



FI 33A

ELECTROMAGNETISMO

1.7 POTENCIAL ELECTRICO

Luis Vargas
AREA DE ENERGIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA



INDICE

- Ecuación de Laplace,
- Campo Eléctrico Conservativo,
- Definición Dipolo

ECUACION DE LAPLACE

Teníamos

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

Tomando la divergencia

$$\nabla \bullet (\nabla V(\vec{r})) = -\nabla \bullet \vec{E}(\vec{r})$$

Usando la 1ª ecuación de Maxwell

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ecuación de Poisson

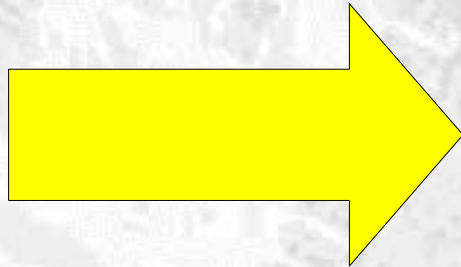
$$\nabla \bullet (\nabla V(\vec{r})) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$



$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

ECUACION DE LAPLACE

Si no hay cargas:
Ecuación de Laplace

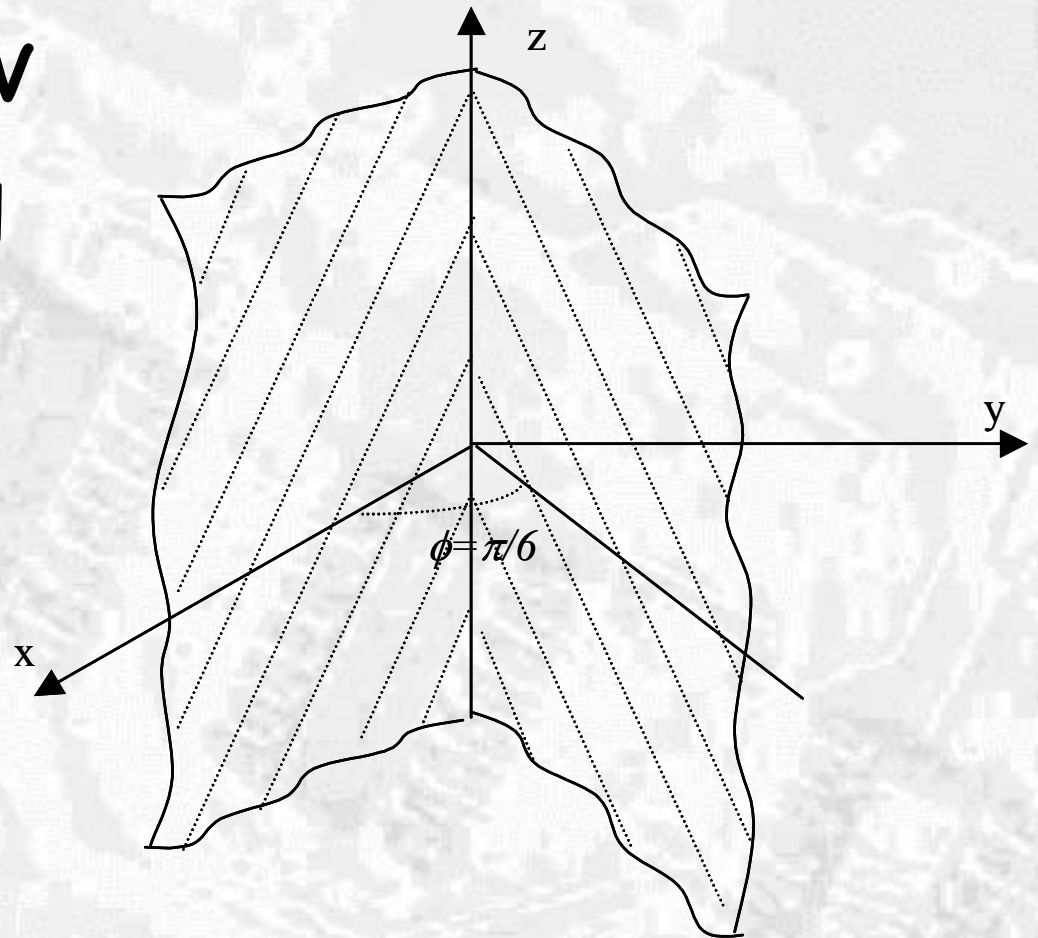


$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

ECUACION DE LAPLACE

EJEMPLO 12. Calcular V

Se sabe que el potencial en los planos semi-infinitos definidos por $V(\phi=0, \rho, z) = 0$ y $V(\phi=\pi/6, \rho, z) = 100 \text{ V}$.




