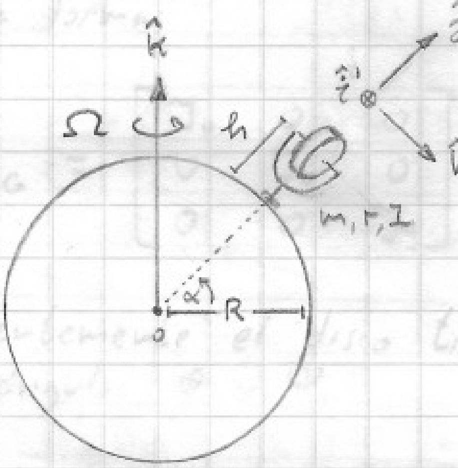
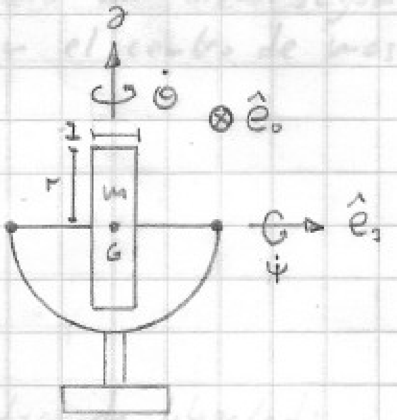
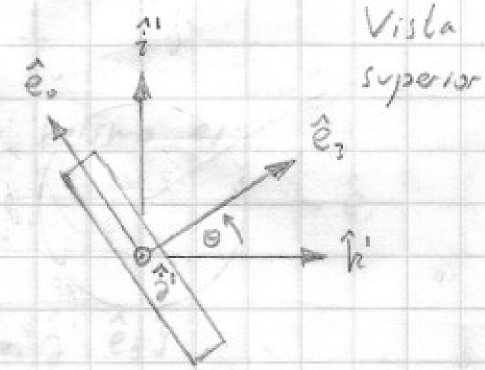
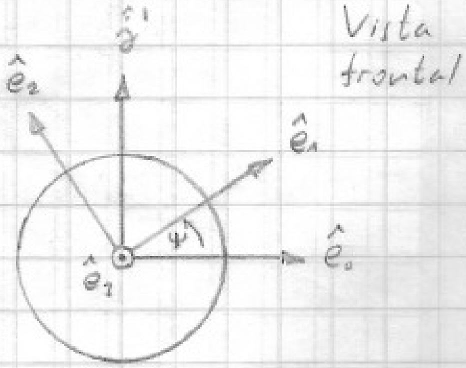
Pauta Control N°2

P2/ Brújula de Foucault:









Sea m la masa del disco, r su radio y I su grosor. Sabemos que la energía cinética del disco tiene un componente traslacional y otro rotacional.

Notar que el centro de masa describe un M.C.U. Como $R \gg r$, decimos: $\vec{r}_G = R\hat{\jmath}'$ luego $\vec{v}_G = \Omega R\cos(\alpha)\hat{\imath}'$ y

$$T_{TR} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_G\|^2 = \frac{1}{2}m\Omega^2R^2\cos^2(\alpha)$$

Para describir la rotación del disco en torno a G definimos el vector unitario $\hat{e}_0 = \hat{\jmath}' \times \hat{e}_3$. Los ejes principales $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$, solidarios al disco corresponden a "rotaciones de los ejes $\hat{e}_0$ y $\hat{\jmath}'$". Con todo esto:

$$\theta = 0 \Rightarrow \hat{e}_3 = \hat{k}', \quad \hat{e}_0 = \hat{\imath}' \qquad \psi = 0 \Rightarrow \hat{e}_1 = \hat{e}_0, \quad \hat{e}_2 = \hat{\jmath}'$$

Ahora, la base $\{\hat{e}_0, \hat{j}', \hat{e}_3\}$, si bien no es solidaria al disco, es de todos modos una base de ejes principales, dada la simetría cilíndrica de éste. Luego, la matriz de inercia del disco según un sistema de ejes $\{\hat{e}_0, \hat{j}', \hat{e}_3\}$ y origen en el centro de masa G tiene la forma:

$$\mathbb{I}_G = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & J_0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

Evidentemente el disco tiene dos grados de libertad: los ángulos θ y Ψ.

