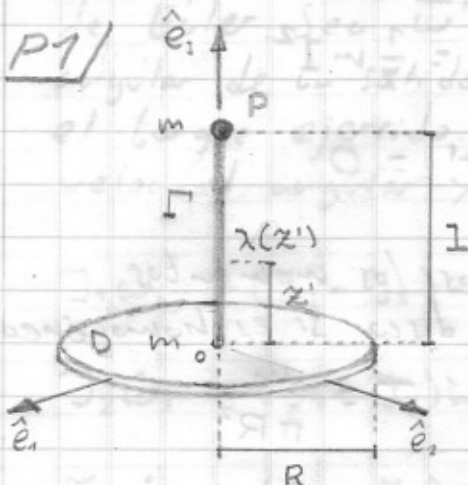


Clase Auxiliar 28 de septiembre

Una barra rígida de largo  $l$  y densidad no uniforme  $\lambda(z') = \frac{m}{z'}$  está soldada a una partícula de masa  $m$  en un extremo, y a un disco homogéneo de radio  $R$  y masa  $m$  en el otro extremo, en el centro del disco, perpendicular a éste.

- Encuentre los momentos principales de inercia del sistema.
- Mediante algún tipo de bisagra el sistema se mantiene fijo en el punto  $O$ . Se aplica además un torque constante  $\tilde{\tau}_0$  a lo largo de la barra. Encuentre la velocidad angular  $\tilde{\omega}$  en función del tiempo. Inicialmente, el sistema está en reposo.

Sol: 1

a) Es fácil ver que los ejes principales de inercia son los que se ven en la figura.

La matriz de inercia de la partícula  $P$  según la base de ejes principales con origen en el punto fijo  $O$  es:

$$I_P^{(O)} = m \begin{bmatrix} y'^2 + z'^2 & -x'y' & -z'x' \\ -x'y' & x'^2 + z'^2 & -y'z' \\ -z'x' & -y'z' & x'^2 + y'^2 \end{bmatrix} = m l^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

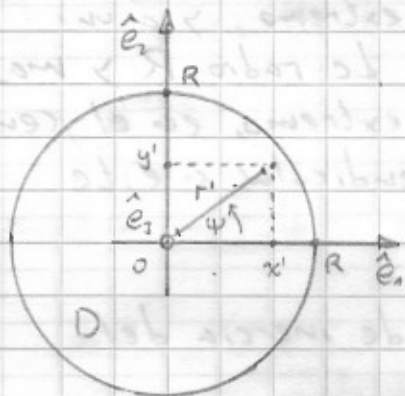
$$(\tilde{r}_P = l \hat{e}_3)$$

Calculamos los momentos principales de la barra:

$$J_1 = \int_V \rho \cdot (z'^2 + y'^2) dV' = \int_0^L \frac{m}{L} \cdot z'^2 dz' = m \int_0^L z' dz' = \frac{1}{2} m L^2$$

Por simetría,  $J_2 = \frac{1}{2} m L^2$

$$J_3 = \int_V \rho \cdot (x'^2 + y'^2) dV' = \int_V 0 dV' = 0$$



Ahora calculamos los momentos principales del disco. Si es homogéneo su densidad es:  $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$

$$J_1 = \iint_D \sigma \cdot (x'^2 + y'^2) dS' = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma \cdot r'^2 \sin^2(\psi) \cdot r' d\psi dr'$$

$$= \sigma \cdot \int_0^R r'^3 dr' \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(\psi) d\psi = \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot \pi = \frac{1}{4} m R^2$$

Por simetría,  $J_2 = \frac{1}{4} m R^2$

$$J_3 = \iint_D \sigma \cdot (x'^2 + y'^2) dS' = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma \cdot r'^2 \cdot r' d\psi dr' = \sigma \cdot \int_0^R r'^3 dr' \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\psi = \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi = \frac{1}{2} m R^2$$

Sumando los momentos principales encontramos la matriz de inercia del sistema:

$$I^{(0)} = I_p^{(0)} + I_L^{(0)} + I_D^{(0)} = m \begin{bmatrix} \frac{3}{2} L^2 + \frac{1}{4} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} L^2 + \frac{1}{4} R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la velocidad angular está dada por

b) Este problema se puede resolver mediante las ecuaciones de Euler. Sea  $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$  la velocidad angular de un sólido rígido. Sea  $\vec{\tau} = \tau_1 \hat{e}_1 + \tau_2 \hat{e}_2 + \tau_3 \hat{e}_3$  el torque ejercido. Las ecuaciones que describen la velocidad angular y el torque en el tiempo son:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_3 \omega_2 = \tau_1 \quad (E1)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = \tau_2 \quad (E2)$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_2 \omega_1 = \tau_3 \quad (E3)$$

