



# FI 33A ELECTROMAGNETISMO

## CAMPOS ELECTRICOS EN LA MATERIA

Luis Vargas  
AREA DE ENERGIA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA

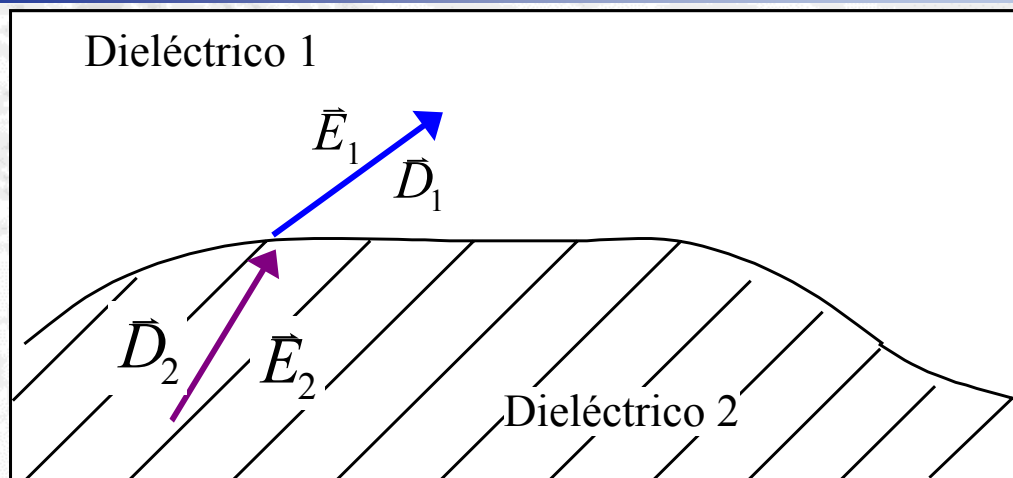
Universidad de Chile,

FI 33A Electromagnetismo,

Primavera 2005



## Condiciones de borde



Usaremos dos ecuaciones  $\nabla \times \vec{E} = 0$  y  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