La velocidad angular del disco sobre sí mismo es:

$$\vec{\omega} = \Omega \hat{k} + \dot{\theta} \hat{j}' + \dot{\Psi} \hat{e}_3$$

La idea es escribir $\vec{\omega}$ en la base $\{\hat{e}_0, \hat{j}', \hat{e}_3\}$

De las vistas superior y frontal del disco se ve que:

$$\hat{k} = \sin(\alpha)\hat{j}' - \cos(\alpha)\hat{k}'$$

$$\hat{k}' = \cos(\theta)\hat{e}_3 - \sin(\theta)\hat{e}_0$$

$$\hat{k} = \sin(\alpha)\hat{j}' - \cos(\alpha)(\cos(\theta)\hat{e}_3 - \sin(\theta)\hat{e}_0)$$

$$\vec{\omega} = \Omega\sin(\alpha)\hat{j}' + \Omega\cos(\alpha)(-\cos(\theta)\hat{e}_3 + \sin(\theta)\hat{e}_0) + \dot{\theta}\hat{j}' + \dot{\Psi}\hat{e}_3$$

$$= \Omega\cos(\alpha)\sin(\theta)\hat{e}_0 + (\dot{\theta} + \Omega\sin(\alpha))\hat{j}' + (\dot{\Psi} - \Omega\cos(\alpha)\cos(\theta))\hat{e}_3$$

Llamémoslas $\vec{\omega} = \omega_0\hat{e}_0 + \omega_j\hat{j}' + \omega_3\hat{e}_3$

Luego, la energía cinética de rotación está dada por:

$$T_{ROT} = \frac{1}{2}\vec{\omega}' \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2}(J_0\omega_0^2 + J_0\omega_j^2 + J_3\omega_3^2)$$

$$\omega_0^2 = \Omega^2 \cos^2(\alpha)\sin^2(\theta)$$

$$\omega_j^2 = \dot{\theta}^2 + \Omega^2\sin^2(\alpha) + 2\dot{\theta}\Omega\sin(\alpha)$$

$$\omega_3^2 = \dot{\Psi}^2 + \Omega^2\cos^2(\alpha)\cos^2(\theta) - 2\dot{\Psi}\Omega\cos(\alpha)\cos(\theta)$$

$$T_{ROT} = \frac{1}{2}J_0(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\Omega\sin(\alpha) + \Omega^2\cos^2(\alpha)\sin^2(\theta) + \Omega^2\sin^2(\alpha))$$
$$+ \frac{1}{2}J_3(\dot{\Psi} - \Omega\cos(\alpha)\cos(\theta))^2$$

La energía potencial gravitatoria está dada por:

$$U = \frac{GMm}{R} \approx mgh$$

a) Lagrangeano: $L = T - U = T_{TR} + T_{ROT} - U$

Como T_{TR} y U no dependen de ningún grado de libertad, son irrelevantes en las ecuaciones de Euler-Lagrange. Así que es válido decir $L = T_{TR}$. De todos modos:

$$L = \frac{1}{2}J_0\left(\Omega^2\cos^2(\alpha)\sin^2(\theta) + (\dot{\theta} + \Omega\sin(\alpha))^2\right)$$
$$+ \frac{1}{2}J_3(\dot{\Psi} - \Omega\cos(\alpha)\cos(\theta))^2 + \frac{1}{2}m(\Omega R\cos(\alpha))^2 - \frac{GMm}{R}$$

Cantidades conservadas: El momentum generalizado p_ψ es cantidad conservada pues L no depende de ψ. También es cantidad conservada el Hamiltoniano $H = \vec{\dot{q}} \cdot \vec{p} - L$, pues L no depende explícitamente de t, y no hay fuerzas generalizadas. Sin embargo, el Hamiltoniano NO es igual a la energía mecánica $E = T + U$, pues T no es una forma cuadrática pura de la forma:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\dot{q}}^T \cdot \mathbb{M} \cdot \vec{\dot{q}}$$

Veremos que la velocidad angular ω_3 también es conservada

b) Derivadas del Lagrangeano:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = J_0 \Omega^2 \cos^2(\alpha) \sin(\theta) \cos(\theta) + J_3 (\dot{\psi} - \Omega \cos(\alpha) \cos(\theta)) \Omega \cos(\alpha) \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Momentum generalizado:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J_0 (\dot{\theta} + \Omega \sin(\alpha)) \qquad \frac{dp_\theta}{dt} = J_0 \ddot{\theta}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J_3 (\dot{\psi} - \Omega \cos(\alpha) \cos(\theta)) = J_3 \omega_3 \quad \text{(cantidad conservada)}$$

Ecuación del movimiento:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Obs. La ecuación de Euler-Lagrange para ψ sólo implica la conservación de p_ψ.

Reescribimos:

$$I_0\ddot{\theta} - I_0\Omega^2\cos^2(\alpha)\sin(\theta)\cos(\theta) - I_3(\dot{\psi} - \Omega\cos(\alpha)\cos(\theta))\Omega\cos(\alpha)\sin(\theta) = 0$$

Osea, $I_0\ddot{\theta} - I_0\Omega^2\cos^2(\alpha)\sin(\theta)\cos(\theta) - p_\psi\Omega\cos(\alpha)\sin(\theta) = 0$

Analicemos el momentum generalizado
$p_\psi = I_3(\dot{\psi} - \Omega\cos(\alpha)\cos(\theta))$

Si suponemos que $|\dot{\psi}| >> |\Omega|$, es razonable aproximar $\dot{\psi} - \Omega\cos(\alpha)\cos(\theta) \approx \dot{\psi}$; osea, $p_\psi = I_3\dot{\psi}$. Como p_ψ es conservado, $\dot{\psi}$ también se puede considerar conservados (sus variaciones son despreciables).

