



# **FI 33A ELECTROMAGNETISMO**

## **CAMPOS ELECTRICOS EN LA MATERIA**

Luis Vargas  
AREA DE ENERGIA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA

Universidad de Chile,

FI 33A Electromagnetismo,

Primavera 2005



## **INDICE**

- Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell
- Vector Polarización
- Constante dieléctrica
- Clasificación de materiales dieléctricos
- Ruptura dieléctrica
- Valores de Constante dieléctrica y fuerza dieléctrica
- Condiciones de borde para el campo eléctrico
- Ejemplo
- Refracción del campo eléctrico
- Consideraciones sobre Simetría

Universidad de Chile,

FI 33A Electromagnetismo,

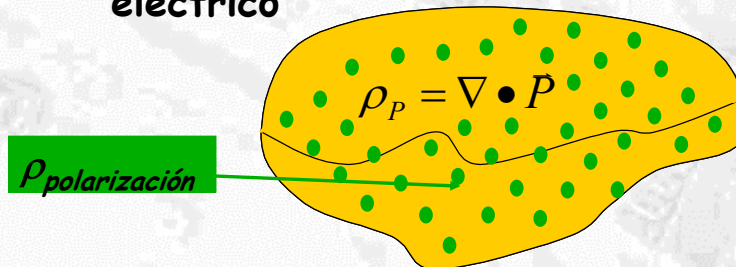
Primavera 2005



# Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

La 1ª ecuación de Maxwell indica  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}$

$\rho_{total}$  corresponde a la carga total que es fuente de campo eléctrico



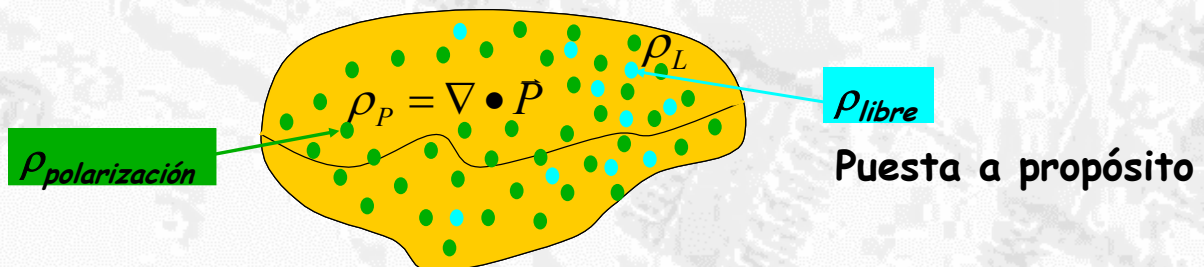
En el caso más general  $\rho_{total}$  estará compuesta de carga libre y carga de polarización



# Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

La 1ª ecuación de Maxwell indica  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}$

$$\rho_{total} = \rho_{Polarización} + \rho_{libre} \Rightarrow \rho_L + \rho_P = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E}$$





# Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

$$\rho_L = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} - \rho_P \quad \text{pero} \quad \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\rho_L = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} \quad (2.18)$$

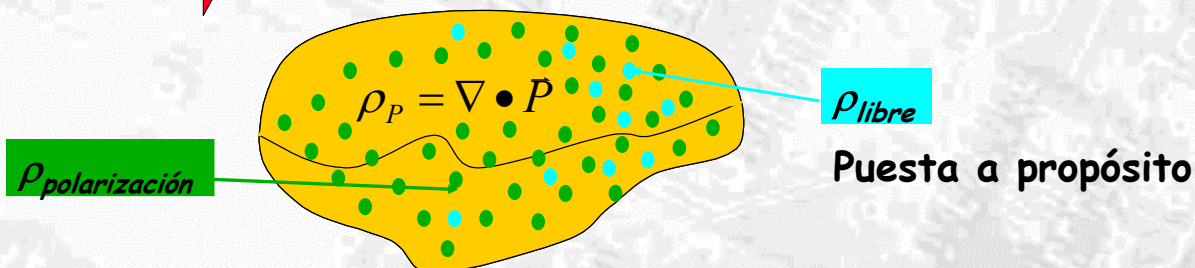
$$\rho_L = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \quad (2.19)$$

$$\text{definiendo } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Vector de desplazamiento

$$\rho_L = \nabla \cdot \vec{D}$$

1ª ecuación de Maxwell



# Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

$$\rho_L = \nabla \cdot \vec{D}$$

1ª ecuación de Maxwell

donde

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{Vector de desplazamiento}$$

