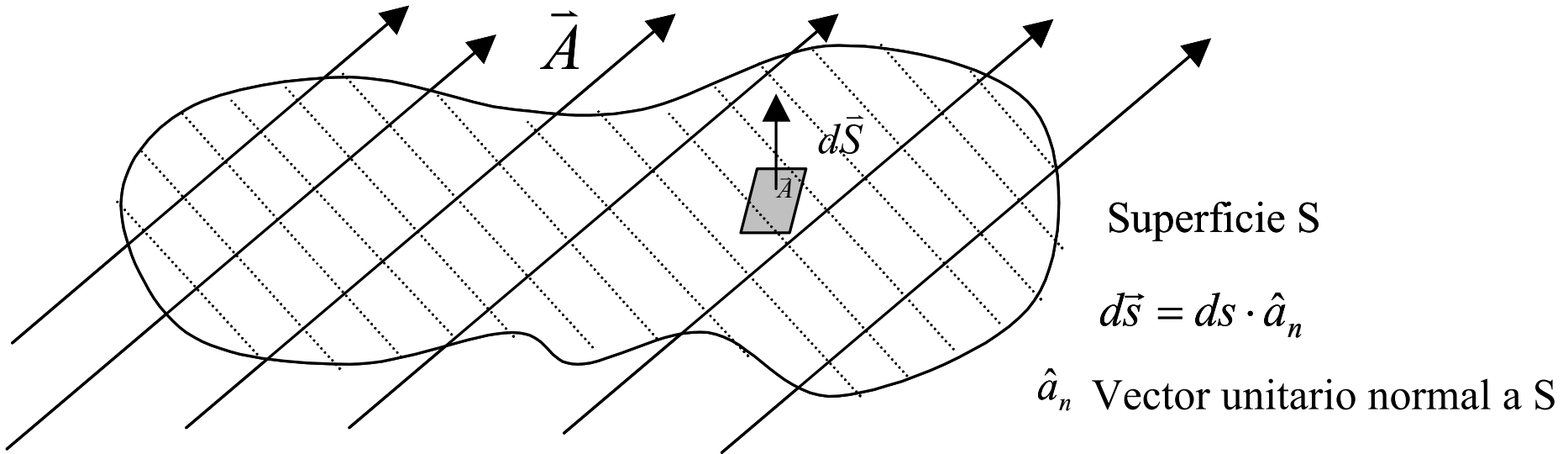


FI33A ELECTROMAGNETISMO: Clase 2

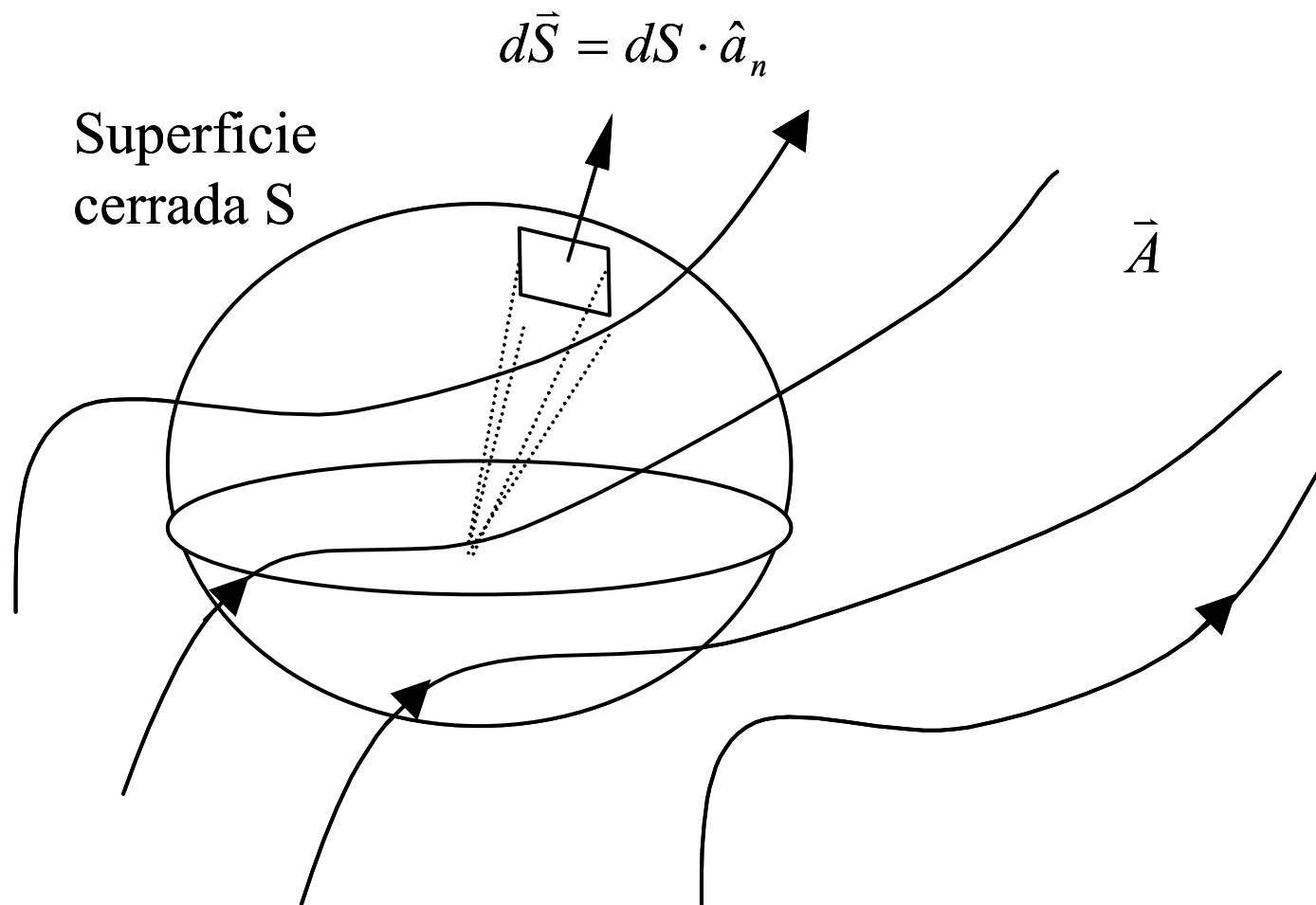
- Ley de Gauss

Conceptos matemáticos previos

Flujo. \vec{A} campo vectorial definido en todo el espacio y una superficie S



$$\Psi = \iint_S \vec{A} \bullet d\vec{s} \quad \text{flujo } \psi \text{ de } \vec{A} \text{ a través de la superficie S}$$



$$\Psi = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$d\vec{S} = dS \cdot \hat{a}_n$$

Teorema de la divergencia

$$\oiint \vec{A} \bullet d\vec{S} = \iiint_{V(s)} \nabla \bullet \vec{A} dv \quad (1.43)$$

$$\nabla = \frac{\partial \hat{i}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{j}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{k}}{\partial z}$$

Ley de Gauss

$$\Psi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total encerrada por dicha superficie (Q_T) dividida por la constante ϵ_0

Dado que

$$Q_T = \iiint_V \rho dV$$

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

Luego, por el teorema de la divergencia

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \iiint_V \nabla \bullet \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

Entonces:

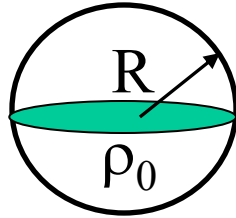
$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Definiendo el **Vector Desplazamiento** $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

(1.48) Esta ecuación es la 1ª
Ecuación de Maxwell.

Ejemplo. Calcular el campo eléctrico en todo el espacio de una distribución homogénea de carga ρ_0 dispuesta en una esfera de radio R .