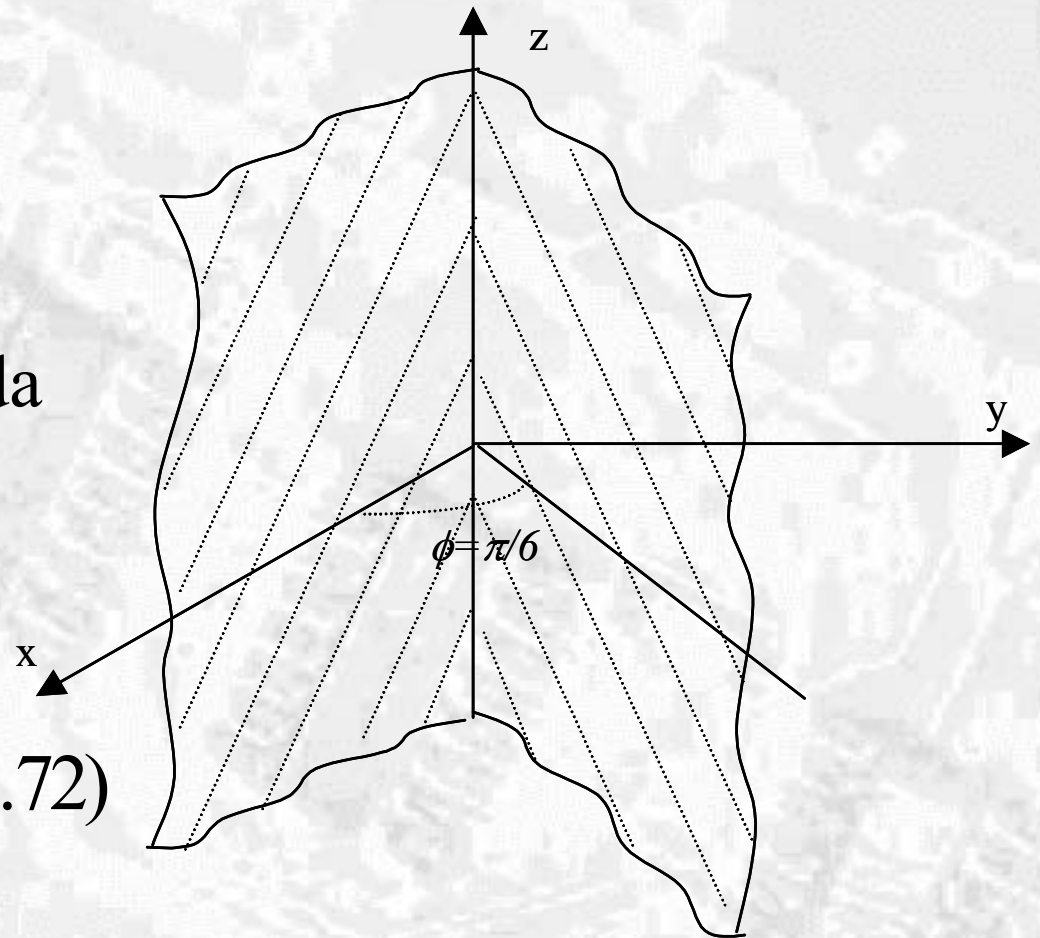
ECUACION DE LAPLACE

Solⁿ

Hay que darse cuenta que V sólo dependen de ϕ

Sólo interesa una coordenada del laplaciano (ϕ)


$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.72)$$





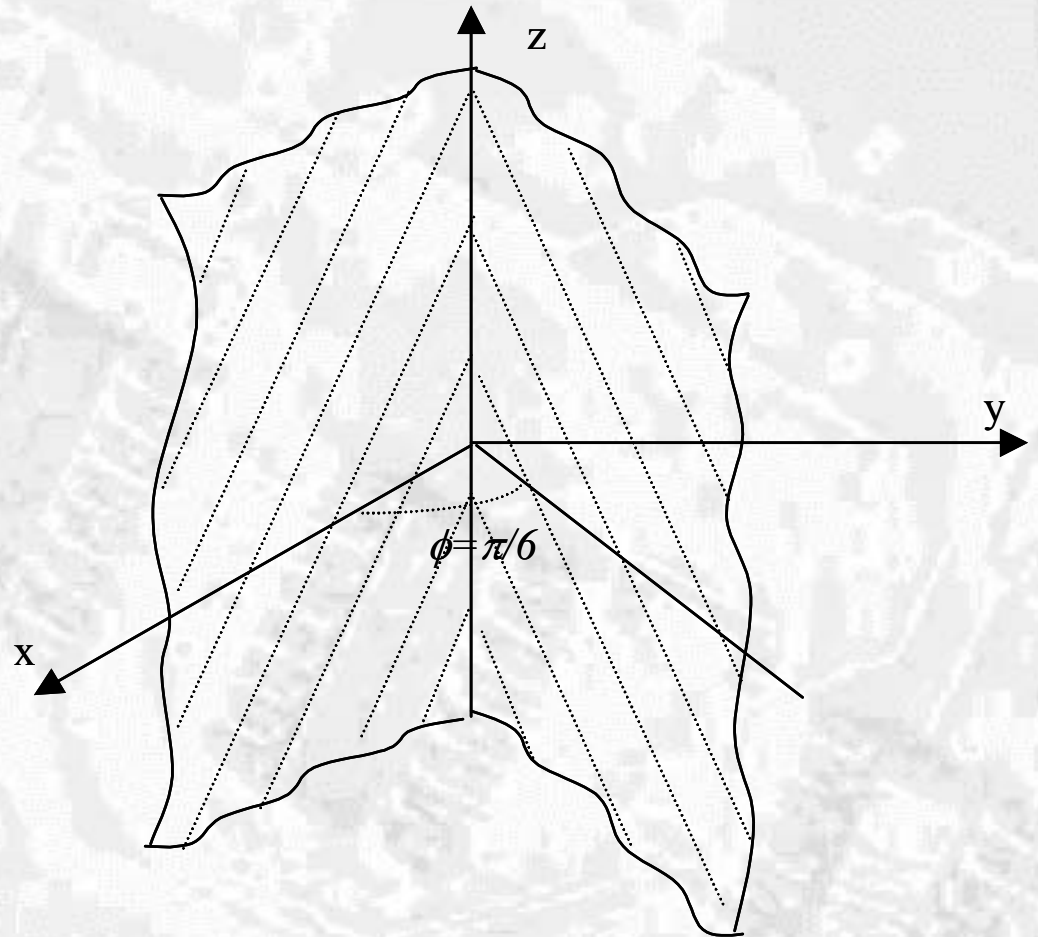
ECUACION DE LAPLACE

Luego

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.73)$$

Cuya solución es

$$V = A\phi + B$$



ECUACION DE LAPLACE

Condiciones de borde:

