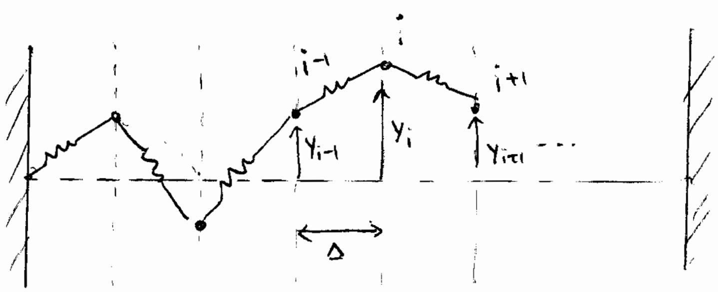
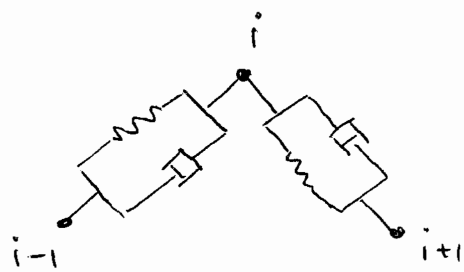
P] Considere N masas m separadas en Δ, unidas por resortes de constante elástica K y largo natural nulo, y suponga también que a cada resorte se le asocia además un disipador lineal que ejerce una fuerza de roce proporcional a la velocidad de deformación del resorte. Suponga pequeñas oscilaciones transversales.

(a) Determine la ec. de movimiento de las masas

(b) Tome el límite al continuo y obtenga una ecuación de onda disipativa.

(c) Encuentre la solución a la ecuación de ondas.





modelo resorte + disipador

(a) fza. resorte $\propto$ $K \Delta Y$

fza. disipador $\propto$ $\nu \Delta \dot{Y}$

∴ Newton sobre la partícula i-ésima

$$\boxed{m \ddot{Y}_i = K(Y_{i+1} - Y_i) - K(Y_i - Y_{i-1}) + \nu(\dot{Y}_{i+1} - \dot{Y}_i) - \nu(\dot{Y}_i - \dot{Y}_{i-1})}$$

(b)

$$\underbrace{\frac{m}{d}}_{\rho} \ddot{Y}_i = \underbrace{K d}_{\tau} \underbrace{\left[\frac{\frac{Y_{i+1}-Y_i}{d} - \frac{Y_i - Y_{i-1}}{d}}{d}\right]}_{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} + \underbrace{\nu d}_{\mu} \underbrace{\left[\frac{\frac{\dot{Y}_{i+1}-\dot{Y}_i}{d} - \frac{\dot{Y}_i - \dot{Y}_{i-1}}{d}}{d}\right]}_{\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} = 0}$$

(c) $\rho \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \tau \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad \Big/ \cdot \dfrac{1}{\rho}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - c_2^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} = 0 \qquad \text{donde} \quad c_1^2 = \frac{\tau}{\rho} \qquad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Sea $y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$\Rightarrow X T'' - c_1^2 X'' T - c_2^2 X'' T' = 0$$

$$\Rightarrow X T'' - (c_1^2 T + c_2^2 T') X'' = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{T''}{c_1^2 T + c_2^2 T'}}_{\equiv -k^2} - \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\equiv -k^2} = 0$$

Para X: $X'' = -k^2 X$

$$\Rightarrow X(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

CB: $X(0) = 0 \longrightarrow B = 0$

$X(L) = 0 \longrightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \dfrac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

Para T: $T'' = -k^2 (c_1^2 T + c_2^2 T')$

$$\Rightarrow T'' + \underbrace{(k c_2)^2}_{\equiv \omega_2^2} T' + \underbrace{(k c_1)^2}_{\equiv \omega_1^2} T = 0$$

$$\Rightarrow T'' + \omega_2^2 T' + \omega_1^2 T = 0$$

Sea $T(t) = A e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \omega_2^2 \lambda + \omega_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\omega_2^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\omega_2^4 - 4\omega_1^2}$$

λ

donde $\omega_1 = K c_1 = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$

$\omega_2 = K c_2 = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{\omega_2^2}{2} \pm \frac{\omega_2^2}{2}\sqrt{1 - \frac{4\omega_1^2}{\omega_2^2}}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{\mu}{\rho}}_{\equiv d_n} \pm \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{\mu}{\rho}\sqrt{1 - 4\frac{\tau\rho}{\mu^2}}}_{\equiv \beta_n}$$

$\Rightarrow \quad \lambda = -d_n \pm \beta_n \qquad$ (β_n puede ser complejo)

$$\Rightarrow \quad T(t) = C\, e^{(-d_n+\beta_n)t} + D\, e^{(-d_n-\beta_n)t}$$

$$= e^{-d_n t} \cdot \left(C e^{\beta_n t} + D e^{-\beta_n t}\right)$$

Entonces, la solución general es:

$$\boxed{Y(x,t) = \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-d_n t}\left(C_n e^{\beta_n t} + D_n e^{-\beta_n t}\right)}$$

donde C_n y D_n se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Si β_n $\begin{cases} \text{complejo}^{\text{(puro)}} \longrightarrow \text{Sol. Sub-amortiguada} \\ \text{cero} \longrightarrow \text{sol criticamente amortiguada} \\ \text{real} \longrightarrow \text{sol. Sobre amortiguada} \end{cases}$