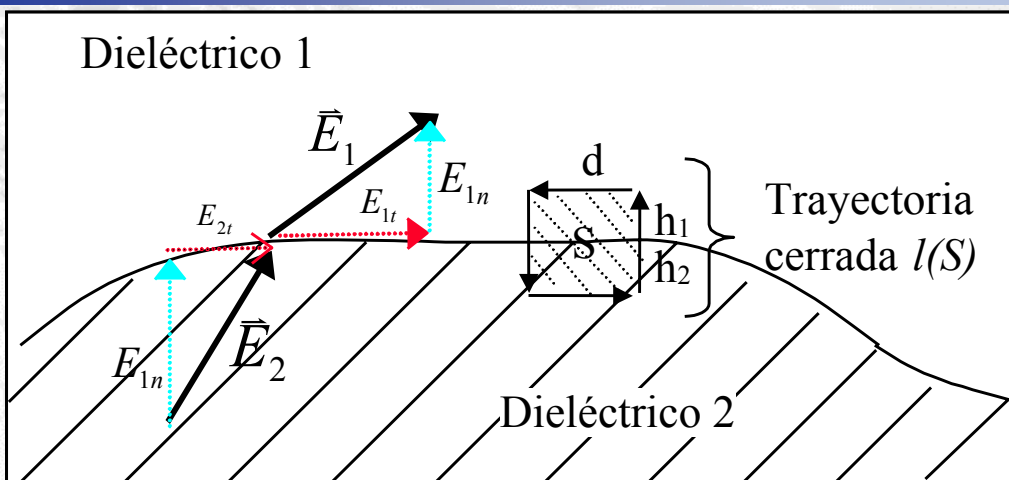
Universidad de Chile,

FI 33A Electromagnetismo,

Primavera 2005



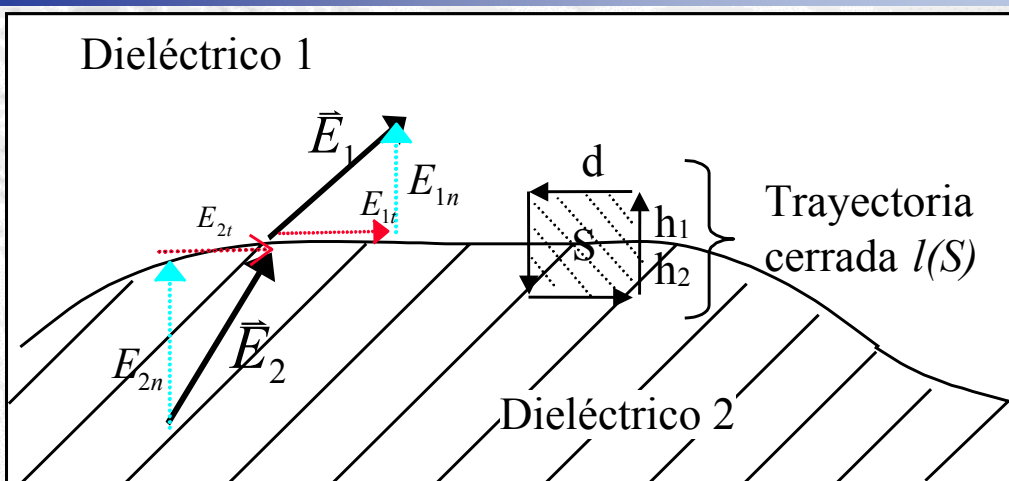
## Condiciones de borde para el campo eléctrico



$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \oint_{l(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



## Condiciones de borde para el campo eléctrico

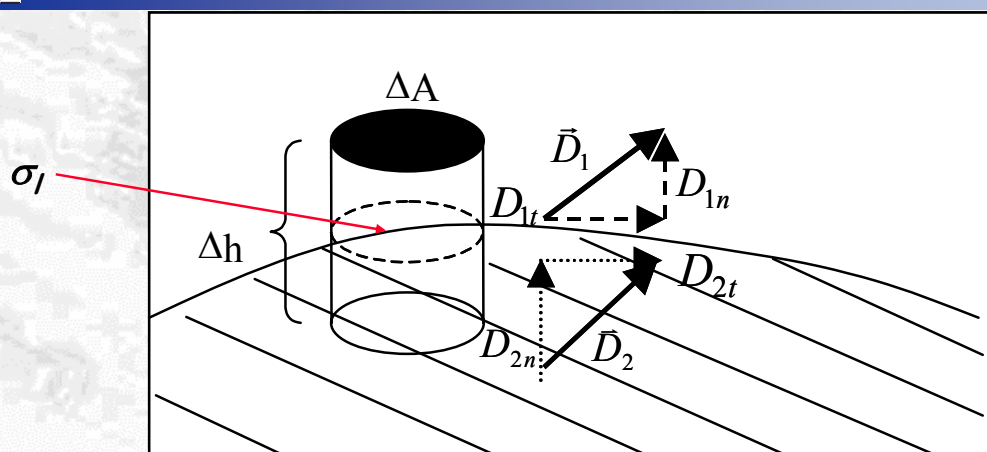


$$\oint_{l(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad -E_{1t}d - E_{1n}h_1 - E_{2n}h_2 + E_{2t}d + E_{2n}h_2 + E_{1n}h_1 = 0$$

$$h_1 \rightarrow 0, \quad h_2 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad -E_{1t}d + E_{2t}d = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$



## Condiciones de borde para el campo eléctrico



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \quad \text{y} \quad Q_{\text{libre}} = \sigma_l \Delta A \quad \Rightarrow \quad D_{1n} \Delta A - D_{2n} \Delta A + \iint_{\text{manto}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sigma_l \Delta A$$

$$\Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \iint_{\text{manto}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l$$

