

Control 2
Sistemas Dinámicos FI21B

Profesores: Felipe Barra, Nicolás Mujica
21 de Octubre 2004

Duración: 3 horas

P1 Considere un objeto, como un libro, de momentos principales de inercia I_1 , I_2 e I_3 , calculados respecto al centro de masa; éstos son todos distintos, de modo que $I_1 < I_2 < I_3$. Despreciando la gravedad, estudie la estabilidad del objeto frente a rotaciones entorno a los ejes principales.

P2 Un trompo simétrico en presencia de gravedad con punta fija se coloca en movimiento con su eje inclinado en 90° respecto a la vertical. Sus momentos de inercia respecto al punto fijo son $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}mh^2$ e $I_3 = \frac{5}{4}mh^2$, donde h es la distancia de la púa fija al centro de masas y m la masa del trompo. Las condiciones iniciales son $\dot{\psi}(t=0) = \sqrt{g/h}$, y de precesión y nutación nulas, esto es $\dot{\phi}(t=0) = \dot{\theta}(t=0) = 0$ respectivamente.

(a) Determine los valores extremos de la inclinación del eje del trompo, esto es los valores extremos del ángulo de nutación θ .

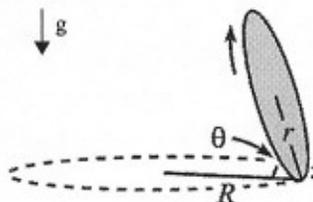
(b) Determine el valor de la velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$ en el punto más bajo de nutación.

P3 Una moneda de radio r ha sido puesta en movimiento de manera tal que rueda sin resbalar en torno a un círculo de radio R y con un ángulo constante θ respecto a la horizontal, tal como se muestra en la figura.

(a)Cuál es la frecuencia del movimiento circular del punto de contacto ?

(b) Demuestre que el movimiento es posible sólo si $R > \frac{5}{6}r \cos \theta$.

Indicación: Usando la condición de rodar sin resbalar escriba la velocidad angular en los ejes principales y el Lagrangiano del sistema considerando θ como grado de libertad. Luego imponga la restricción θ constante. Recuerde que con respecto al centro del disco $I_1 = I_2 = mr^2/4$ e $I_3 = mr^2/2$.



Control 2
Sistemas Dinámicos FI21B-1

Profesor Nicolás Mujica

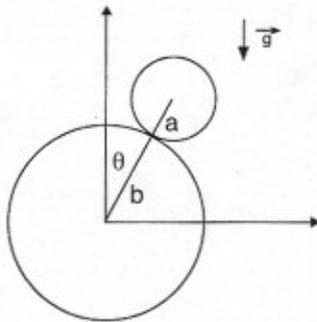
Profs. auxiliares: Gustavo During y Carlos Suazo

30 de abril 2005

Duración: 3 horas

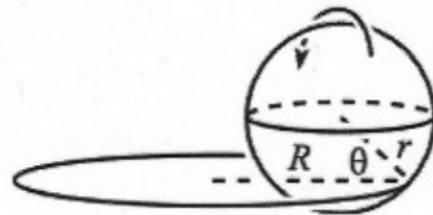
P1. Fuerzas de restricción. Un sólido de radio a rueda sin resbalar sobre otro sólido similar pero de radio b , el cual se encuentra fijo. Considere por ahora que el momento de inercia del sólido respecto a su eje de simetría es I_o .

- (a) Si el sólido parte desde el reposo con $\theta = 0$ gracias a una pequeña perturbación, encuentre la fuerza de restricción que actúa sobre él en función del ángulo θ y calcule el ángulo crítico para el cual el sólido en rotación despegue de la superficie del otro. (4 pts)
- (b) Considere ahora que el sólido puede ser una esfera ($I_o = 2/5Ma^2$), un casquete esférico ($I_o = 2/3Ma^2$) o un cilindro ($I_o = 1/2Ma^2$) y ordene los ángulos críticos correspondientes de menor a mayor. Porqué estos ángulos son diferentes entre si? (2 pts)



P2. Balón de Basketball sobre un aro. En la figura se muestra un balón de Basketball de radio r que gira sin resbalar sobre un aro de radio R manteniendo un ángulo constante con la horizontal θ . Para ello debe girar a una velocidad angular

Ω constante en torno al eje vertical fijo (eje de simetría del aro), que depende de θ . Encuentre Ω tal que el movimiento descrito sea de equilibrio.



P3. Movimiento de un trompo simétrico libre. Considere un trompo simétrico "libre", es decir sin fuerzas externas. Los momentos principales de inercia son $I_1 = I_2 = I_o$ e $I_3 > I_o$. El movimiento es tal que el "spin" inicial en la dirección principal \hat{e}_3 es ψ_o y la energía total E_o .

- (a) Muestre que la velocidad angular ω_3 es constante, y que ω_1 y ω_2 se rigen ambas por la ecuación de un oscilador armónico. (1.5 pts)
- (b) En particular muestre que ω_1 y ω_2 están desfasadas en 90° . Que significa esto desde el sistema de ejes principales de inercia? (1.5 pts)
- (c) Usando las cantidades conservadas, cuál es el ángulo entre $\vec{\omega}$ y \hat{e}_3 ? Cuál es el ángulo entre $\vec{\omega}$ y \vec{L} ? (2 pt)
- (d) Desde el sistema fijo en el laboratorio dibuje esquemáticamente la orientación de los vectores $\vec{\omega}$, \vec{L} y el de los ejes principales de inercia como también el movimiento que éstos presentan. (1 pt)