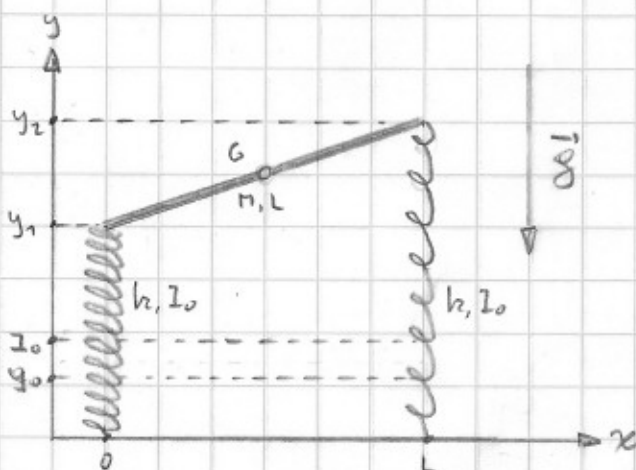


Semestre Primavera 2005

Profesor: Nicolás Mujica

Auxiliares: Carlos Suazo, David Chen, Ignacio Ortega

Pauta Ejercicio N°3

Supondremos que la distancia que separa los extremos fijos de los resortes es  $L$ .

También supondremos que los extremos de la barra sólo se mueven verticalmente, pero de tal forma que la diferencia entre sus alturas será despreciable; de tal modo que la distancia que separa estos

puntos se puede considerar igual a  $L$ .

La energía potencial elástica está dada entonces por:

$$U_h = \frac{1}{2}k(y_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2}k(y_2 - l_0)^2$$

La energía potencial gravitatoria está dada por:

$$U_g = Mg(y_0 - y_0) = \frac{1}{2}Mg(y_1 + y_2 - 2y_0)$$

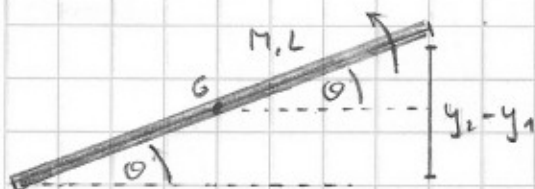
donde  $y_0$  es la altura del centro de masa  $G$ ;  $y_0$  es la altura de equilibrio, por determinar.

$$U(y_1, y_2) = U_h + U_g = \frac{1}{2}k((y_1 - l_0)^2 + (y_2 - l_0)^2) + \frac{1}{2}Mg(y_1 + y_2 - 2y_0)$$

La energía cinética se escribe:  $T = T_{tr} + T_{rot}$

Estimamos la energía de traslación como:

$$T_{tr} = \frac{1}{2}M\dot{y}_0^2 = \frac{1}{2}M \cdot \left( \frac{1}{2}(\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2 \right) = \frac{1}{8}M(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + 2\dot{y}_1\dot{y}_2)$$



La energía de rotación es:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$I = \frac{ML^2}{12}$  es el momento de inercia de la barra,

$\dot{\theta}$  es su velocidad angular respecto a \$G\$.

Ahora,  $L \sin(\theta) = y_2 - y_1$

Como suponemos que \$y\_2 - y\_1\$ es "pequeño", \$\theta\$ también lo es. Así que aproximamos: \$\sin(\theta) \approx \theta\$

$$L \theta = y_2 - y_1 \Rightarrow \theta = \frac{y_2 - y_1}{L} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{L}$$

$$\Rightarrow T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ML^2}{12} \cdot \left( \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{L} \right)^2 = \frac{M}{24} (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 - 2\dot{y}_1\dot{y}_2)$$

$$\begin{aligned} T(\dot{y}_1, \dot{y}_2) &= \frac{1}{8} M (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + 2\dot{y}_1\dot{y}_2) + \frac{1}{24} M (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 - 2\dot{y}_1\dot{y}_2) \\ &= \frac{1}{6} M (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_1\dot{y}_2) \end{aligned}$$

a) Volvamos a la energía potencial:

$$U = \frac{1}{2} k ((y_1 - l_0)^2 + (y_2 - l_0)^2) + \frac{1}{2} Mg(y_1 + y_2 - 2y_0)$$

$$\nabla U = (k(y_1 - l_0) + \frac{1}{2} Mg, k(y_2 - l_0) + \frac{1}{2} Mg)$$

$$H U = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad \text{Matriz definida positiva (sea } v) \text{ por } k > 0$$