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma_l$$

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

Universidad de Chile,

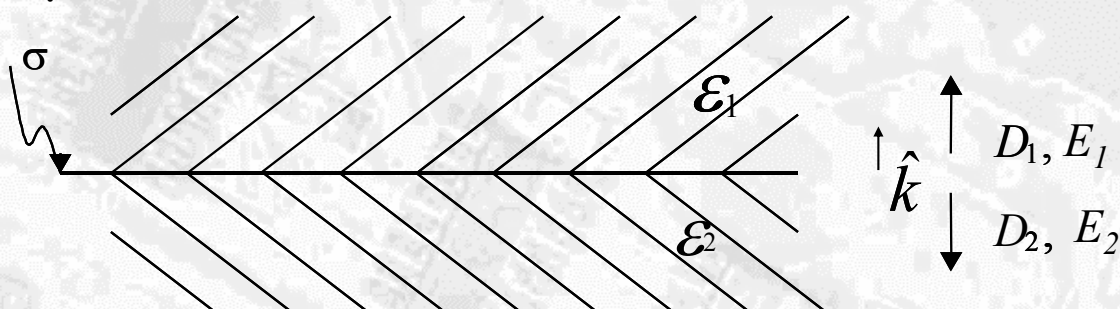
FI 33A Electromagnetismo,

Primavera 2005



## Condiciones de borde para el campo eléctrico

Ejemplo



Universidad de Chile,

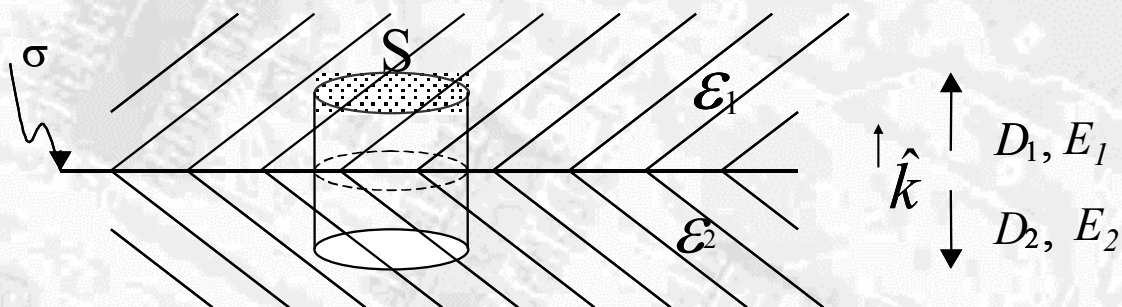
FI 33A Electromagnetismo,

Primavera 2005



## Condiciones de borde para el campo eléctrico

### Ejemplo



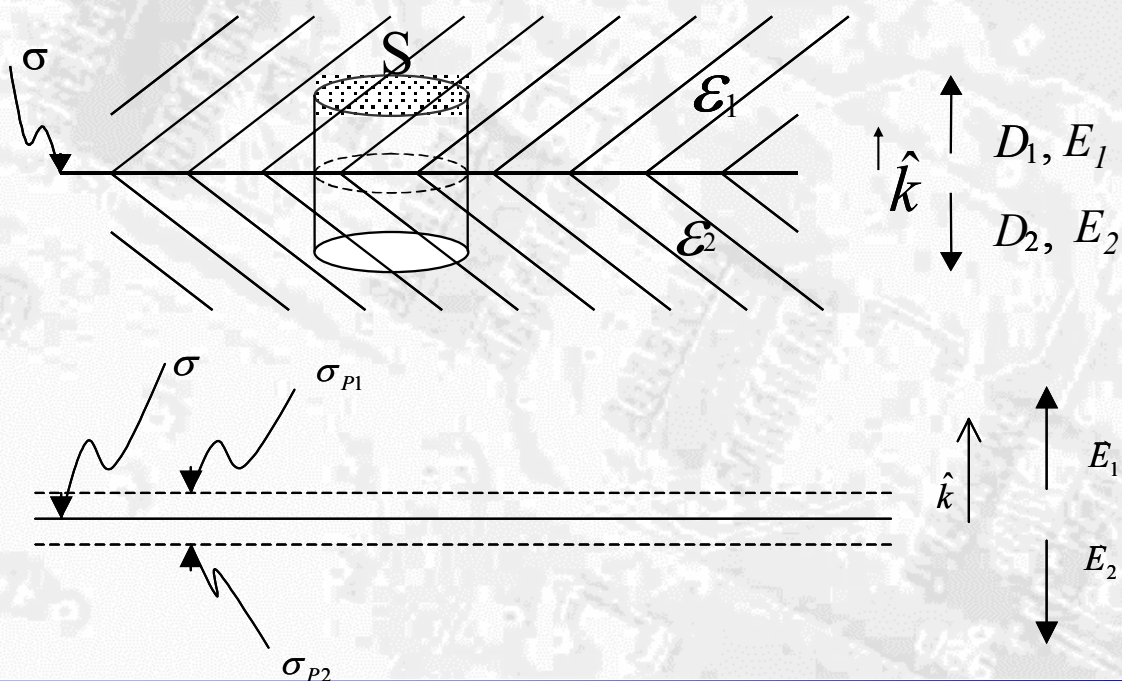
Universidad de Chile,

FI 33A Electromagnetismo,

Primavera 2005



### Ejemplo



Universidad de Chile,

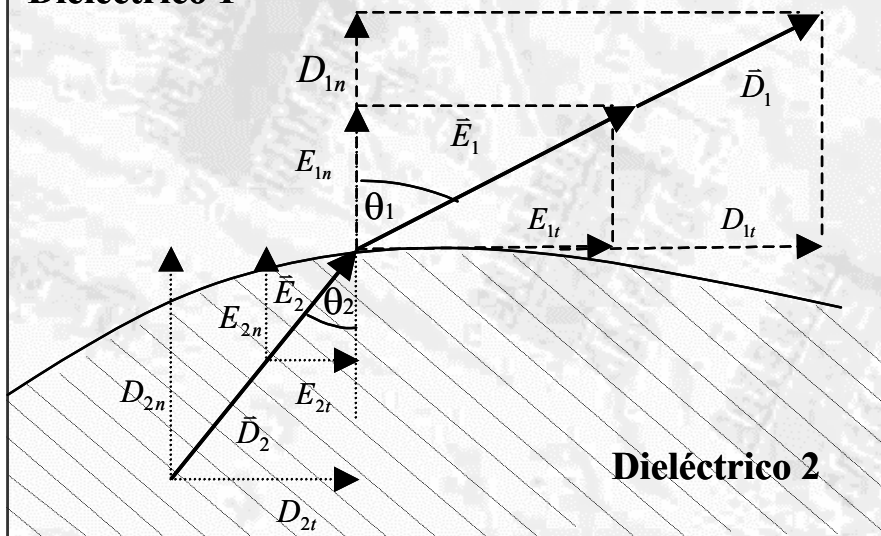
FI 33A Electromagnetismo,

Primavera 2005



## Refracción del campo eléctrico

**Dieléctrico 1**



$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

$$\sigma_l = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \theta_2}{\epsilon_2}$$

