FI21B/1 Sistemas Dinámicos

Semestre Primavera 2005 Profesor: Nicolás Mujica

Auxiliares: Carlos Suazo, David Chen, Ignacio Ortega

<u>Clase Auxiliar 26 de octubre</u>

Pequeñas oscilaciones

Sea un problema descrito por el Lagrangeano:

$$L(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = T(\vec{q},\dot{\vec{q}}) - U(\vec{q})$$

Sea $\vec{q}^{\,0}$ un punto de equilibrio estable, es decir:

- $\nabla U(\vec{q}^{\,0}) = \frac{\partial U}{\partial \vec{q}}(\vec{q}^{\,0}) = \vec{0}$
- $HU(\vec{q}^{\,0})$ (matriz hessiana) es semidefinida positiva (y por ser hessiana es simétrica)

Taylor:

$$U(\vec{q}) \approx U(\vec{q}^{\,0}) + \cancelto{0}{\nabla U(\vec{q}^{\,0})}\cdot(\vec{q}-\vec{q}^{\,0}) + \frac{1}{2}(\vec{q}-\vec{q}^{\,0})^T \cdot HU(\vec{q}^{\,0})\cdot(\vec{q}-\vec{q}^{\,0})$$

Sean $V = HU(\vec{q}^{\,0})$, como $U(\vec{q}^{\,0})$ es constante, podemos decir:

$$U(\vec{q}) = \frac{1}{2}(\vec{q}-\vec{q}^{\,0})^T\cdot V\cdot(\vec{q}-\vec{q}^{\,0})$$

Sea $\vec{\eta} = \vec{q} - \vec{q}^{\,0}$: $\quad U = \frac{1}{2}\vec{\eta}^{\,T}\cdot V\cdot\vec{\eta}$

$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^{\,T}\cdot M(\vec{q})\cdot\dot{\vec{q}}$ $\qquad$ Aproximamos $M(\vec{q}) \approx M(\vec{q}^{\,0}) = M$

Notar que $\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{\eta}}$: $\quad T = \frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^{\,T}\cdot M\cdot\dot{\vec{\eta}}$

Obs: No hay una única matriz $M(\vec{q})$ para escribir la energía cinética. Tal matriz no es única pero hay sólo una que es simétrica. Tal es la matriz de masa

$$M(\vec{q}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i^{\,T}}{d\vec{q}} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{d\vec{q}} \quad \text{o bien,} \quad M_{ij}(\vec{q}) = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

Escribimos el Lagrangeano cuadratizado:

$$L_{[2]}(\vec{\eta}, \dot{\vec{\eta}}) = \frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^T \cdot M \cdot \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2}\vec{\eta}^T \cdot V \cdot \vec{\eta}$$

(forma cuadrática de los grados de libertad)

Derivadas del Lagrangeano:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\eta}} = -V \cdot \vec{\eta} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\eta}}} = M \cdot \dot{\vec{\eta}} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\eta}}}\right) = M \cdot \ddot{\vec{\eta}}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\eta}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{\eta}} = \vec{0}$

$$M \cdot \ddot{\vec{\eta}} + V \cdot \vec{\eta} = \vec{0}$$

Ansatz: $\vec{\eta}(t) = \vec{A} e^{\lambda t}$, $\vec{A} \neq 0$

Reemplazando: $M \cdot \lambda^2 \vec{A} e^{\lambda t} + V \cdot \vec{A} e^{\lambda t} = \vec{0}$

$$\Rightarrow (V + \lambda^2 M) \cdot \vec{A} e^{\lambda t} = \vec{0} \Leftrightarrow (V + \lambda^2 M) \cdot \vec{A} = \vec{0}$$

Requerimos que $(V + \lambda^2 M)$ sea NO invertible.
Es decir, $\det(V + \lambda^2 M) = 0$

$\lambda \in \mathbb{C} \;/\; \det(V + \lambda^2 M) = 0$ se conoce como valor propio.

Dado un valor propio λ, las soluciones $\vec{A}$ del sistema lineal $(V + \lambda^2 M) \cdot \vec{A} = \vec{0}$ se conoce como vector propio asociado a λ

- Propiedad: Los valores propios son números imaginarios puros; es decir, $\lambda = i\omega$, con $\omega \in \mathbb{R}$.

