FI21B/1 Sistemas Dinámicos
Semestre Primavera 2005 Profesor: Nicolás Mujica
Auxiliares: Carlos Suazo, David Chen, Ignacio Ortega

# Pauta Control N°3

## P1/ Pequeñas Oscilaciones

Tenemos un sistema de N partículas con posiciones $\{\bar{r}_i\}_{1\ldots N}$, sometido a restricciones tales que puede ser descrito por $n$ grados de libertad $\{q_j\}_{1\ldots n}$ (o simplemente $\bar{q}$), de modo que $\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q})$ y para $\bar{q} = \bar{0}$ el sistema está en equilibrio estable. Todas las partículas tienen igual masa $m$.

a) Los modos normales de oscilación son movimientos periódicos del sistema que tienen una frecuencia determinada que no depende de las condiciones iniciales. Todo movimiento que realice el sistema por efecto de condiciones iniciales es (en aproximación) una combinación de los modos normales.

b) Dado que la relación entre posiciones y grados de libertad no depende explícitamente del tiempo, es sabido que la energía cinética es una forma cuadrática de las velocidades generalizadas:

$$T(\bar{q},\dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T \cdot \tilde{m}(\bar{q}) \cdot \dot{\bar{q}}^T \qquad (1)$$

(Esta propiedad fue demostrada en cátedra y clase auxiliar)

$\tilde{m}$ es la matriz de masa simétrica. Se puede escribir en función de matrices jacobianas y hessianas

$$\tilde{m}(\bar{q}) = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{d\bar{r}_i^T}{d\bar{q}} \cdot \frac{d\bar{r}_i}{d\bar{q}} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\bar{q}}^2}$$

Obs: $\tilde{m}$ es semidefinida positiva pues $T \geq 0$.

Aproximamos la energía cinética evaluando la matriz de masa en el punto de equilibrio $\bar{q} = \bar{0}$:

$$T \approx \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^T \cdot \tilde{m}(\vec{0}) \cdot \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (2)$$

La energía potencial por su parte se puede escribir como función de los grados de libertad: $U = U(\vec{q})$. Luego, aproximamos esta función utilizando una expansión de Taylor de segundo orden en torno a $\vec{q} = \vec{0}$:

$$U(\vec{q}) \approx U(\vec{0}) + \nabla U(\vec{0}) \cdot \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{q}^T \cdot HU(\vec{0}) \cdot \vec{q}$$

Pero $\vec{q} = \vec{0}$ es equilibrio estable; así que $\nabla U(\vec{0}) = \vec{0}$, y $HU(\vec{0})$ es una matriz definida positiva. También es simétrica por ser hessiana. Sea $\tilde{A} = HU(\vec{0})$.

La energía potencial es una energía relativa. Tenemos la libertad de escoger un "nivel cero". Escogemos $U(\vec{0}) = 0$:

$$U \approx \frac{1}{2}\vec{q}^T \cdot \tilde{A} \cdot \vec{q} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{jk} q_j q_k \qquad (1)$$

c) Escribimos el Lagrangeano Cuadratizado:

$$L^{[2]}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T - U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - A_{jk}q_jq_k)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} -A_{jk}\frac{\partial q_j}{\partial q_i}q_k - A_{jk}\frac{\partial q_k}{\partial q_i}q_j$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{jk}\delta_{ij}q_k + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{jk}\delta_{ik}q_j\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}q_k + \sum_{j=1}^{n} A_{ji}q_j\right) = -\sum_{k=1}^{n} A_{ik}q_k \qquad (\tilde{A} \text{ es simétrica})$$

Análogamente, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\dot{q}_k$

Euler-Lagrange: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \iff$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ik}\ddot{q}_k + \sum_{i=1}^{n} A_{ik}q_k = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} m_{ik}\ddot{q}_k + A_{ik}q_k = 0$$

d) Nótese que las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden escribir a modo de una ecuación vectorial:

$$\tilde{m}\cdot\ddot{\vec{q}} + \tilde{A}\cdot\vec{q} = \vec{0}$$

Se puede llegar directamente a esta ecuación derivando el Lagrangeano a modo de gradientes parciales. Tal procedimiento aparece en el resumen de Pequeñas Oscilaciones.

Entonces proponemos las soluciones oscilatorias:

$q_i(t) = a_i e^{i\omega t}$ O sea, $\vec{q}(t) = \vec{a} e^{i\omega t}$

Con $\vec{a}$, $\omega$, por determinar $(i = \sqrt{-1})$

Probemos: $\dot{\vec{q}}(t) = i\omega\vec{a}e^{i\omega t}$ $\ddot{\vec{q}}(t) = -\omega^2\vec{a}e^{i\omega t}$

Reemplazando en la ecuación:

$$\tilde{m}\cdot -\omega^2\vec{a}e^{i\omega t} + \tilde{A}\cdot\vec{a}e^{i\omega t} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$(\tilde{A} - \omega^2\tilde{m})\cdot\vec{a}e^{i\omega t} = \vec{0} \Leftrightarrow (\tilde{A} - \omega^2\tilde{m})\cdot\vec{a} = \vec{0}$$

Podemos hallar los coeficientes de $\vec{a}$ planteando esta igualdad como un sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, para que la solución del sistema no sea $\vec{a} = \vec{0}$, se requiere que la matriz de coeficientes $(\tilde{A} - \omega^2\tilde{m})$ sea no invertible, es decir, $\det(\tilde{A} - \omega^2\tilde{m}) = 0$. Esta ecuación permite encontrar las frecuencias propias $\omega$.

Asignación de puntaje:

| | |
|---|---|
| Punto base | 1,0 |
| Parte (a) | 1,0 |
| Parte (b1) | 1,2 |
| Parte (b2) | 1,2 |
| Parte (c) | 1,6 |
| Parte (d) | 1,0 |
| Total | 7,0 |

Bonus:

| | |
|---|---|
| Demostrar que $T = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T \cdot \tilde{m}(\bar{q}) \cdot \dot{\bar{q}}$ | 0,6 |