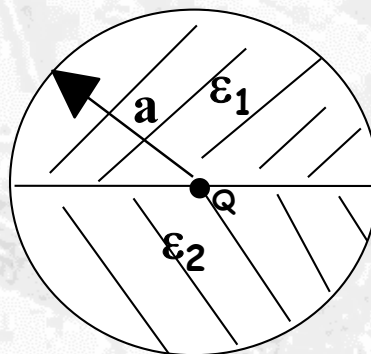
$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$



## Consideraciones sobre Simetría

**I. Caso dos medios con carga puntual  $Q$  en el centro**

Calcular  $E$  y  $D$   
dentro de la esfera  
de radio  $a$





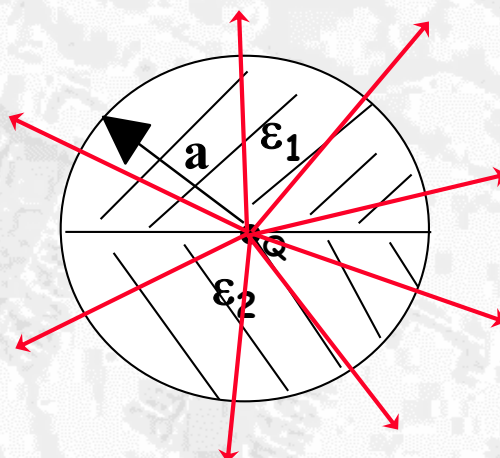
## Consideraciones sobre Simetría

### I. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

Campos son radiales

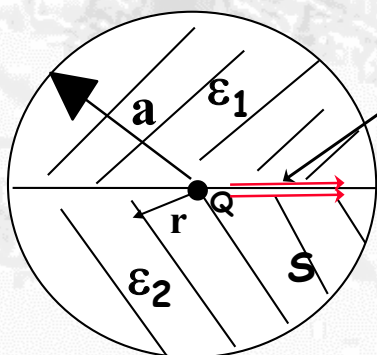
$$D_1 = D_1(r)\hat{r}, \quad D_2 = D_2(r)\hat{r},$$

$$E_1 = E_1(r)\hat{r}, \quad E_2 = E_2(r)\hat{r},$$



## Consideraciones sobre Simetría

### I. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro



**Condición  
de Borde**

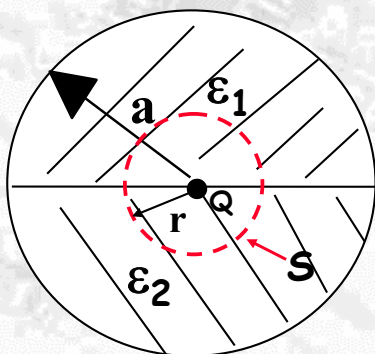
$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \begin{cases} E_1(r) = E_2(r) \\ \frac{D_1(r)}{\epsilon_1} = \frac{D_2(r)}{\epsilon_2} \end{cases}$$