Integrando en un volumen  $\Omega$

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \rho_L dv}_{Q_L} = \underbrace{\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{D} dv}_{\oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \cdot d\vec{s}}$$



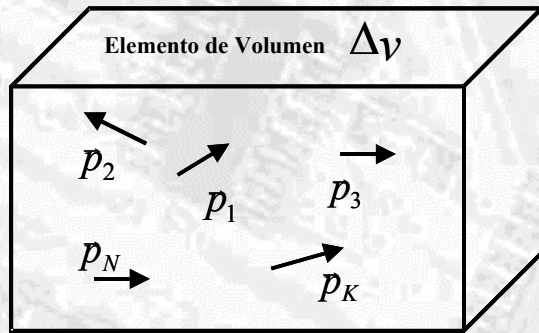
$$Q_L = \oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

Ley de Gauss en la materia





## Polarización de medios materiales



$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N Q_k \vec{d}_k}{\Delta v'} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \left[ \frac{\sum_{k=1}^N \vec{p}_k}{\Delta v'} \right]$$

$\vec{P}$  La polarización en medios materiales varia con la intensidad del campo eléctrico aplicado



## Polarización de medios materiales

$$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\| \Rightarrow \text{Materiales lineales}$$

$$\vec{P} = \alpha(\vec{r}) \vec{E} \Rightarrow \text{Materiales isótropos } \vec{P} // \vec{E}$$

Si  $\alpha$  es constante  $\Rightarrow$  Material homogéneo

$$\text{En general tendremos } \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

$\chi_e$  es la susceptibilidad eléctrica de un material



## Constante dieléctrica

Teniamos que  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  pero  $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.24)$$

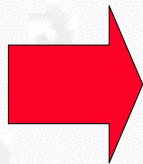
$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \quad (2.25)$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$

**Permeabilidad dieléctrica relativa**

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

**Constante dieléctrica del material**



$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$



## Constante dieléctrica

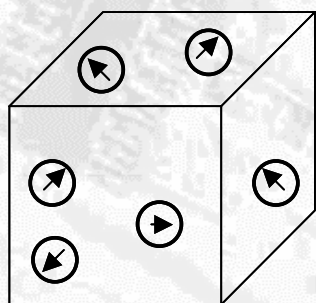
$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  y  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , la expresión más general es

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

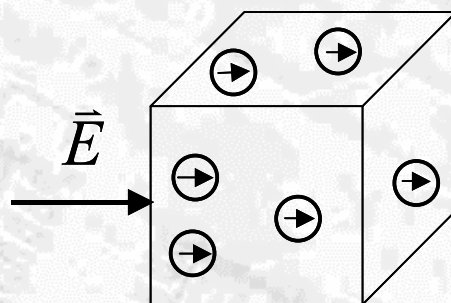
y en general  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$



## Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



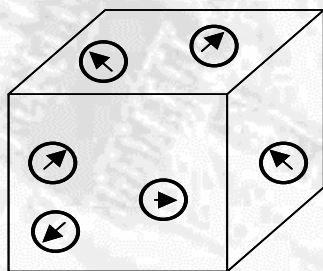
Situación con campo aplicado

### i) Material lineal, isótropo y homogéneo

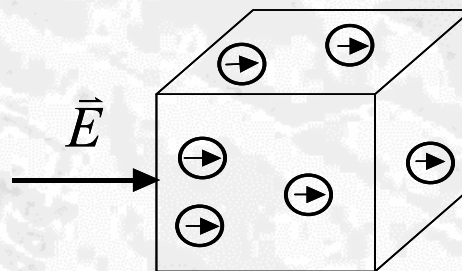
$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$  y  $\vec{D}, \vec{P}$  y  $\vec{E}$  son paralelos,  $\epsilon$  es constante



## Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



Situación con campo aplicado

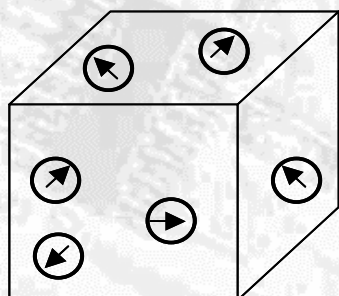
### ii) Material lineal, isótropo y no homogéneo

$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$  y  $\vec{D}, \vec{P}$  y  $\vec{E}$  son paralelos,  $\epsilon = \epsilon(\vec{r})$  no es constante

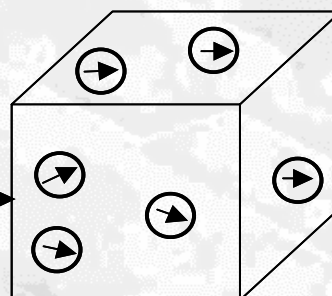




## Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



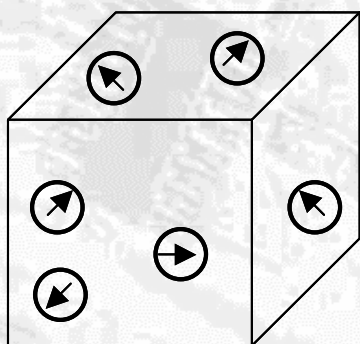
Situación con campo aplicado

### iii) Material lineal, anisótropo y no homogéneo

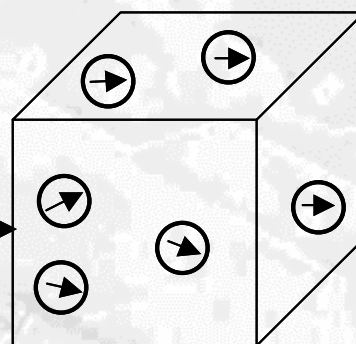
$$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\| \quad \text{y} \quad \vec{D}, \vec{P} \text{ y } \vec{E} \quad \text{No son paralelos.} \quad \vec{D} = [\epsilon] \vec{E}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$$



## Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



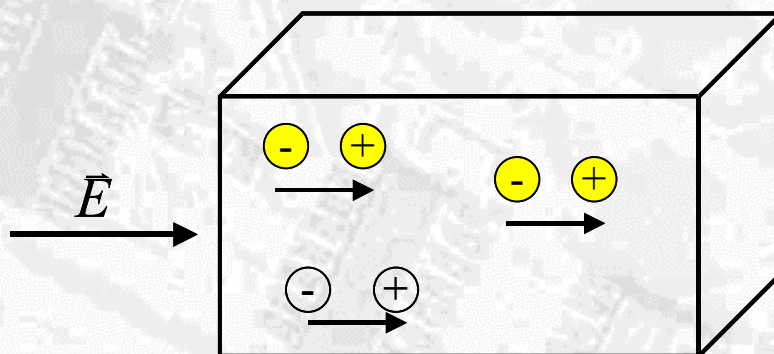
Situación con campo aplicado

### iv) Material no lineal, anisótropo y no homogéneo

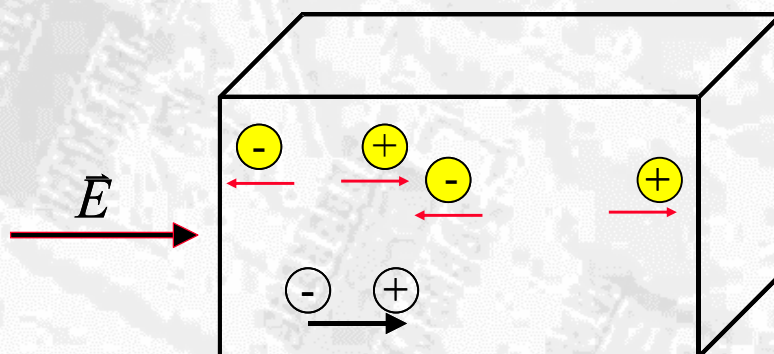
$$\|\vec{P}\| \neq \alpha \|\vec{E}\| \quad \text{y} \quad \vec{D}, \vec{P} \text{ y } \vec{E} \quad \text{No son paralelos.} \quad \vec{D} = [\epsilon] \vec{E}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$$



## Ruptura dieléctrica



## Ruptura dieléctrica



El mínimo valor del campo eléctrico para el cual se produce la ruptura se denomina "fuerza dieléctrica"





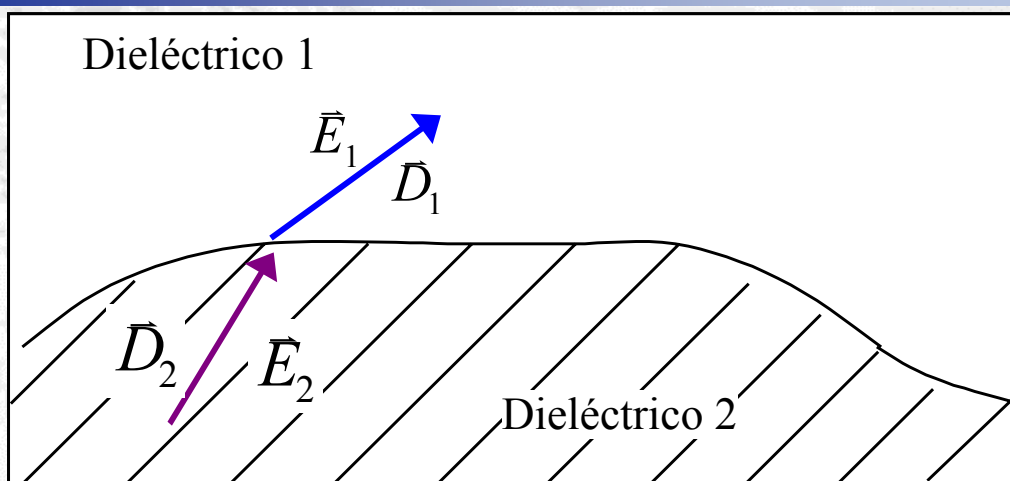
## Valores de Constante dieléctrica y fuerza dieléctrica

Material	Constante Dieléctrica (adimensional) $\epsilon_r$	Fuerza dieléctrica E (V/m)
Titanato de Bario	1200	$7.5 \times 10^6$
Agua (mar)	80	
Agua destilada	81	
Nylon	8	
Papel	7	$12 \times 10^6$
Vidrio	5 -10	$35 \times 10^6$
Mica	6	$70 \times 10^6$
Porcelana	6	
Bakelita	5	$20 \times 10^6$
Cuarzo (fusionado)	5	$30 \times 10^6$
Goma (dura)	3.1	$25 \times 10^6$
Madera	2.5 - 8.0	
Polyestireno	2.55	
Polypropileno	2.25	
Parafina	2.2	$30 \times 10^6$
Petroleo	2.1	$12 \times 10^6$
Aire (a 1 atmósfera)	1	$3 \times 10^6$

(\*) Estos valores pueden variar en otras Tablas ya que hay muchas variedades y aleaciones de cada material y la permitividad es además sensible a la temperatura, impurezas, etc.



