligned} \right\} H = \frac{1}{2} \frac{P_r^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{P_\theta^2}{m r^2} + \frac{1}{2} k(r - \ell_o)^2 - m g r \cos \theta$$

luego:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = \frac{P_{\theta}}{mr^2} \quad (1)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{P_r}{m} \quad (2)$$

$$\dot{P}_{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta \quad (3)$$

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{r^3} \frac{P_{\theta}^2}{m} + k(\ell_o - r) + mg \cos \theta \quad (4)$$

Utilizando (1) y (3)

$$\Rightarrow \dot{P}_{\theta} = mgr \sin \theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr[2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta}]$$

$$\boxed{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0} \quad \text{Ecuación de movimiento para } \theta(t)$$

$$(1), (2) \text{ y } (4) \Rightarrow \dot{P}_r = \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{mr^3} - k(r - \ell_o) + mg \cos \theta = m\ddot{r}$$

$$\text{Ecuación de movimiento para } r(t) \quad \boxed{m(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r}) - k(r - \ell_o) + mg \cos \theta = 0}$$

Bibliografía

- [1] **The Strange Story of the Quantum**, Banesh Hoffmann, Dover Publications Inc. New York, 1959.
- [2] **The American Mathematical Monthly**, Vol. 110, # 7 / August–September 1994, pp. 674–678
- [3] **Thermodynamics**, Callen
- [4] **Mecánica**, L. Landau y Lipshitz
- [5] **Mechanics**, K. Symon
- [6] **Classical Mechanics**, H. Goldstein, 1980, Segunda edición.
- [7] **Hamiltonian Dynamical Systems**, R. S. MacKay and J. D. Meiss eds., (A Reprint Selection), Adam Hilger, 1987.
- [8] **Newton's Clock, Chaos in the Solar System**, Ivars Peterson, W. H. Freeman and Co., 1993.
- [9] **Mathematical Methods of Classical Mechanics**, V. I. Arnold, Springer-Verlag, New-York