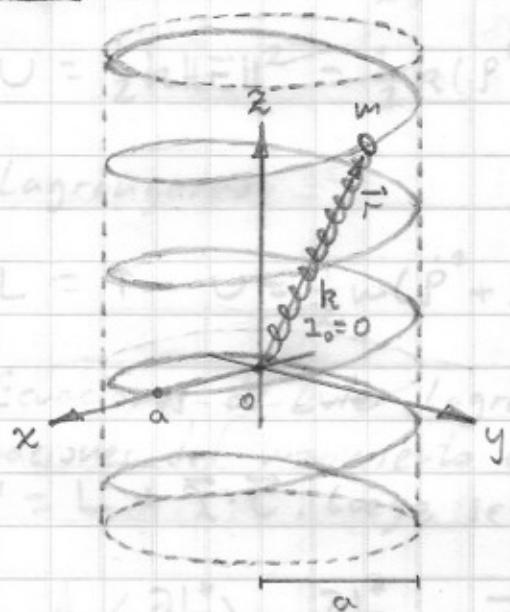


Pauta Control N°1

P2/

Fuerzas de Constricción

Una argolla de masa m está restringida a moverse en una hélice que en coordenadas cilíndricas está dada por $\rho = a$ y $z = b\phi$, con a y b constantes. La argolla se mueve sin roce sobre esta hélice y está también sujeta a un potencial $U = \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2)$. En $t=0$ la argolla se lanza con velocidad $\dot{z} = v_0$ desde $z=0$.

Encuentre la fuerza de constricción que actúa sobre la partícula como función del tiempo utilizando el método de multiplicadores de Lagrange.

Sol: / Notar que podemos suponer que la energía potencial corresponde a un resorte con un extremo fijo al origen, de rigidez k y largo natural despreciable.

Coordenadas cilíndricas: $\vec{r}(\rho, \phi, z)$

Restricciones: $\rho = a \Rightarrow C_1(\vec{r}) = \rho - a$

$z = b\phi \Rightarrow C_2(\vec{r}) = z - b\phi$

La fuerza que produce las restricciones es la fuerza normal que el alambre espiral ejerce sobre la argolla. Esta fuerza está dada por $\vec{N} = \lambda_1 \nabla C_1 + \lambda_2 \nabla C_2$

λ_1, λ_2 son los multiplicadores de Lagrange, por determinar. ②
Omitiendo las restricciones:

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \quad \vec{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}$$

$$T = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

$$U = \frac{1}{2} k \|\vec{r}\|^2 = \frac{1}{2} k (\rho^2 + z^2)$$

Lagrangeano:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} k (\rho^2 + z^2)$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange: Una forma de determinar las ecuaciones del movimiento del sistema es definir el Lagrangeano $L^* = L + \vec{\lambda} \cdot \vec{C}$. Luego, se satisface la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial \vec{q}} = \vec{0} \quad \text{donde en este caso: } \vec{q} = (\rho, \phi, z; \lambda_1, \lambda_2)$$

Se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = \lambda_1 \frac{\partial C_1}{\partial \rho} + \lambda_2 \frac{\partial C_2}{\partial \rho} \quad (\rho)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \lambda_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi} + \lambda_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi} \quad (\phi)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial C_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial C_2}{\partial z} \quad (z)$$

$$C_1(\rho) = 0 \quad (\lambda_1) \quad C_2(\phi, z) = 0 \quad (\lambda_2)$$

(Se recuperan las restricciones)

(3)

Derivadas del Lagrangeano: $\lambda_1 = \alpha(k - m\dot{\phi}^2)$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = m\dot{\phi}^2 - k\rho \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -kz$$

Por transversalidad obtenemos la ecuación del movimiento:

$$p_p = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} = m\dot{p} \quad \frac{dp_p}{dt} = m\ddot{p}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi} \quad \frac{dp_\phi}{dt} = m(2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi})$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad \frac{dp_z}{dt} = m\ddot{z}$$

 ϕ_0 y α son constantes que se determinan a partir de lo:

Derivadas de las restricciones:

$$\frac{\partial C_1}{\partial p} = 1 \quad \frac{\partial C_2}{\partial \phi} = -b \quad \frac{\partial C_1}{\partial z} = 1 \quad \frac{\partial C_1}{\partial \phi} = \frac{\partial C_2}{\partial \phi} = \frac{\partial C_2}{\partial p} = 0$$

Aplicando $\phi_0 \sin(\alpha) = 0$ $\Omega\phi_0 \cos(\Omega t + \alpha) = \frac{1}{b}$

Las ecuaciones quedan:

$$(p) \quad m\ddot{p} - m\rho\dot{\phi}^2 + k\rho = \lambda_1 \quad (\phi) \quad m(2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi}) = -\lambda_2 b$$

$$(z) \quad m\ddot{z} + kz = \lambda_2 \quad (\lambda_1) \quad p - a = 0 \quad (\lambda_2) \quad z - b\phi = 0$$