## Consideraciones sobre Simetría

### I. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

y aplicando la Ley de gauss



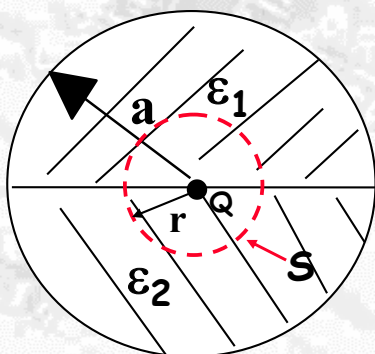
$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{libre}} \Rightarrow$$

$$\iint_{\text{ZONA I}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{s} + \iint_{\text{ZONA II}} \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{s} = Q \Rightarrow$$

$$D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q$$



## Consideraciones sobre Simetría



$$\left. \begin{aligned} D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 &= Q \\ \epsilon_1 D_1 &= \epsilon_2 D_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$D_1 = \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}, \quad D_2 = \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}$$

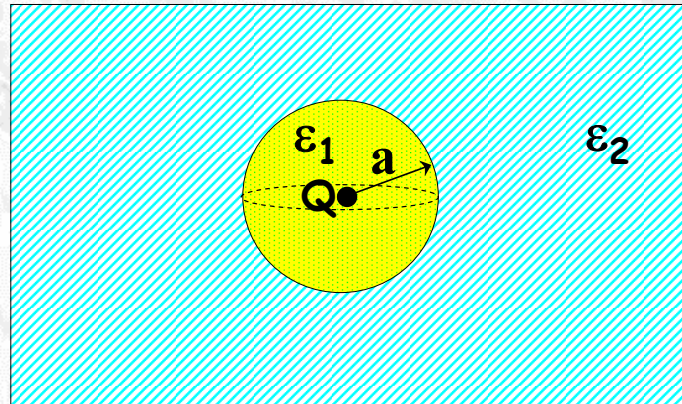
$$E_1 = E_2 = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}$$



## Consideraciones sobre Simetría

### II. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

Calcular  $E$  y  $D$  en todo el espacio

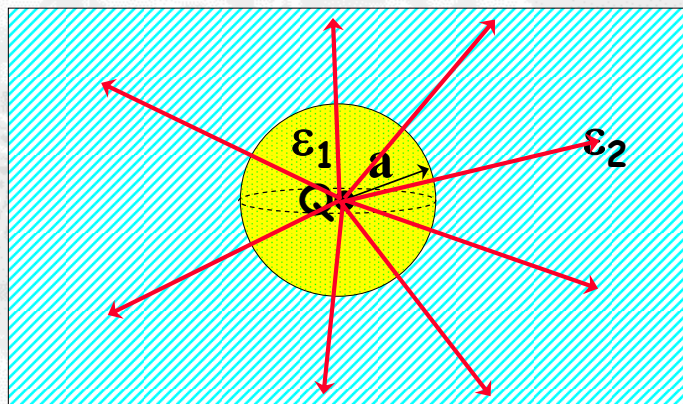


## Consideraciones sobre Simetría

### II. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

Campos son radiales

$$D_1 = D_1(r)\hat{r}, \quad D_2 = D_2(r)\hat{r}, \\ E_1 = E_1(r)\hat{r}, \quad E_2 = E_2(r)\hat{r},$$



