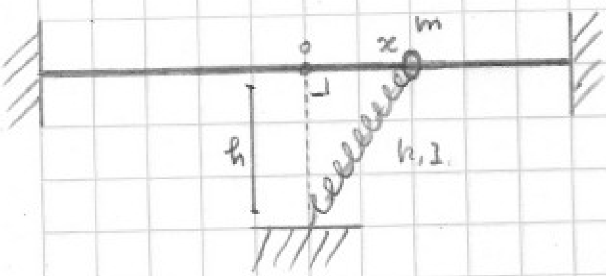
P1/



Una argolla de masa m desliza sin roce a lo largo de una vara rígida. La argolla está sujeta a un resorte de rigidez k y largo natural I.

a) Determine los puntos de equilibrio y su estabilidad según los parámetros I y h. Grafique los espectros de valores propios en cada caso.

b) Encuentre las soluciones aproximadas cuadratizando el Lagrangeano en torno a los puntos de equilibrio estables

Sol:/

La variable x (distancia de la argolla al punto 0 que muestra la figura) será nuestro único grado de libertad

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{x^2 + h^2} - I\right)^2$$

Lagrangeano:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k \left(\sqrt{x^2+h^2} - I\right)^2$$

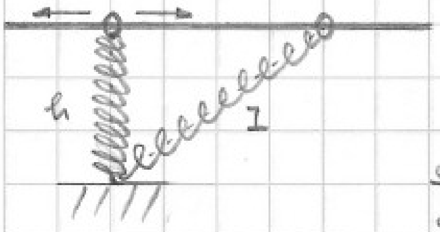
$$\frac{dU}{dx} = k\left(\sqrt{x^2+h^2} - I\right) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{kx\left(\sqrt{x^2+h^2} - I\right)}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = k\left(1 - \frac{I}{\sqrt{x^2+h^2}} + \frac{I x^2}{\sqrt{x^2+h^2}^3}\right)$$

$$\frac{dU}{dx} = 0 \iff x\left(\sqrt{x^2+h^2} - I\right) = 0 \iff x = 0 \lor \sqrt{x^2+h^2} = I$$

$$\iff x = 0 \lor x^2 + h^2 = I^2 \iff x = 0 \lor x^2 = I^2 - h^2$$

$$\iff x = 0 \lor x = \pm\sqrt{I^2 - h^2}$$



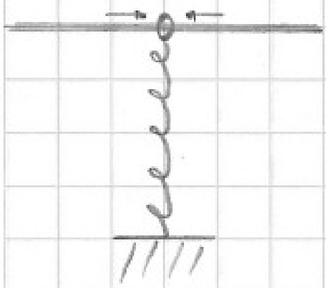
Si $h < l$, hay tres puntos de equilibrio. Estudiemos su estabilidad.

$$\frac{d^2U}{dx^2}(0) = k\left(1 - \frac{l}{h}\right) < 0 \qquad \text{si } h < l$$

$$\frac{d^2U}{dx^2}\left(\pm\sqrt{l^2 - h^2}\right) = k\left(1 - \frac{l}{l} + \frac{l(l^2 - h^2)}{l^3}\right)$$

$$= k \cdot \frac{l^2 - h^2}{l^2} > 0 \qquad \text{si } h < l$$

Entonces el origen es equilibrio inestable y los equilibrios laterales $x = \pm\sqrt{l^2 - h^2}$ son estables; lo cual es razonable pues en ellos el resorte alcanza su largo natural.



Si $h > l$, sólo el origen es punto de equilibrio (las otras dos raíces son imaginarias); lo cual es razonable pues éste es el punto en el que el resorte alcanza su menor longitud: la más cercana al largo natural

$$\frac{d^2U}{dx^2}(0) = k\left(1 - \frac{l}{h}\right) > 0 \qquad \text{si } h > l$$

Si $h = l$ los tres puntos de equilibrio corresponden al origen. Luego, $\frac{d^2U}{dx^2}(0) = 0$. Aunque la intuición nos dice que el equilibrio es estable.

b) Aproximamos el potencial en torno al origen:

$$U(x) \simeq U(0) + \cancel{U'(0)}^{\,0} x + \frac{1}{2} U''(0) x^2$$

$$= U_0 + \frac{k}{2}\left(1 - \frac{I}{h}\right) x^2$$

Lagrangeano cuadratizado:

$$L \simeq L^{[2]} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U_0 - \frac{k}{2}\left(1 - \frac{I}{h}\right) x^2$$

Derivadas del Lagrangeano:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k\left(1 - \frac{I}{h}\right) x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d\, m\dot{x}}{dt} = m\ddot{x}$$

Ecuación del movimiento linealizada:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{I}{h}\right) x = 0$$ E.D.O. lineal de segundo orden

Solución general:

$$x(t) = A e^{\lambda_0 t} + B e^{-\lambda_0 t}$$

donde $\lambda_0 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{I}{h} - 1\right)}$ Real si $h < I$, Imaginario si $h > I$

Si el origen es equilibrio estable ($h > I$), la frecuencia de pequeñas oscilaciones es:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{I}{h}\right)}$$

Aproximamos el potencial en torno a $x_1 = \sqrt{I^2 - h^2}$ (suponemos $h < I$)

$$U(x) \approx U(x_1) + \cancel{U'(x_0)}(x-x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x-x_0)^2$$

Sean $U_1 = U(x_1)$, $\eta = x - x_1$. Luego, $\dot{\eta} = \dot{x}$

$$U(\eta) \approx U_1 + \frac{1}{2}U''(x_0)\eta^2$$

$$= U_1 + \frac{k}{2}\left(1 - \left(\frac{h}{I}\right)^2\right)\eta$$

Lagrangeano cuadratizado:

$$L \approx L^{(2)} = \frac{m\dot{\eta}^2}{2} - U_0 - \frac{k}{2}\left(1 - \left(\frac{h}{I}\right)^2\right)\eta^2$$

Encontramos la ecuación de movimiento linealizada en forma análoga al caso anterior:

$$\ddot{\eta} + \frac{k}{m}\left(1 - \left(\frac{h}{I}\right)^2\right)\eta = 0$$

(oscilador armónico)

Frecuencia para pequeñas oscilaciones:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \left(\frac{h}{I}\right)^2\right)}$$

Valores propios: $\lambda_1 = \pm i\Omega_1$

Graficamos el espectro de valores propios según cada caso