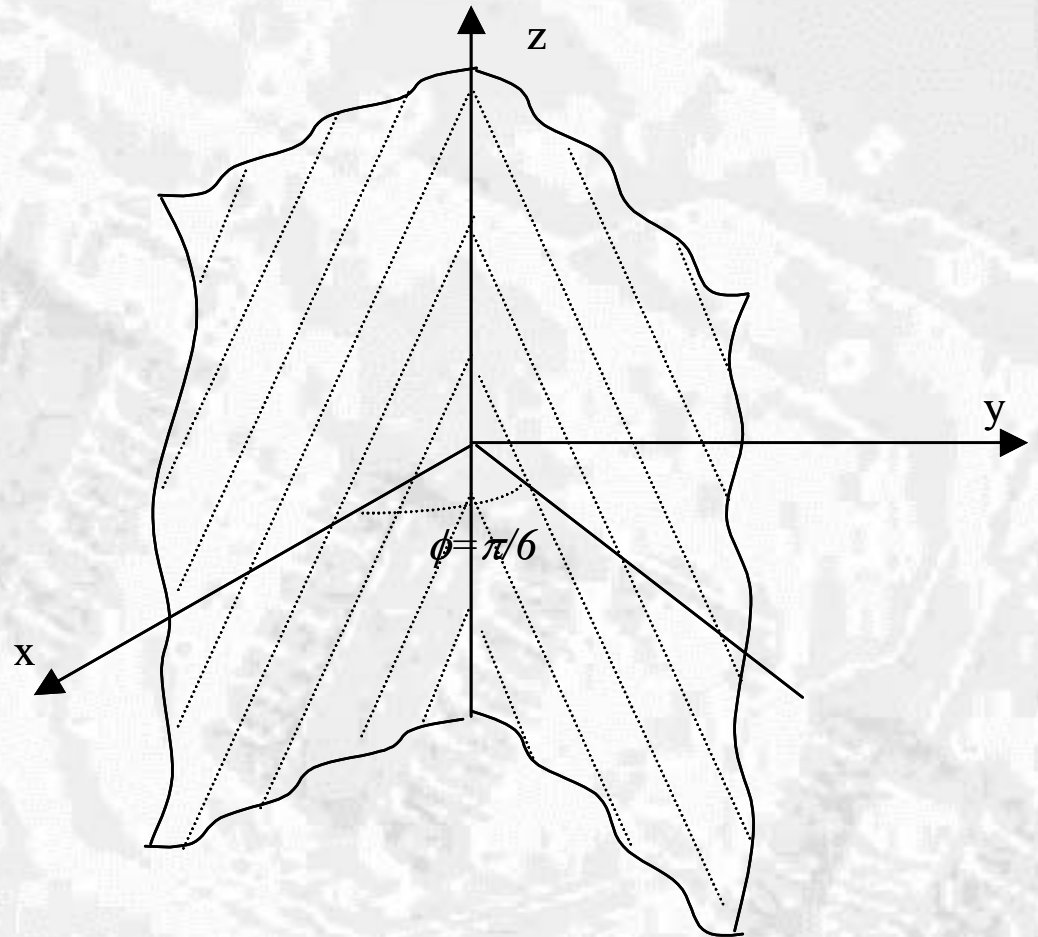
$$V(\phi=0, \rho, z) = 0$$

→ $B=0$

→ $V(\phi=\pi/6, \rho, z) = 100 \text{ V.}$

→ $100 = A \pi / 6$

$$\Rightarrow A = \frac{600}{\pi}$$



ECUACION DE LAPLACE

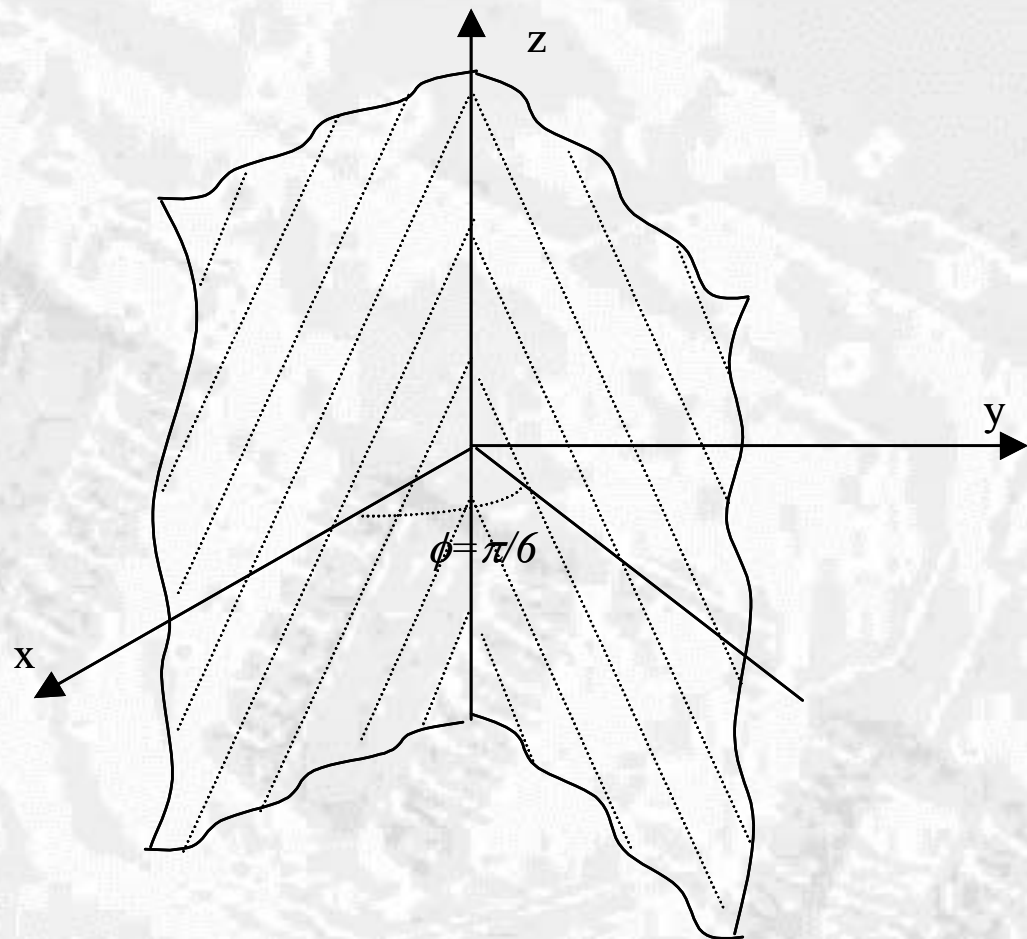
Luego el potencial es

$$V = \frac{600}{\pi} \phi$$

y el campo

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{600}{\pi \rho} \hat{\phi}$$



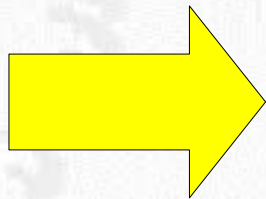
Campo Eléctrico Conservativo

Previa: Si $f(\vec{r})$ Es un campo escalar, entonces

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

luego, tomando el rotor de la ecuación

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$



$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Campo Eléctrico Conservativo

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Integrando en S

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Aplicando el
teorema de Stokes

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Donde $C(S)$ es el contorno que limita a la superficie S