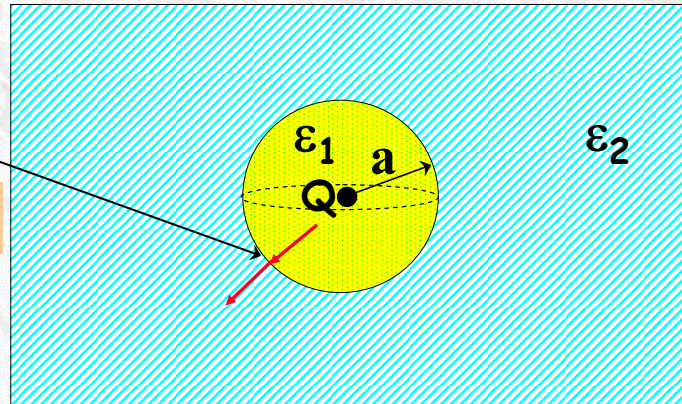


## Consideraciones sobre Simetría

### II. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

Condición de  
Borde en  $r=a$

$$\vec{D}_1(r=a) = \vec{D}_2(r=a)$$



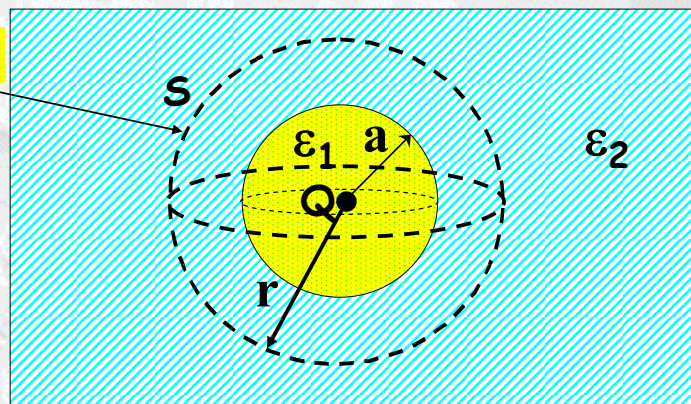
## Consideraciones sobre Simetría

### II. Caso dos medios con carga puntual $Q$ en el centro

Aplicando la ley de Gauss en  $S$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \Rightarrow 4\pi r^2 D(r) = Q$$

$$\Rightarrow D_2(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad E_2(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_2 r^2} \hat{r}$$





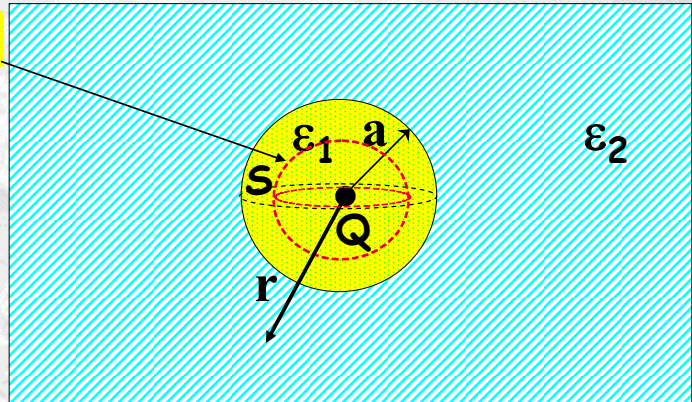
## Consideraciones sobre Simetría

### Aplicando la ley de Gauss en S

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \Rightarrow 4\pi r^2 D(\vec{r}) = Q$$

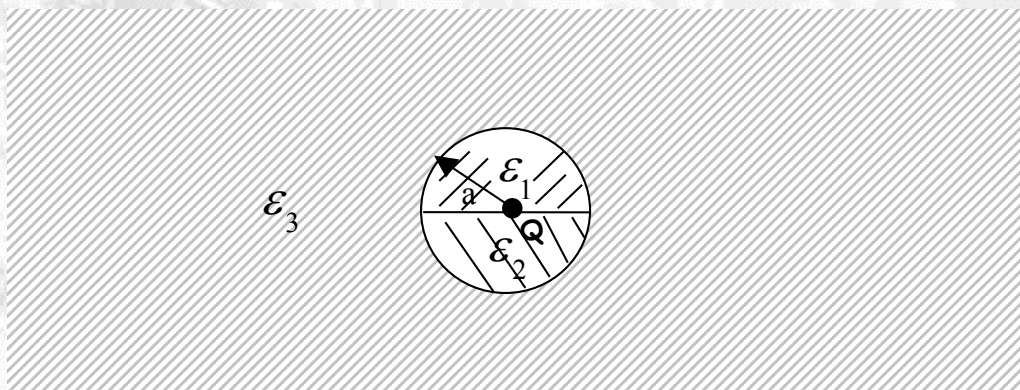
$$\Rightarrow D_1(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad E_1(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_2 r^2} \hat{r}$$