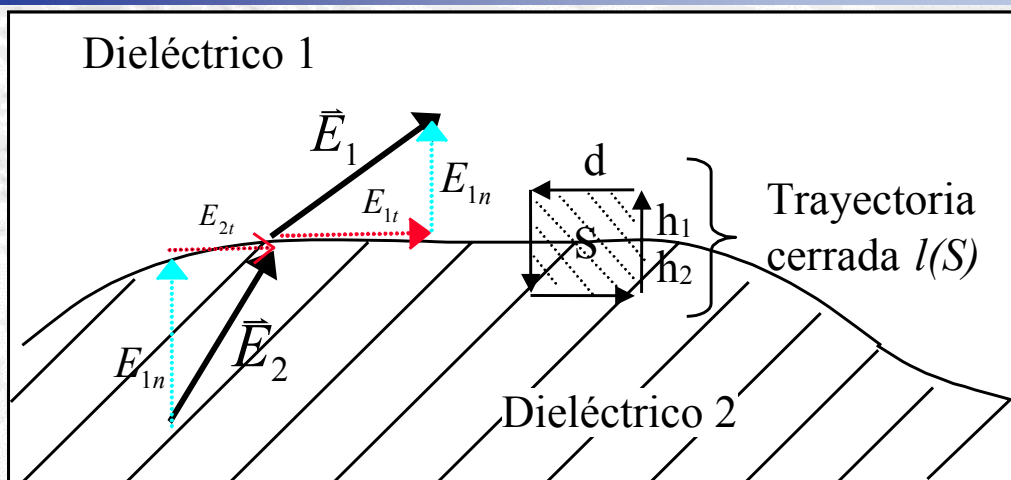
## Condiciones de borde



Usaremos dos ecuaciones  $\nabla \times \vec{E} = 0$  y  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$



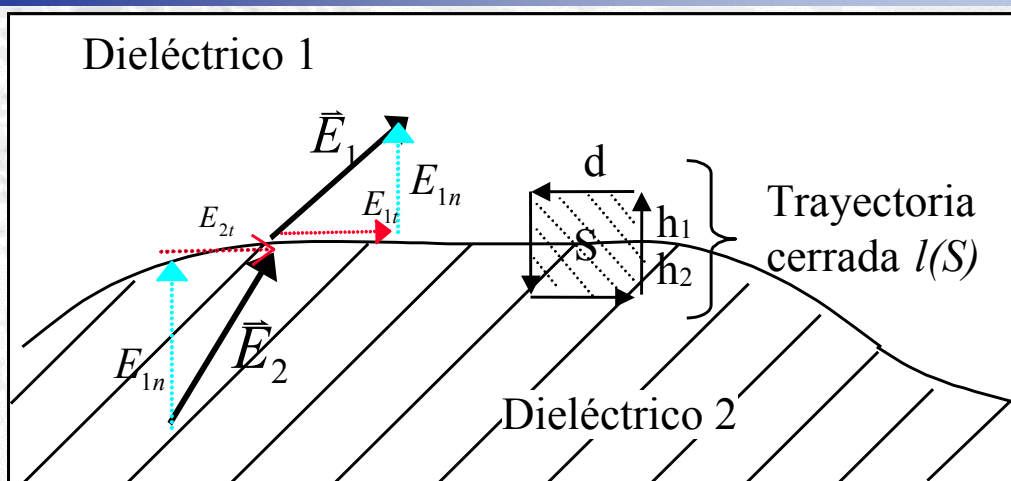
## Condiciones de borde para el campo eléctrico



$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \oint_{l(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