Campo Eléctrico Conservativo

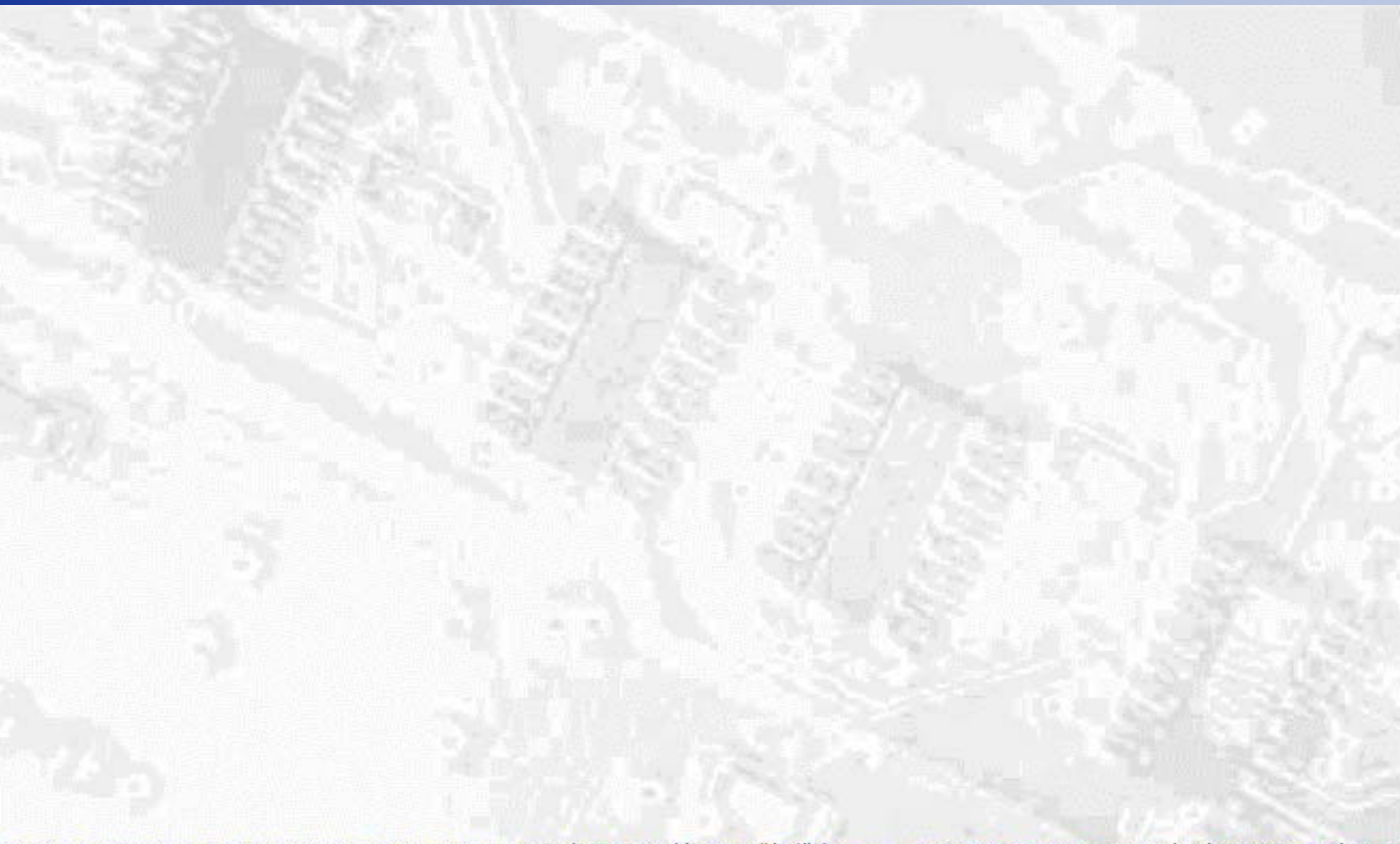
Luego

$$q \oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{C(S)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = W_{\text{neto}} = 0$$

La fuerza proveniente de un campo electroestático es una fuerza conservativa.