Notar que  $D_1 = D_2$  en todo el espacio



## Consideraciones sobre Simetría

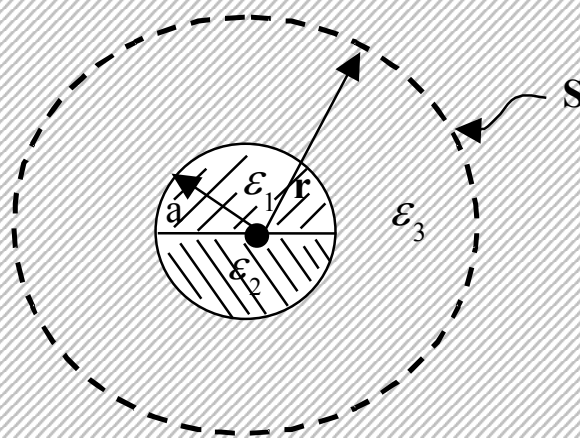
### III. Caso tres medios con carga puntual Q en el centro





## Consideraciones sobre Simetría

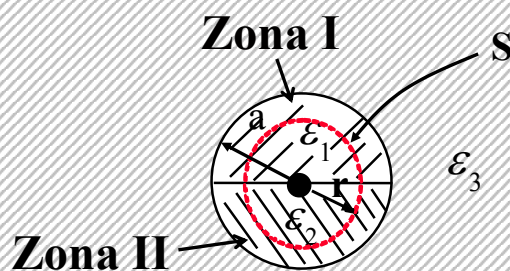
**Zona III**



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \Rightarrow 4\pi r^2 D(r) = Q \Rightarrow D_3(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad E_3(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_3 r^2} \hat{r}$$



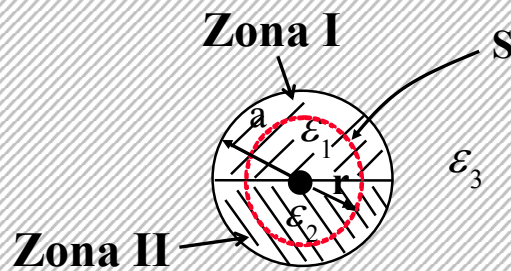
## Consideraciones sobre Simetría



*Para  $0 < r < a$  tenemos dos medios. Sabemos que en la superficie de separación la componente tangencial del campo es la misma en ambos medios.*



## Consideraciones sobre Simetría

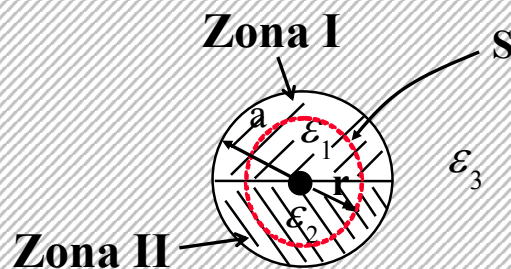


Luego dado que los campos son radiales, se debe cumplir:

$$E_{1r} = E_{2r} \Rightarrow \begin{cases} E_1(r) = E_2(r) \\ \frac{D_1(r)}{\epsilon_1} = \frac{D_2(r)}{\epsilon_2} \end{cases}$$



## Consideraciones sobre Simetría

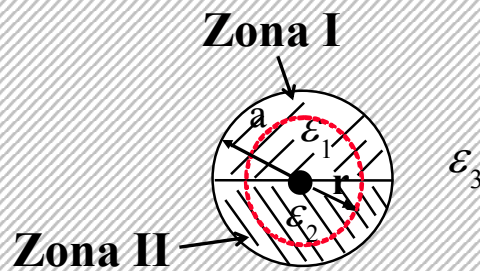


Aplicando la Ley de Gauss:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{libre} \Rightarrow \iint_{ZONA I} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{s} + \iint_{ZONA II} \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{s} = Q \Rightarrow D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q$$



## Consideraciones sobre Simetría



Tenemos el sistema:

$$\left. \begin{aligned} D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 &= Q \\ \epsilon_1 D_2 &= \epsilon_2 D_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_1 = \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}, \quad D_2 = \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}$$



## Consideraciones sobre Simetría



En resumen:  $D_1 = \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}, \quad D_2 = \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}, \quad D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$

Notar que si  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \Rightarrow \vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}_3 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$

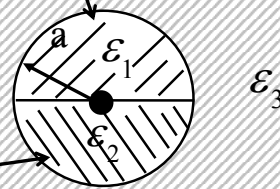


## Consideraciones sobre Simetría

Zona III

Zona I

Zona II



En resumen:  $D_1 = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}, \quad D_2 = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}, \quad D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$