Reemplazando en la ecuación:

$$I_0\ddot{\theta} - I_0\Omega^2\cos^2(\alpha)\sin(\theta)\cos(\theta) - I_3\dot{\psi}\Omega\cos(\alpha)\sin(\theta) = 0$$

c) Notar que $\theta = 0$ es punto de equilibrio. Linealizamos la ecuación usando las aproximaciones $\sin(\theta) \approx \theta$, $\cos(\theta) \approx 1$:

$$I_0\ddot{\theta} - I_0\Omega^2\cos^2(\alpha)\theta - I_3\dot{\psi}\Omega\cos(\alpha)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} - \left(\frac{I_3}{I_0}\dot{\psi} + \Omega\cos(\alpha)\right)\Omega\cos(\alpha)\theta = 0$$

Nuevamente aproximamos: $\frac{I_3}{I_0}\dot{\psi} + \Omega\cos(\alpha) \approx \frac{I_3}{I_0}\dot{\psi}$

$$\ddot{\theta} - \frac{I_3}{I_0}\dot{\psi}\Omega\cos(\alpha)\theta = 0$$ E.D.O. lineal de segundo orden

Si $\dot{\psi} > 0$ las soluciones son exponenciales y $\theta = 0$ es equilibrio inestable. Si $\dot{\psi} < 0$, las soluciones son armónicas y $\theta = 0$ es equilibrio estable.

$\theta = \pi$ también es punto de equilibrio. Linealizamos la ecuación usando las aproximaciones $\sin(\theta) \approx \pi - \theta$, $\cos(\theta) \approx -1$

$$I_0\ddot{\theta} - I_0\Omega^2\cos^2(\alpha)\sin(\theta)\cos(\theta) - I_3\dot{\Psi}\Omega\cos(\alpha)\sin(\theta) = 0$$

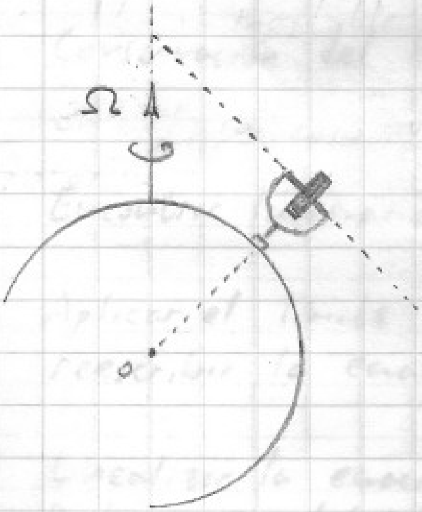
$$I_0\ddot{\theta} - I_0\Omega^2\cos^2(\alpha)(\theta-\pi) - I_3\dot{\Psi}\Omega\cos(\alpha)(\pi-\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{I_3}{I_0}\dot{\Psi} - \Omega\cos(\alpha)\right)\Omega\cos(\alpha)(\theta-\pi) = 0$$

Nuevamente aproximamos: $\frac{I_3}{I_0}\dot{\Psi} - \Omega\cos(\alpha) \approx \frac{I_3}{I_0}\dot{\Psi}$

$$\ddot{\theta} + \frac{I_3}{I_0}\dot{\Psi}\Omega\cos(\alpha)(\theta-\pi) = 0$$

Si $\dot{\Psi} > 0$ las soluciones son armónicas y $\theta = \pi$ es equilibrio estable. Si $\dot{\Psi} < 0$ las soluciones son exponenciales y $\theta = \pi$ es equilibrio inestable.



En cualquier caso el eje de rotación del péndulo tiende a intersectar el eje de rotación de la Tierra como muestra la figura, independiente del sentido de rotación de $\dot{\Psi}$.

De este modo, la brújula de Foucault puede ser muy útil para orientarse geográficamente. De hecho, los barcos y aviones suelen tener este tipo de brújulas ya que las brújulas magnéticas no funcionan muy bien sobre vehículos que se mueven a gran velocidad.

Asignación de puntaje:

Punto base:	1,0
Determinar la velocidad angular $\vec{\omega}$	0,3
Escribir $\vec{\omega}$ en una base de ejes principales	1,2
Escribir la energía cinética de rotación	0,6
Escribir el Lagrangeano	0,4
Conservación del momentum generalizado p_φ	0,3
Conservación del Hamiltoniano H	0,3
Encontrar la ecuación del movimiento	1,0
Aplicar el límite $\lvert\dot{\psi}\rvert \gg \lvert\Omega\rvert$ para reescribir la ecuación	0,6
Linealizar la ecuación en torno a cada equilibrio. Determinar estabilidad según el signo de $\dot{\psi}$	0,8
Comentar la utilidad de la brújula de Foucault	0,5
Total	7,0

Bonus:
- Escribir la energía cinética de traslación 0,1
- Escribir la energía potencial 0,1
- Verificar que $H \neq E$ 0,2