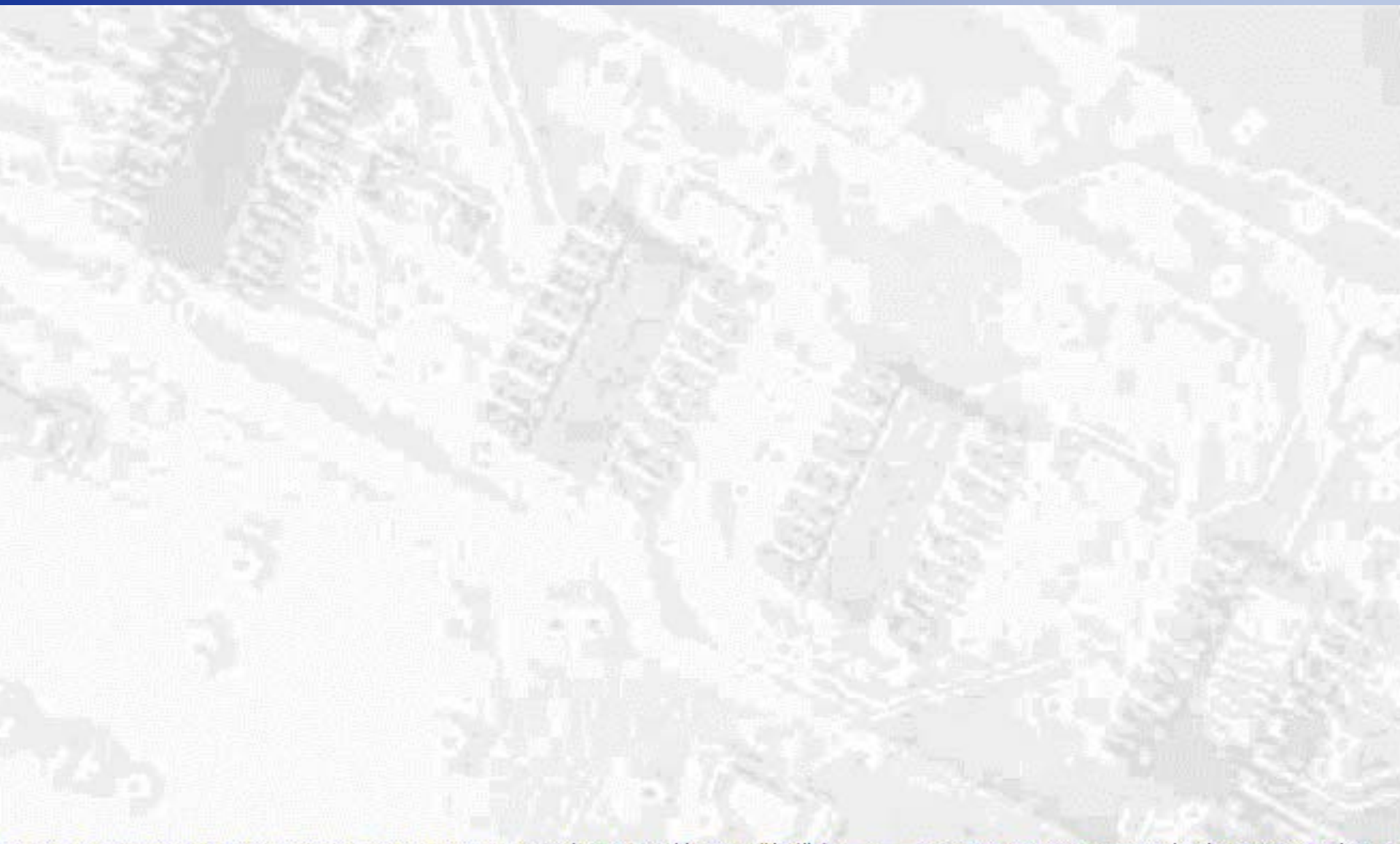


Dipolo Eléctrico





Dipolo Eléctrico

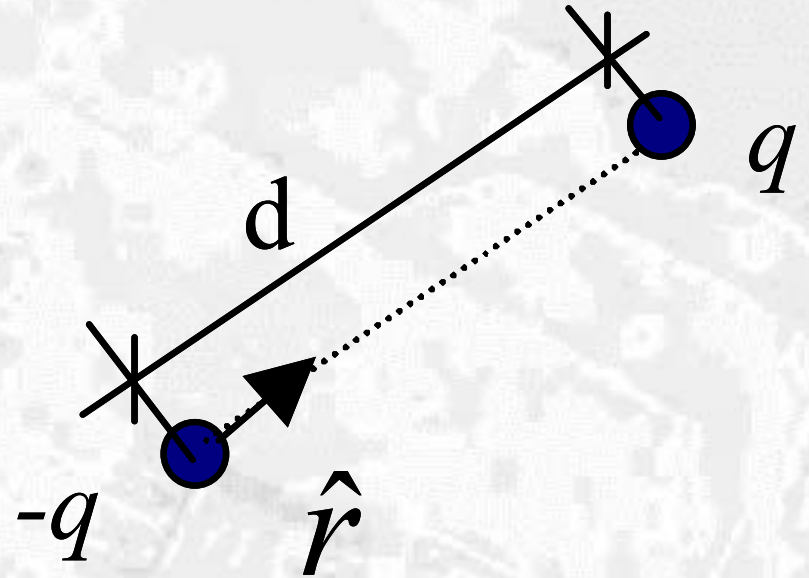




Dipolo Eléctrico

Se define el dipolo
eléctrico como

$$\vec{p} = qd\hat{r} \quad [\text{C}\cdot\text{m}]$$



Dipolo Eléctrico

Potencial eléctrico de un dipolo

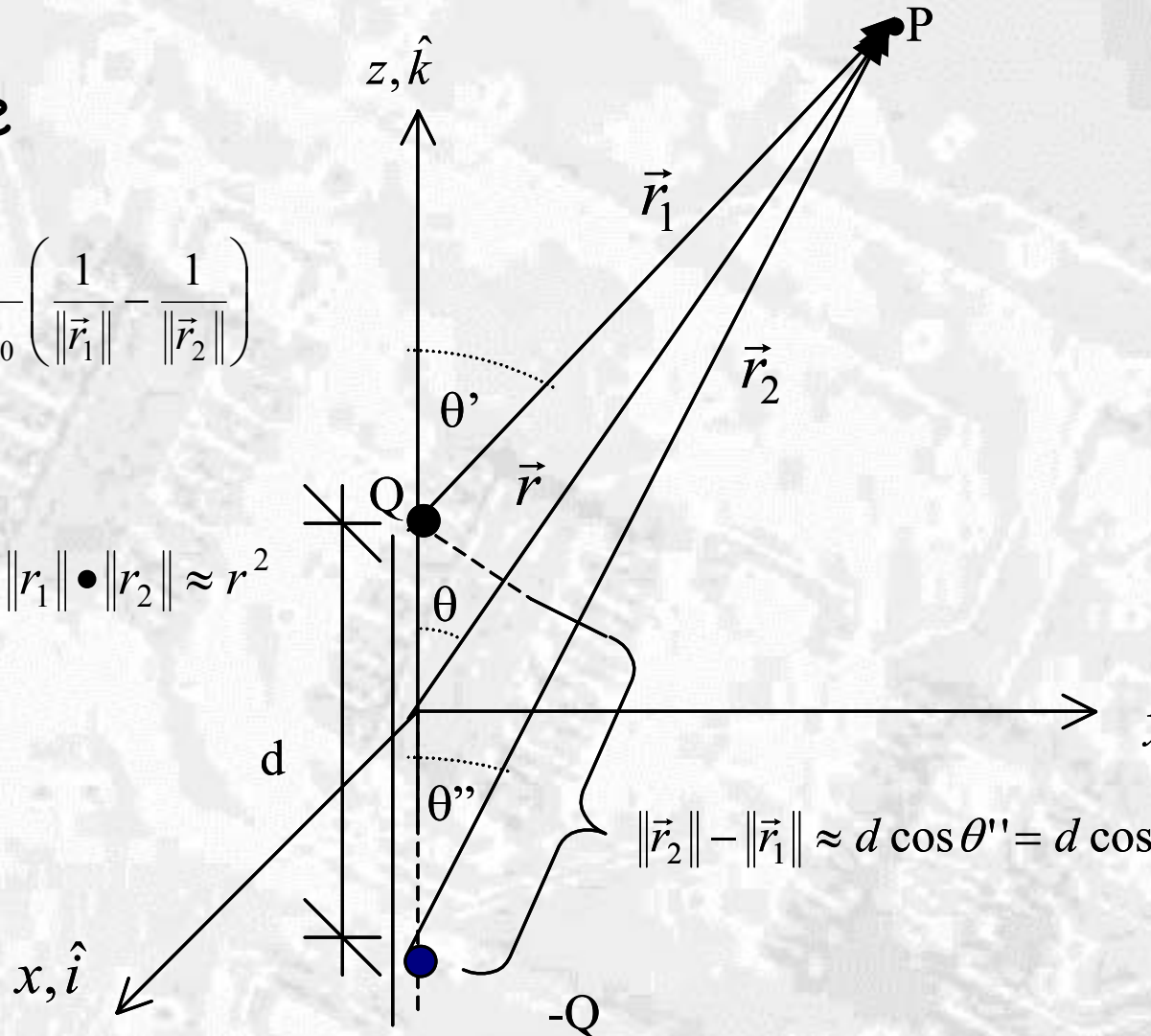
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_1\|} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_2\|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r}_1\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_2\|} \right)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\|\vec{r}_2\| - \|\vec{r}_1\|}{\|\vec{r}_1\| \|\vec{r}_2\|}$$

$$\bullet \|\vec{r}_2\| \approx (r - \Delta)(r + \Delta) = r^2 - \Delta^2 \Rightarrow \|\vec{r}_1\| \bullet \|\vec{r}_2\| \approx r^2$$

$$r_2 - r_1 = d \cos \theta$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{d \cos \theta}{r^2} \right] \quad (1.79)$$