En este caso,  $J_1 = J_2 \neq J_3$ ,  $\vec{\tau} = \tau_0 \hat{e}_3$ . Reescribimos:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_2 = 0 \quad (E1)$$

$$J_1 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \quad (E2)$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 = \tau_0 \quad (E3)$$

$$(E1) \Rightarrow \dot{\omega}_1 = -\frac{\tau_0}{J_1} \omega_3 \Rightarrow \omega_1 = -\frac{\tau_0}{J_1} t \omega_3$$

Pero en  $t=0$ ,  $\omega_1 = 0$ , así que  $\omega_3 = 0$

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \frac{\tau_0}{J_3} t \omega_2 = 0 \quad (E1)$$

$$J_1 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \frac{\tau_0}{J_3} t \omega_2 = 0 \quad (E2)$$

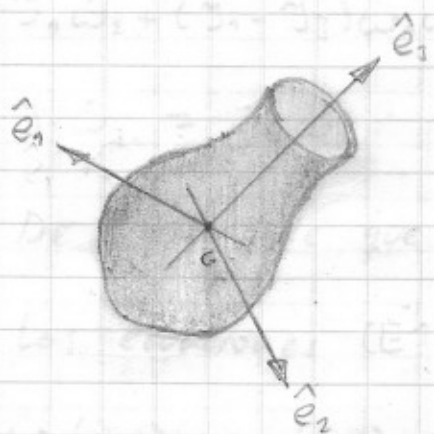
Por inspección se verifica que  $\omega_1(t) = 0$  y  $\omega_2(t) = 0$  satisfacen las ecuaciones y la condición inicial.



Finalmente, la velocidad angular está dada por:

$$\vec{\omega}(t) = \frac{\tilde{\tau}_3}{J_3} t \hat{e}_3$$

P2/



Un cuerpo rígido con un eje de simetría ( $\hat{e}_3$ ) se halla dentro de un medio viscoso. El torque que las fuerzas externas ejercen al cuerpo con respecto al centro de masas viene dado por:

$$\vec{\tau}(t) = -c\vec{\omega}$$

con  $c$ , constante del medio y  $\vec{\omega}$  la velocidad angular del cuerpo.

Demuestre que a medida que transcurre el tiempo el ángulo entre el eje de simetría y el vector  $\vec{\omega}$  va siendo cada vez más pequeño (siempre y cuando  $J_3 > J_1$ ).

Sol: /

Expresamos los vectores en la base de ejes principales:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$$

$$\vec{\tau} = \tau_1 \hat{e}_1 + \tau_2 \hat{e}_2 + \tau_3 \hat{e}_3$$

De la ecuación  $\dot{\vec{L}}^{(G)} = \vec{\tau}^{(G)}$  se deducen las siguientes Ecuaciones de Euler:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_3 \omega_2 = \tau_1$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = \tau_2$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_2 \omega_1 = \tau_3$$

donde la matriz de inercia del sólido según la base de ejes principales  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  con origen en el centro de masa  $G$  es:

$$I^{(G)} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

En este caso,  $\gamma_1 = \gamma_2 < \gamma_3$ ,  $\vec{\gamma} = -c\vec{\omega}$ . Reemplazando:

$$\gamma_1 \dot{\omega}_1 + (\gamma_3 - \gamma_1) \omega_2 \omega_3 = -c \omega_1 \quad (E1)$$

$$\gamma_1 \dot{\omega}_2 + (\gamma_1 - \gamma_3) \omega_1 \omega_3 = -c \omega_2 \quad (E2)$$

$$\gamma_3 \dot{\omega}_3 = -c \omega_3 \quad (E3)$$

De (E3) sale que  $\omega_3(t) = \Omega_3 e^{-\frac{c}{\gamma_3} t}$  (con  $\Omega_3$  constante)

Las ecuaciones (E1) y (E2) se pueden combinar:

$$\omega_1(E1) + \omega_2(E2) \Leftrightarrow \gamma_1(\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2) = -c(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2) = -2 \frac{c}{\gamma_1} (\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = -2 \frac{c}{\gamma_1} (\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

$$\Leftrightarrow \omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 = \Omega_0^2 e^{-2 \frac{c}{\gamma_1} t}$$