Derivando (λ_1) y (λ_2) en el tiempo:

$$\dot{p} = 0, \quad \ddot{p} = 0, \quad \dot{z} = b\dot{\phi}, \quad \ddot{z} = b\ddot{\phi}$$

Reemplazando en $(p), (\phi), (z)$:

$$(p) \quad -ma\dot{\phi}^2 + ka = \lambda_1 \quad (\phi) \quad ma^2\ddot{\phi} = -\lambda_2 b$$

$$(z) \quad mb\ddot{\phi} + kb\phi = \lambda_2$$

Reescribimos: (P) $\lambda_1 = a(k - m\dot{\phi}^2)$

$$(F) \quad \lambda_2 b = -ma^2\ddot{\phi} \quad (Z) \quad \lambda_2 b = b^2(m\ddot{\phi} + k\phi)$$

Por transitividad obtenemos la ecuación del movimiento:

$$b^2(m\ddot{\phi} + k\phi) = -ma^2\ddot{\phi} \Leftrightarrow m(a^2 + b^2)\ddot{\phi} + kb^2\phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi} + \Omega^2\phi = 0 \quad \text{donde} \quad \Omega = \sqrt{\frac{kb^2}{m(a^2 + b^2)}} > 0$$

Solución general: $\phi(t) = \phi_0 \sin(\Omega t + \alpha)$

ϕ_0, α son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales: $z(0) = 0 \quad \dot{z}(0) = v_0$

Es decir, $\phi(0) = 0 \quad \dot{\phi}(0) = \frac{v_0}{b}$

Aplicando: $\phi_0 \sin(\alpha) = 0, \quad \Omega \phi_0 \cos(\Omega t + \alpha) = \frac{v_0}{b}$

Así pues, $\alpha = 0, \quad \phi_0 = \frac{v_0}{\Omega b}$

$$\phi(t) = \frac{v_0}{\Omega b} \sin(\Omega t) = \frac{v_0}{b^2} \sqrt{\frac{m(a^2 + b^2)}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m(a^2 + b^2)}} bt\right)$$

Obs: otra alternativa es plantear la ecuación para z
 $m(a^2 + b^2)\ddot{\phi} + k\phi = 0$

$$z(t) = \frac{v_0}{b} \sqrt{\frac{m(a^2 + b^2)}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m(a^2 + b^2)}} bt\right)$$

$$\dot{\phi}(t) = \frac{v_0}{b} \cos(\Omega t) \quad \ddot{\phi}(t) = -\frac{v_0}{b} \Omega \sin(\Omega t)$$

Los multiplicadores de Lagrange valen:

$$\lambda_1(t) = a(k - m\dot{\phi}^2) = a\left(k - \frac{mv_0^2}{b^2} \cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m(a^2+b^2)}} bt\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(t) &= -\frac{ma^2}{b} \ddot{\phi} = \frac{ma^2 v_0}{b} \sqrt{\frac{k}{m(a^2+b^2)}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m(a^2+b^2)}} bt\right) \\ &= \frac{ma^2 v_0}{b^2} \Omega \sin \end{aligned}$$

En general, el gradiente en coordenadas cilíndricas se escribe:

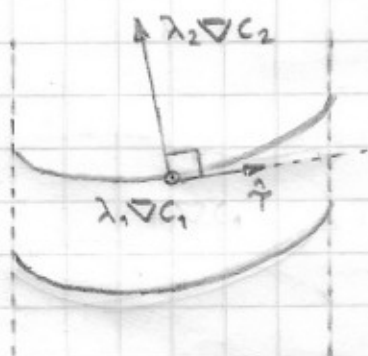
$$\nabla C = \frac{dC}{d\vec{r}} = \frac{\partial C}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial C}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial C}{\partial z} \hat{z}$$

Luego, $\nabla C_1 = \frac{\partial C_1}{\partial \rho} \hat{\rho} = \hat{\rho}$

$$\nabla C_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial C_2}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial C_2}{\partial z} \hat{z} = -\frac{b}{a} \hat{\phi} + \hat{z}$$

Y la fuerza normal de constricción es entonces:

$$\vec{N} = \lambda_1 \nabla C_1 + \lambda_2 \nabla C_2 = \lambda_1 \hat{\rho} + \lambda_2 \left(-\frac{b}{a} \hat{\phi} + \hat{z}\right)$$



Efectivamente el vector \vec{N} es perpendicular al alambre. Esto se observa al parametrizar:

$$\vec{r}(\phi) = a \hat{\rho} + b \phi \hat{z}$$

$$\vec{r}'(\phi) = a \hat{\phi} + b \hat{z}$$

La derivada de la parametrización es tangente a la curva.

Luego, $\nabla C_1 \perp \vec{F}'$, $\nabla C_2 \perp \vec{F}'$

(Control N°9, Barro, 2003-2)

Por último, es razonable afirmar que el componente ∇C_1 perpendicular al cilindro (de magnitud λ_1) produce la restricción $\rho = a$; mientras que el componente ∇C_2 , tangente al cilindro (de magnitud proporcional a λ_2) produce la restricción $z = b\phi$.

Observación: el cilindro es el