$(y_1, y_2)$  es punto de equilibrio si  $\nabla U(y_1, y_2) = \vec{0}$

O sea,  $k(y_1 - l_0) + \frac{1}{2} Mg = 0, k(y_2 - l_0) + \frac{1}{2} Mg = 0$

Así que el punto de equilibrio es:

$$y_1^{eq} = y_2^{eq} = l_0 - \frac{Mg}{2k} = y_0$$

Y como  $V$  es definida positiva, el equilibrio es estable.

Y como  $V$  es definida positiva, el equilibrio es estable. //

b) Sean  $q_1 = y_1 - y_0$ ,  $q_2 = y_2 - y_0$ .

Derivando,  $\dot{q}_1 = \dot{y}_1$ ,  $\dot{q}_2 = \dot{y}_2$ .

$$U(\vec{q}) = \frac{k}{2} \left( (q_1 - \frac{Mg}{2k})^2 - (q_2 - \frac{Mg}{2k})^2 \right) + \frac{Mg}{2} (q_1 + q_2)$$

$$= \frac{k}{2} (q_1^2 + q_2^2) + \frac{M^2 g^2}{4k} = \frac{1}{2} \vec{q}^T \cdot V \cdot \vec{q} + U_0$$

$$T(\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} M (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \cdot m \cdot \dot{\vec{q}}$$

$$m = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ es la matriz de masa}$$

(simétrica y definida positiva)

Así que el Lagrangeano Cuadrático queda:

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T - U = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \cdot m \cdot \dot{\vec{q}} - \frac{1}{2} \vec{q}^T \cdot V \cdot \vec{q} - U_0$$

$$= \frac{1}{6} M (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) - \frac{1}{2} k (q_1^2 + q_2^2) - \frac{M^2 g^2}{4k} //$$

c) Derivadas del Lagrangeano:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -k q_1 + \frac{1}{2} q_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -k q_2 + \frac{1}{2} q_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = M \left( \frac{1}{3} \dot{q}_1 + \frac{1}{6} \dot{q}_2 \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = M \left( \frac{1}{6} \dot{q}_1 + \frac{1}{3} \dot{q}_2 \right)$$

Ecuaciones del movimiento:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0$$

$$M \left( \frac{1}{3} \ddot{q}_1 + \frac{1}{6} \ddot{q}_2 \right) + k q_1 = 0 \quad M \left( \frac{1}{6} \ddot{q}_1 + \frac{1}{3} \ddot{q}_2 \right) + k q_2 = 0$$

Se escribe también:  $M \cdot \ddot{\vec{q}} + V \cdot \vec{q} = \vec{0}$

Proponemos la solución  $\vec{q}(t) = \vec{A} e^{\lambda t}$

Luego,  $\lambda$ ,  $\vec{A}$  deben satisfacer:  $(V + \lambda^2 M) \cdot \vec{A} = \vec{0}$

Imponemos la no invertibilidad:  $\det(V + \lambda^2 M) = 0$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \lambda^2 M + k & \frac{1}{6} \lambda^2 M \\ \frac{1}{6} \lambda^2 M & \frac{1}{3} \lambda^2 M + k \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2\lambda^2 M + 6k & \lambda^2 M \\ \lambda^2 M & 2\lambda^2 M + 6k \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2\lambda^2 M + 6k)^2 - (\lambda^2 M)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (2\lambda^2 M + 6k)^2 = (\lambda^2 M)^2$$

Tenemos una igualdad del tipo  $a^2 = b^2$   $2 \times 2$ , la  
Hay entonces dos casos:  $a = b$  y  $a = -b$   $a^2 = b^2$   
Cada uno nos dará un valor de  $\lambda^2$ .