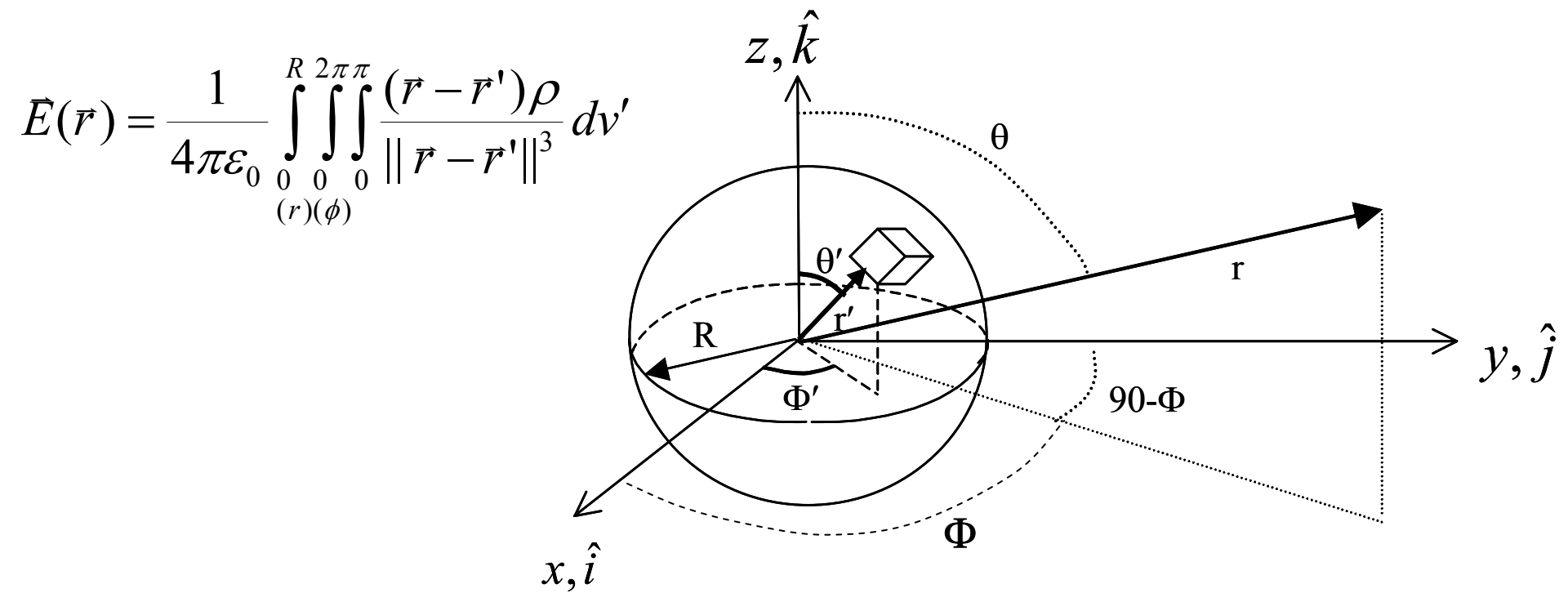


Solⁿ

1. Método tradicional

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(\vec{r} - \vec{r}')\rho}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv$$

The diagram illustrates the geometry for calculating the electric field $\vec{E}(\vec{r})$ at a point \vec{r} due to a uniformly charged sphere of radius R . The sphere is centered at the origin of a Cartesian coordinate system with axes x, \hat{i} , y, \hat{j} , and z, \hat{k} . A point \vec{r}' is shown inside the sphere, with a small volume element dv (represented by a cube) at that location. The distance from the origin to \vec{r}' is r' , and the distance from \vec{r}' to the observation point \vec{r} is $\|\vec{r} - \vec{r}'\|$. The angle between the z -axis and \vec{r}' is θ' , and the angle between the z -axis and \vec{r} is θ . The angle between \vec{r}' and \vec{r} is Φ' . The angle between the y -axis and \vec{r} is $90 - \Phi$.