En general, el ángulo entre dos vectores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  está dado por:  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\alpha)$

En este caso, nos interesa el ángulo entre  $\vec{\omega}$  y  $\hat{e}_3$ :

$$\vec{\omega} \cdot \hat{e}_3 = \|\vec{\omega}\| \cdot \|\hat{e}_3\| \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow \omega_3 = \|\vec{\omega}\| \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\omega_3}{\|\vec{\omega}\|} \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\Omega_3^2 e^{-2 \frac{c}{\gamma_3} t}}{\Omega_0^2 e^{-2 \frac{c}{\gamma_1} t} + \Omega_3^2 e^{-2 \frac{c}{\gamma_3} t}}$$

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\Omega_0^2 e^{-2\frac{c}{J_1}t} + \Omega_3^2 e^{-2\frac{c}{J_3}t}}{\Omega_3^2 e^{-2\frac{c}{J_3}t}} = \frac{\Omega_0^2 e^{-2\frac{c}{J_1}t}}{\Omega_3^2 e^{-2\frac{c}{J_3}t}} + 1$$

$$= 1 + \frac{\Omega_0^2}{\Omega_3^2} e^{2c(-\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_3})t} = 1 + \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_3}\right)^2 e^{2c\frac{J_1 - J_3}{J_1 J_3}t}$$

Como  $J_1 < J_3$ ,  $2c\frac{J_1 - J_3}{J_1 J_3} < 0$ ,  $\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$  es decreciente en el tiempo ( $c > 0$ )

De hecho,  $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$ ; o sea,  $\cos^2(\alpha) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$

Esto quiere decir que el ángulo  $\alpha(t)$  tiende a cero o a  $\pi$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En cualquier caso, esto significa que el vector velocidad angular tiende a hacerse paralelo al eje principal  $\hat{e}_3$ .

El sistema de ecuaciones de Euler puede ser resuelto explícitamente. Reemplazando  $\omega_3$  en (E1) y (E2) se obtiene:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \Omega_0 e^{-\frac{c}{J_3}t} \omega_2 = -c\omega_1$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \Omega_0 e^{-\frac{c}{J_1}t} \omega_1 = -c\omega_2$$

Reordenando:

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{c}{J_1} \omega_1 - \frac{J_3 - J_1}{J_1} \Omega_0 e^{-\frac{c}{J_3}t} \omega_2$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_1} \Omega_0 e^{-\frac{c}{J_1}t} \omega_1 + \frac{c}{J_1} \omega_2$$

Este es un sistema de la forma  $\dot{\vec{w}} = A(t) \cdot \vec{w}$   
 $\vec{w} = (\omega_1, \omega_2)$

Ansatz:  $\vec{w}(t) = \vec{v} e^{\lambda(t)}$  donde  $\vec{v}$  es vector propio de  $A(t)$  asociado al valor propio  $\lambda(t)$ .

En efecto,  $\dot{\vec{w}}(t) = \dot{\lambda}(t) \vec{v} e^{\lambda(t)} = A(t) \cdot \vec{v} e^{\lambda(t)} = A(t) \cdot \vec{w}(t)$

La matriz  $A$  es de la forma:  $A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{bmatrix}$   $a > 0$   
 $b(t) > 0$

Se verifica que  $\vec{v} = (1, i)$  es  $\vec{v}_p$  de  $A$  asociado al v.p.  $\lambda = -a - ib(t)$  y  $\vec{v} = (i, 1)$  es  $\vec{v}_p$  de  $A$  asociado al v.p.  $\lambda = -a + ib(t)$

Solución general:

$$\vec{w}(t) = \Omega_1 e^{-at - ib(t)} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \Omega_2 e^{-at + ib(t)} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esta solución es compleja. Tomamos la parte real:

$$w_1(t) = \Omega_1 e^{-at} \cos(b(t)) - \Omega_2 e^{-at} \sin(b(t))$$

$$w_2(t) = \Omega_1 e^{-at} \sin(b(t)) + \Omega_2 e^{-at} \cos(b(t))$$

$$a = \frac{c}{\gamma_1} \quad b(t) = \frac{\gamma_3 - \gamma_1}{\gamma_1} \Omega_3 e^{-\frac{c}{\gamma_1} t}$$

$$b(t) = \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{c} \Omega_3 e^{-\frac{c}{\gamma_1} t}$$

$\Omega_1, \Omega_2$  son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Obs:  $\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \Omega_0^2$