## Condiciones de borde para el campo eléctrico

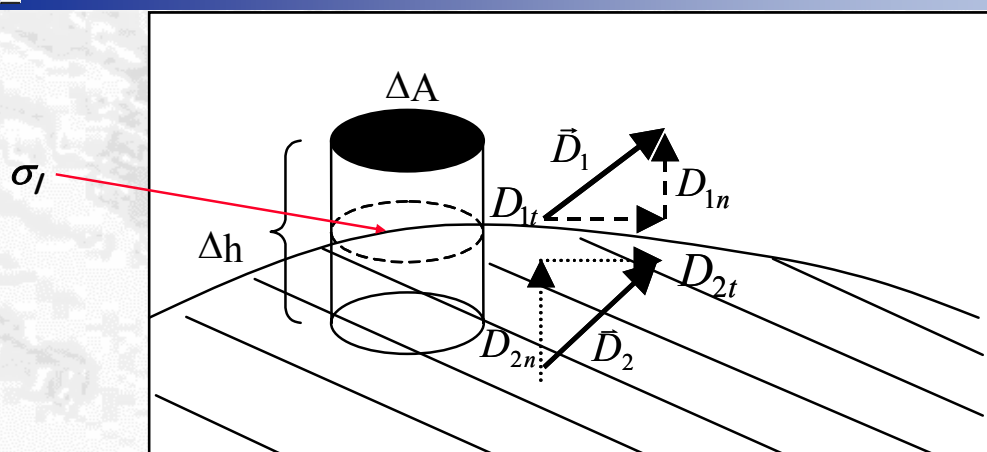


$$\oint_{l(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad -E_{1t}d - E_{1n}h_1 - E_{2n}h_2 + E_{2t}d + E_{2n}h_2 + E_{1n}h_1 = 0$$

$$h_1 \rightarrow 0, \quad h_2 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad -E_{1t}d + E_{2t}d = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$



## Condiciones de borde para el campo eléctrico



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \quad \text{y} \quad Q_{\text{libre}} = \sigma_l \Delta A \quad \Rightarrow \quad D_{1n} \Delta A - D_{2n} \Delta A + \iint_{\text{manto}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sigma_l \Delta A$$

$$\Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \iint_{\text{manto}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l$$