Dipolo Eléctrico

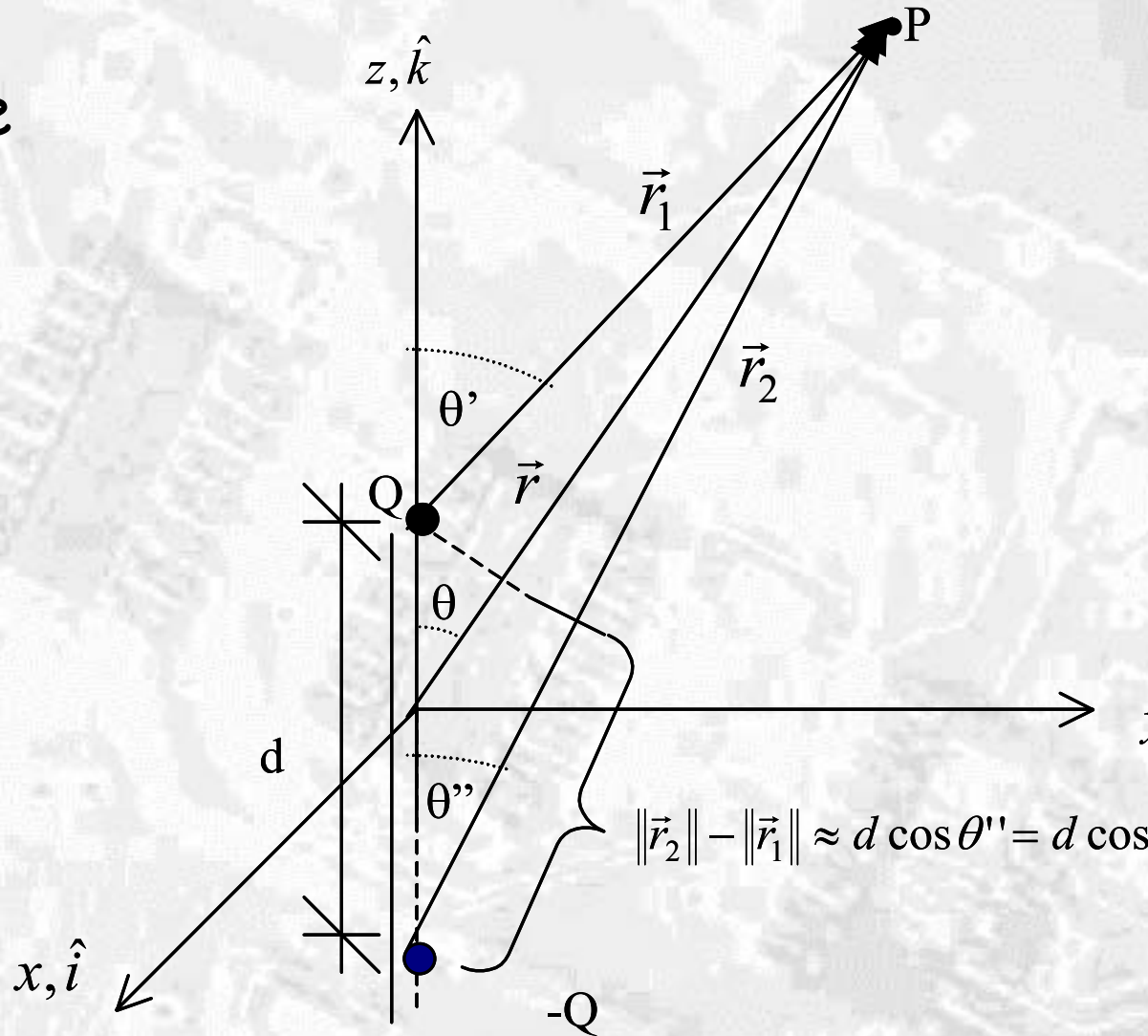
Potencial eléctrico de
un dipolo

$$r_2 - r_1 = d \cos \theta$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{d \cos \theta}{r^2} \right] \quad (1.79)$$

$$d \cos \theta = d \hat{k} \bullet \hat{r}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \bullet \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^2}$$