Notar que si  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \Rightarrow D_1 = D_2 = D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$

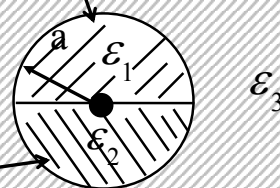


## Consideraciones sobre Simetría

Zona III

Zona I

Zona II



Pero si aplicamos la condición de borde para D en  $r=a$ :

$$\bar{D}_1(r=a) = \bar{D}_3(r=a) \Rightarrow \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2} = \frac{Q}{4\pi a^2} \Rightarrow 2\varepsilon_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$\bar{D}_2(r=a) = \bar{D}_3(r=a) \Rightarrow \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2} = \frac{Q}{4\pi a^2} \Rightarrow 2\varepsilon_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$



## Consideraciones sobre Simetría



Pero si aplicamos la condición de borde para D en  $r=a$ :

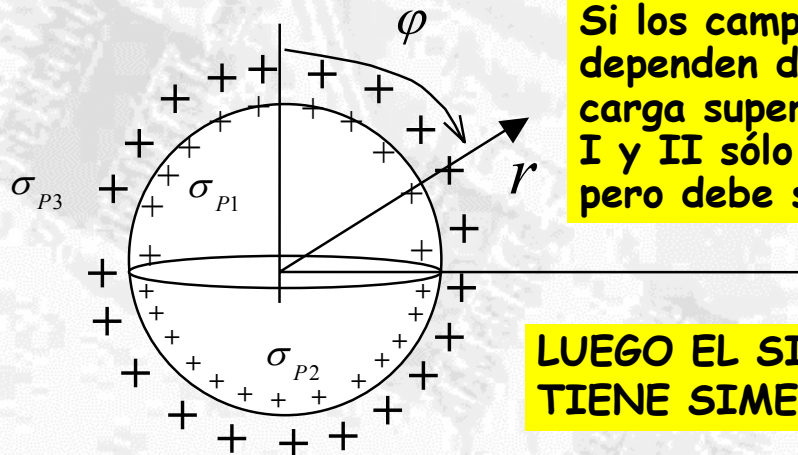
$$\bar{D}_1(r=a) = \bar{D}_3(r=a) \Rightarrow 2\varepsilon_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

$$\bar{D}_2(r=a) = \bar{D}_3(r=a) \Rightarrow 2\varepsilon_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_1$$

¿?



## Consideraciones sobre Simetría

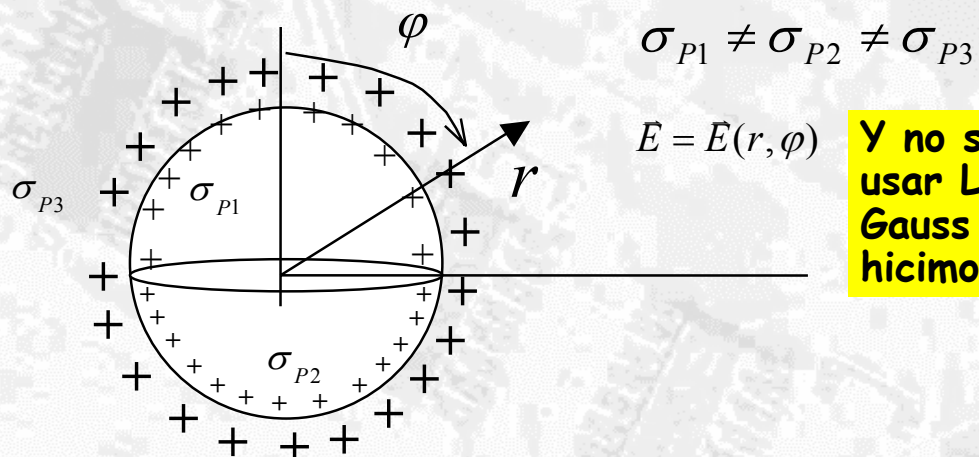


Si los campos solo dependen de  $r$ , entonces la carga superficial en zonas I y II sólo tiene un signo, pero debe sumar cero!

LUEGO EL SISTEMA NO TIENE SIMETRÍA SEGÚN  $\varphi$



## Consideraciones sobre Simetría



**Y no se puede  
usar Ley de  
Gauss como lo  
hicimos**