$$\text{Caso 1: } 2\lambda_1^2 M + 6k = \lambda_1^2 M \Rightarrow \lambda_1^2 M + 6k = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 = -6 \frac{k}{M} \Rightarrow \lambda_1 = \pm \sqrt{6 \frac{k}{M}} i$$

$$\text{Caso 2: } 2\lambda_2^2 M + 6k = -\lambda_2^2 M \Rightarrow 3\lambda_2^2 M + 6k = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2^2 = -2 \frac{k}{M} \Rightarrow \lambda_2 = \pm \sqrt{2 \frac{k}{M}} i$$

Como  $\omega = \lambda i$ , las frecuencias propias de oscilación valen:

$$\omega_1 = \sqrt{6 \frac{k}{M}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{2 \frac{k}{M}} \quad //$$

d) Buscamos los modos normales:

Caso  $\lambda_1^2 = -6 \frac{k}{M}$

$$\frac{1}{3} \lambda_1^2 M + k = \frac{1}{6} \lambda_1^2 M$$

$$(V + \lambda^2 m) \cdot \vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A_1 + A_2 = 0 \Leftrightarrow A_2 = -A_1$$

Los vectores propios tienen la forma:  $\vec{A}_1 = (A_1, -A_1)$

Normalizando:  $\hat{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1)$

Caso  $\lambda_2^2 = -2 \frac{k}{M}$

$$\frac{1}{3} \lambda_2^2 M + k = -\frac{1}{6} \lambda_2^2 M$$

$$(V + \lambda^2 m) \cdot \vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A_1 - A_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 = A_2$$

Los vectores propios tienen la forma:  $\vec{A}_2 = (A_2, A_2)$

Normalizando:  $\hat{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)$

$\hat{A}_1 \perp \hat{A}_2$  pues son  $\vec{v}_p$ 's asociados a diferentes v.p.'s

Así que una base ortonormal de vectores propios sería:

$$\{\hat{A}_1, \hat{A}_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} //$$



Bosquejemos la solución general:

$$\vec{q}(t) = (a_1^+ e^{i\omega_1 t} + a_1^- e^{-i\omega_1 t}) \hat{A}_1 + (a_2^+ e^{i\omega_2 t} + a_2^- e^{-i\omega_2 t}) \hat{A}_2$$

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = (a_1^+ e^{i\sqrt{6\frac{k}{m}} t} + a_1^- e^{-i\sqrt{6\frac{k}{m}} t}) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ + (a_2^+ e^{i\sqrt{2\frac{k}{m}} t} + a_2^- e^{-i\sqrt{2\frac{k}{m}} t}) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) Matriz de Pasaje:

$$A = [\hat{A}_1 : \hat{A}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En general las coordenadas normales están dadas por:

$$\vec{\Theta} = A \cdot \vec{q}$$

$$\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} q_2 + q_1 \\ q_2 - q_1 \end{pmatrix}$$

$\Theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2 + q_1)$  se relaciona con la posición (altura) del centro de masa de la barra

$\Theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2 - q_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 - y_1)$  se relaciona con la inclinación de la barra. Recordemos que  $y_2 - y_1 \approx L\theta$

Volvamos a  $\vec{q}(t)$ . Se puede escribir también:

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = (a_1^+ \cos(\sqrt{6\frac{k}{m}} t) + a_1^- \sin(\sqrt{6\frac{k}{m}} t)) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ + (a_2^+ \cos(\sqrt{2\frac{k}{m}} t) + a_2^- \sin(\sqrt{2\frac{k}{m}} t)) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, si  $\vec{q}(0) \neq 0$ ,  $\dot{\vec{q}}(0) = 0$ ; entonces:

$$q_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 \cos(\sqrt{6\frac{h}{m}} t) + a_2 \cos(\sqrt{2\frac{h}{m}} t)) \quad (1)$$

$$q_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-a_1 \cos(\sqrt{6\frac{h}{m}} t) + a_2 \cos(\sqrt{2\frac{h}{m}} t))$$

Finalmente:

$$\textcircled{1}_1(t) = a_2 \cos(\sqrt{2\frac{h}{m}} t)$$

$$\textcircled{1}_2(t) = -a_1 \cos(\sqrt{6\frac{h}{m}} t) \quad //$$