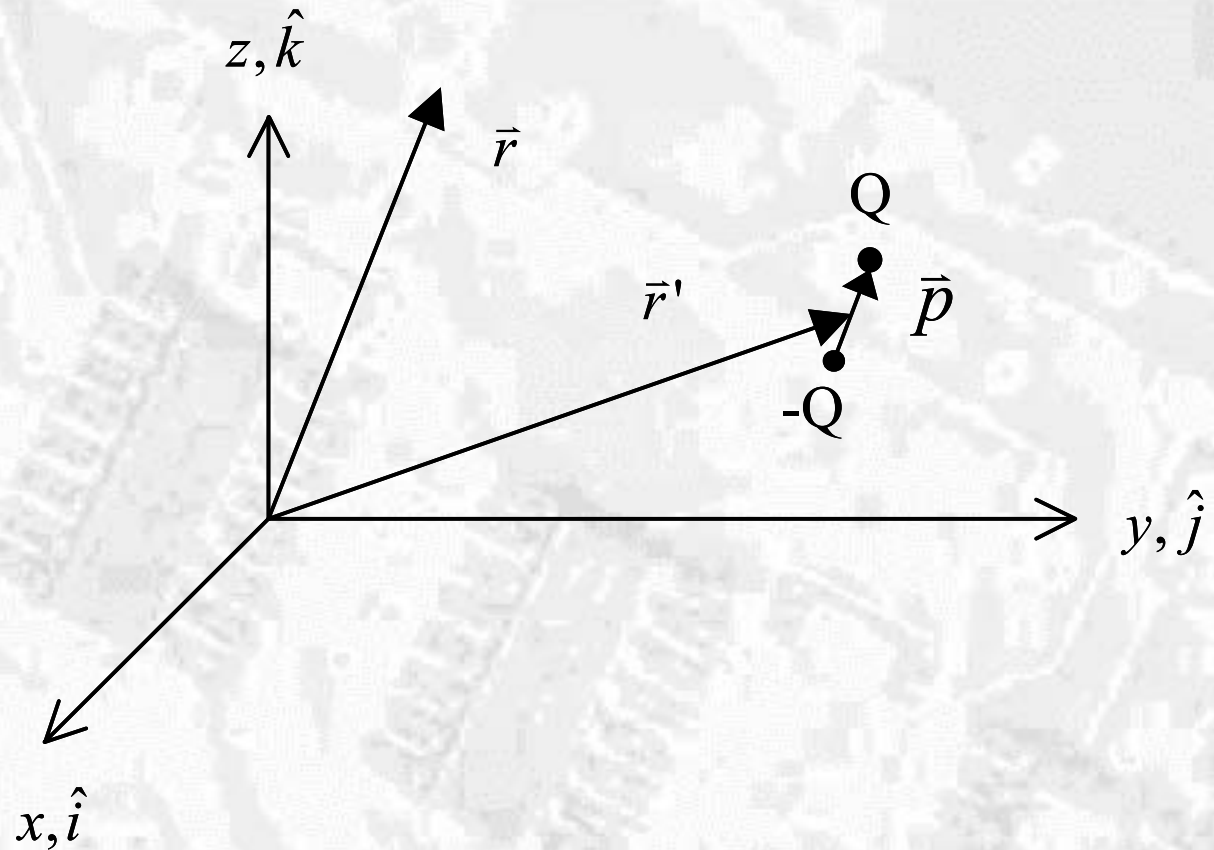


Dipolo Eléctrico

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \bullet (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Campo eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla V$$



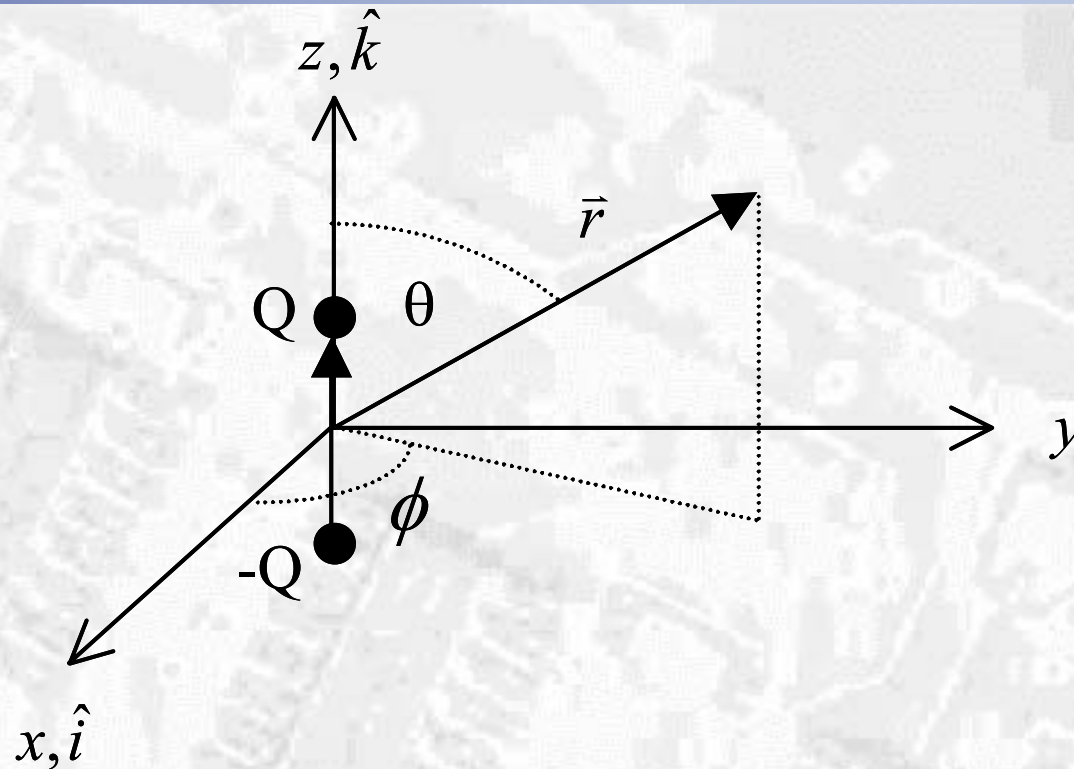
Dipolo Eléctrico

Ejemplo 13

$$\vec{r}' = 0$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$





Dipolo Eléctrico

Ejemplo 13

$$\nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \right]$$

solo depende de r y θ ,
ego

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} (-2r^{-3}) \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} (-\sin \theta) \hat{\theta}$$

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