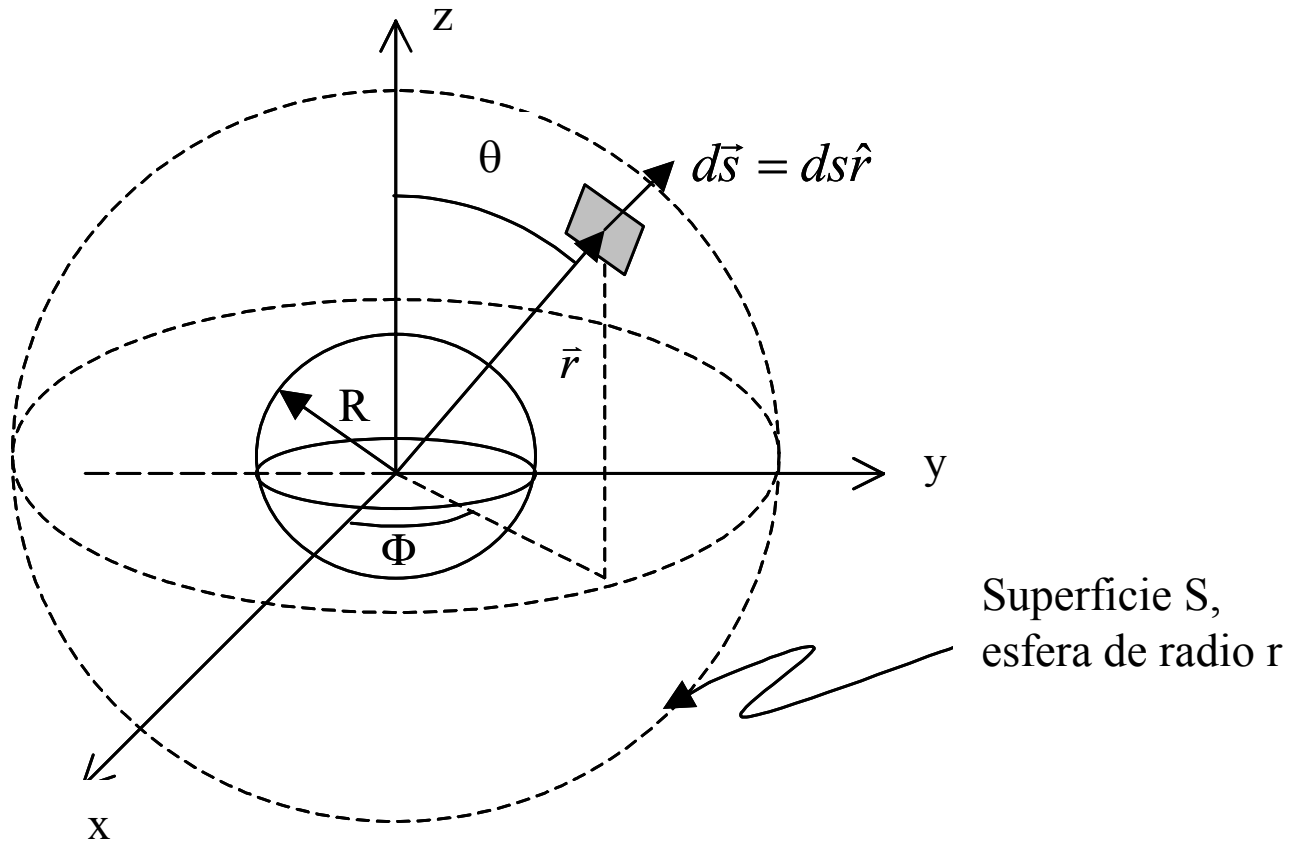
$$\vec{r}' = r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} + r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + r' \cos \theta' \hat{k}$$

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{i} + r \sin \theta \sin \phi \hat{j} + r \cos \theta \hat{k}$$

$$dv' = r' d\theta' r' \sin \theta' d\phi' dr'$$

$$dv' = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr'$$

2. Método alternativo: Ley de Gauss



Para $r > R$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

Calculemos la carga total encerrada en S.

$$Q = \iiint \rho_0 dv$$

$$Q = \int_{(r)}^R \int_{(\phi)}^{2\pi} \int_{(\theta)}^{\pi} \rho_0 r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho_0 r^2 \underbrace{(-\cos \theta)^\pi}_{1 - (-1) = 2} d\phi dr$$

$$Q = \int_0^R \rho_0 r^2 2 \cdot 2\pi dr$$

$$Q = \rho_0 \frac{R^3}{3} 4\pi$$

Por simetría $\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\hat{r}$

$$d\vec{S} = r d\theta \cdot r \sin \theta d\phi \hat{r} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(\vec{r}) \hat{r} \bullet r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\dots = \int_0^{\pi} 2\pi E(\vec{r}) r^2 \sin \theta d\theta = 2\pi E(\vec{r}) r^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta$$

$$\dots = E(\vec{r}) 2\pi r^2 [-\cos \theta]_0^{\pi} = 4\pi r^2 E(\vec{r})$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(\vec{r}) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$$\therefore E(\vec{r}) = \frac{R^3}{3r^2} \rho \hat{r}$$

- i) La ley de Gauss es útil cuando hay simetría,**
- ii) La ley de Gauss es válida para todo el espacio,**
- iii) Aplicarla requiere cierta destreza (la que se logra con práctica).**