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma_l$$

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

Universidad de Chile,

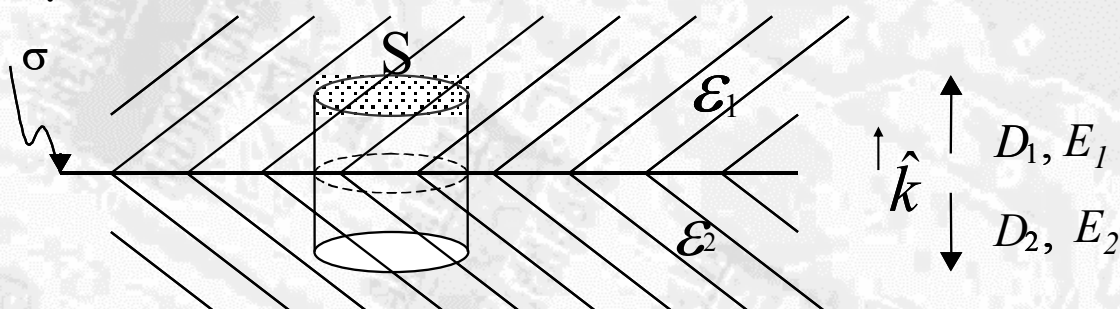
FI 33A Electromagnetismo,

Primavera 2005



## Condiciones de borde para el campo eléctrico

Ejemplo



Universidad de Chile,

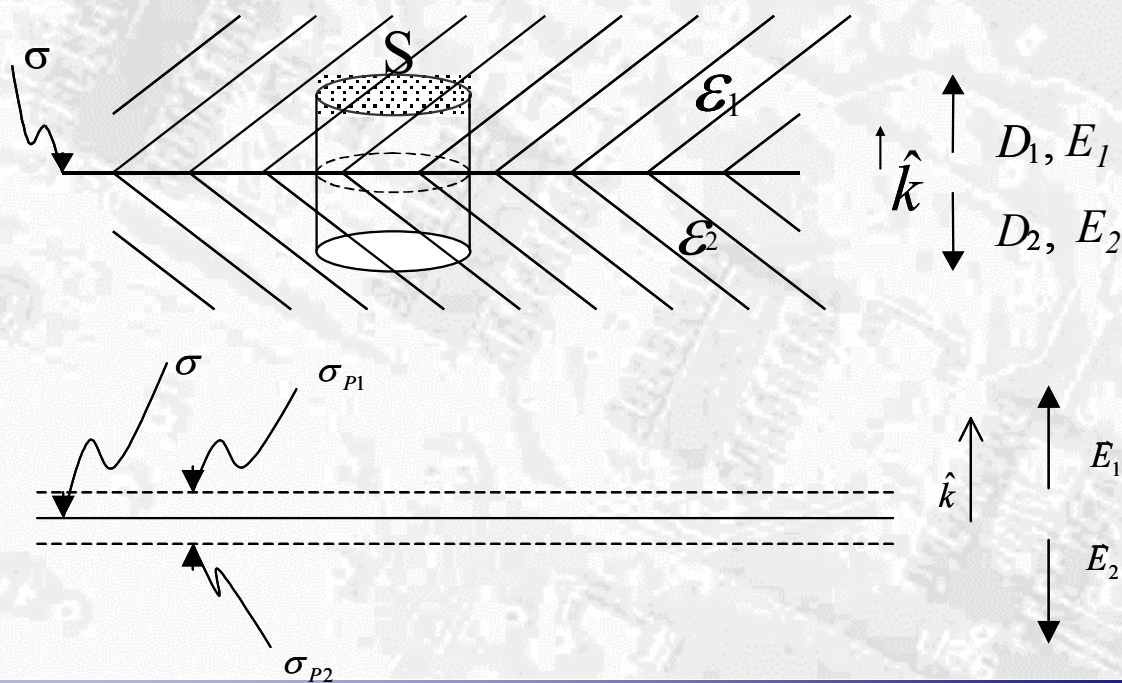
FI 33A Electromagnetismo,

Primavera 2005





## Ejemplo



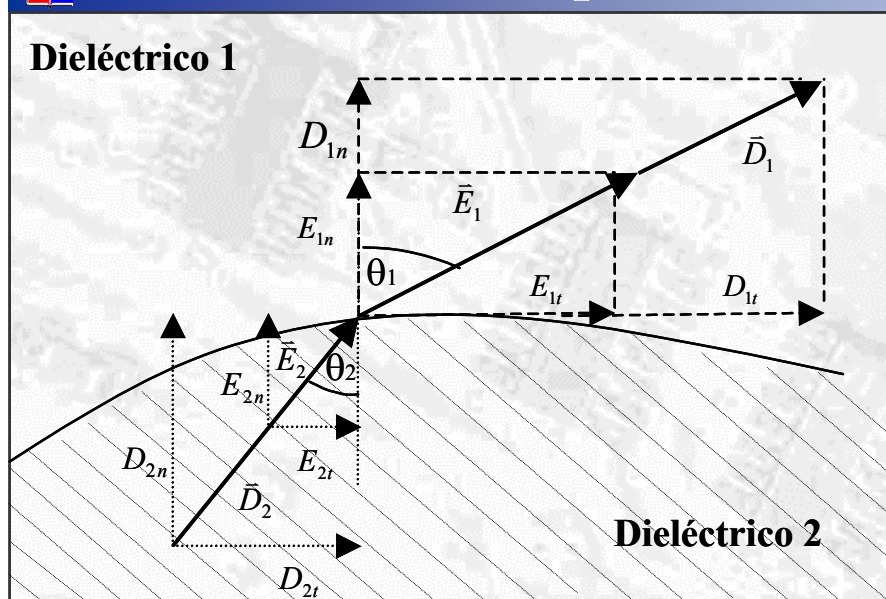
Universidad de Chile,

FI 33A Electromagnetismo,

Primavera 2005



## Refracción del campo eléctrico



$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

$$\sigma_l = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \theta_2}{\epsilon_2}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