Demostración:/ Dado λ, valor propio, existe $\vec{A} \in \mathbb{C}^n$ tal que $(V + \lambda^2 M) \cdot \vec{A} = \vec{0}$

Multiplicando por el vector conjugado de A (producto hermítico):

$$\langle (V+\lambda^2 M)\cdot\vec{A}, \vec{A} \rangle_H = \vec{0}$$

$$\sum_{j=1}^{n} [(V+\lambda^2 M)\cdot\vec{A}]_j \cdot [\vec{A}]_j^* = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (V_{ij} + \lambda^2 M_{ij}) A_i A_j^* = 0$$

$$\sum_{ij} V_{ij} A_i A_j^* + \lambda^2 \sum_{ij} M_{ij} A_i A_j^* = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{\sum_{ij} V_{ij} A_i A_j}{\sum_{ij} M_{ij} A_i A_j} = -\frac{\vec{A}^{T*}\cdot V \cdot \vec{A}}{\vec{A}^{T*}\cdot M \cdot \vec{A}}$$

Dado $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matriz simétrica y definida positiva, probaremos que $\forall \vec{z} \in \mathbb{C}^n$ $\vec{z}^T \cdot B \cdot \vec{z}^* \geq 0$

En efecto, $\vec{z} = \vec{a} + i\vec{b}$, $\vec{z}^* = \vec{a} - i\vec{b}$ $\quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{z}^T \cdot B \cdot \vec{z}^* = (\vec{a}^T + i\vec{b}^T)\cdot B \cdot (\vec{a} - i\vec{b})$$

$$= (\vec{a}^T \cdot B + i\vec{b}^T \cdot B)\cdot(\vec{a} - i\vec{b})$$

$$= \vec{a}^T\cdot B\cdot\vec{a} - i\vec{a}^T\cdot B\cdot\vec{b} + i\vec{b}^T\cdot B\cdot\vec{a} + \vec{b}^T\cdot B\cdot\vec{b}$$

$$= \vec{a}^T\cdot B\cdot\vec{a} + \vec{b}^T\cdot B\cdot\vec{b} + i(\vec{b}^T\cdot B\cdot\vec{a} - \vec{a}^T\cdot B\cdot\vec{b})$$

Pero B es simétrica. Notar que:

$$(\vec{b}^T\cdot B\cdot\vec{a})^T = \vec{a}^T\cdot B^T\cdot\vec{b}^{TT} = \vec{a}^T\cdot B\cdot\vec{b}$$

Así que $\vec{b}^T\cdot B\cdot\vec{a} - \vec{a}^T\cdot B\cdot\vec{b} = 0$

Finalmente, $\vec{z}^T \cdot B \cdot \vec{z}^* = \vec{a}^T \cdot B \cdot \vec{a} + \vec{b}^T \cdot B \cdot \vec{b} \geq 0$
pues B es semidefinida positiva.

De esto se deduce que $\vec{A}^T \cdot V \cdot \vec{A}^* \geq 0$, $\vec{A}^T \cdot M \cdot \vec{A}^* \geq 0$

Así que $\lambda^2 \leq 0$

Por tanto, $\exists \omega \in \mathbb{R} \,/\, \lambda = i\omega$ Demostrado //

Como $\lambda^2 = -\omega^2 \in \mathbb{R}$, los vectores propios $\vec{A}$ son reales. Se puede probar también que vectores propios asociados a valores propios diferentes son ortogonales. Luego, podemos construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Sean $\{\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n\}$, con $\hat{A}_j$, vector propio asociado a un valor propio $\pm i\omega_j$

Observación: $i \neq j$ no implicará necesariamente $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ (por la multiplicidad geométrica), pero sí implicará $\hat{A}_i \perp \hat{A}_j$.

Con todo esto podemos escribir una solución general de la forma:

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j e^{i\omega_j t} + b_j e^{-i\omega_j t}\right) \hat{A}_j$$

Podemos reescribir la solución utilizando seno y coseno

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \cos(\omega_j t) + b_j \sin(\omega_j t)\right)$$