Universidad de Chile,

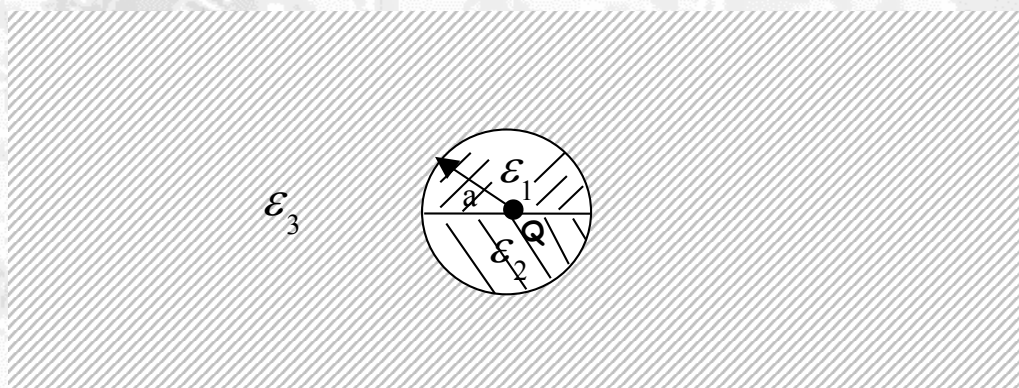
FI 33A Electromagnetismo,

Primavera 2005

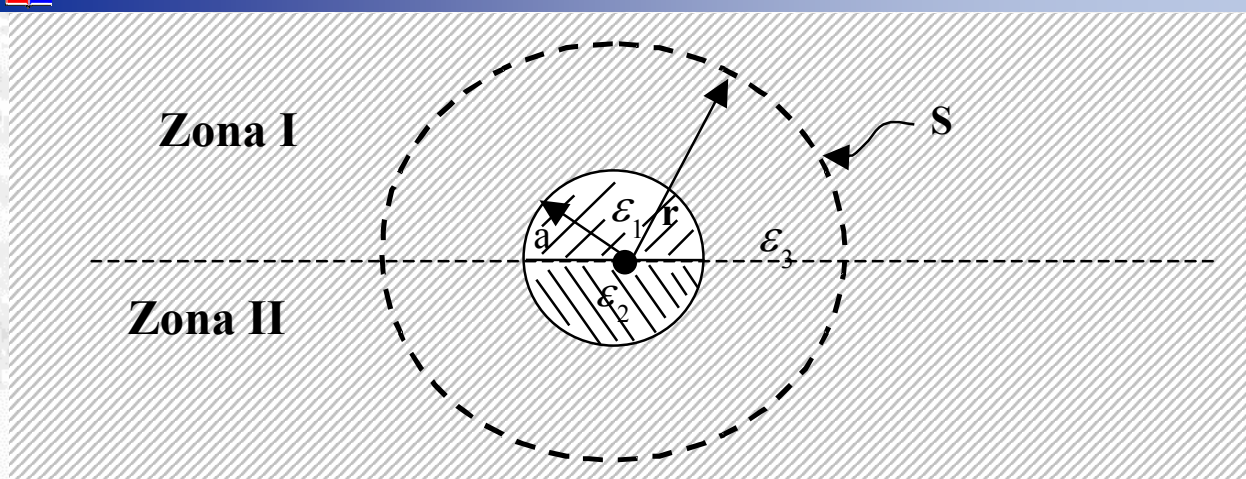


## Consideraciones sobre Simetría

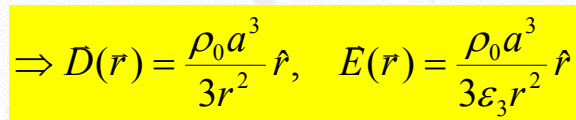
Caso tres medios con carga puntual  $Q$  en el centro



## Consideraciones sobre Simetría



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \Rightarrow 4\pi r^2 D(r) = Q \Rightarrow D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_3 r^2} \hat{r}$$


$$\sigma_l = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_n$$

$$D_{2n} = D_n$$
$$\begin{aligned} D_1(r) &= \frac{\rho_0 \delta^3}{3r^2} \hat{r}, & E_1(r) &= \frac{\rho_0 \delta^3}{3\epsilon_1 r^2} \hat{r} \\ D_2(r) &= \frac{\rho_0 \delta^3}{3r^2} \hat{r}, & E_2(r) &= \frac{\rho_0 \delta^3}{3\epsilon_2 r^2} \hat{r} \end{aligned}$$