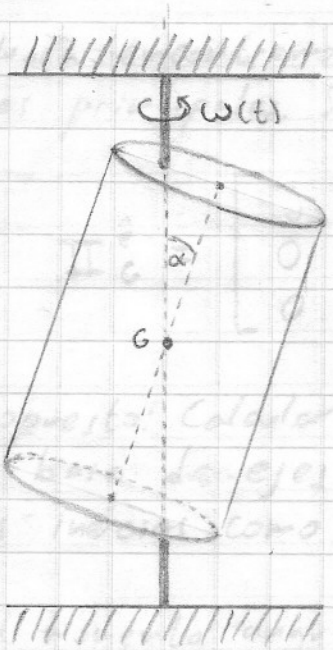
P2/

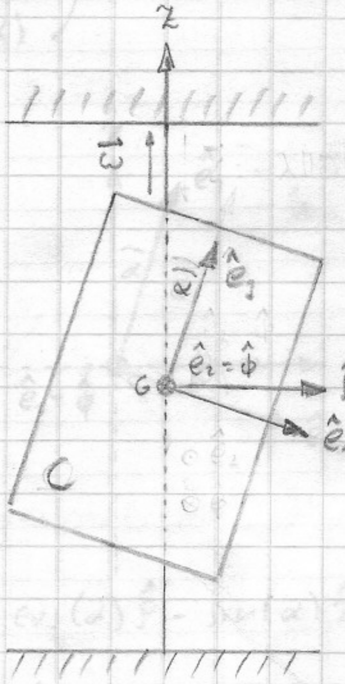


Un cilindro homogéneo recto de masa m, largo L y radio R puede rotar en torno del eje vertical como se muestra en la figura. El cilindro permanece inclinado en un ángulo α respecto al eje vertical.

Inicialmente se da al cilindro una velocidad angular ω_0. Debido a efectos de roce aparece en torno al eje central un torque que se opone a la rotación, de módulo $\lambda\omega^2$. Encontrar la velocidad angular en el tiempo $\omega(t)$

Sol:/

Escogemos un sistema de referencia inercial con origen en el centro de masa G del cilindro (notar que este punto permanece inmóvil) y cuyo eje z es vertical y apunta hacia arriba. Con esto, el torque y la velocidad angular están dados por:



$\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ $\qquad$ $\omega(0) = \omega$

$\tau_z = -\lambda\omega^2$

Consideremos la base de ejes principales $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ del cilindro, y los vectores unitarios de coordenadas cilíndricas $\hat{\rho}, \hat{\phi}$. Todos ellos son solidarios al cilindro.

$\hat{z} = \cos(\alpha)\hat{e}_3 - \sin(\alpha)\hat{e}_1$ $\quad \overline{\omega} = \omega(\cos(\alpha)\hat{e}_3 - \sin(\alpha)\hat{e}_1)$

Ahora encontremos la matriz de inercia según la base de ejes principales. Sabemos que esta matriz tiene la forma:

$$\mathbb{I}_G^{\hat{e}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

Propuesto: Calcular la matriz de inercia del cilindro según la base de ejes principales. Por ahora consideraremos las inercias como datos. Por simetría, $J_1 = J_2$

El momento angular entonces está dado por:

$$\vec{l} = \mathbb{I}_G^{\hat{e}} \cdot \overline{\omega} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\omega\sin(\alpha) \\ 0 \\ \omega\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \omega(J_3\cos(\alpha)\hat{e}_3 - J_1\sin(\alpha)\hat{e}_1)$$

$$= \omega J_3\cos(\alpha)(\sin(\alpha)\hat{\rho} + \cos(\alpha)\hat{z})$$

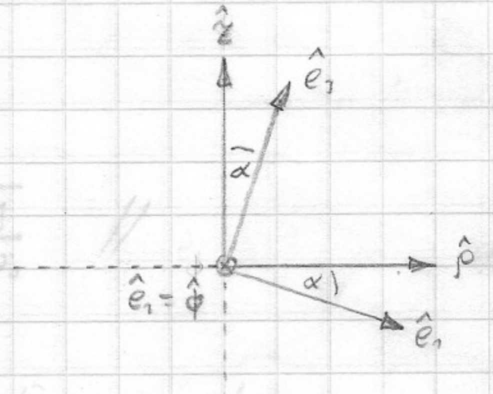
$$-\omega J_1\sin(\alpha)(\cos(\alpha)\hat{\rho} - \sin(\alpha)\hat{z})$$

$$= \omega\sin(\alpha)\cos(\alpha)(J_3 - J_1)\hat{\rho}$$

$$+ \omega(J_3\cos^2(\alpha) + J_1\sin^2(\alpha))\hat{z}$$

Sean $\quad J = J_3\cos^2(\alpha) + J_1\sin^2(\alpha)$

$\quad J' = \sin(\alpha)\cos(\alpha)(J_3 - J_1)$



$\hat{e}_1 = \cos(\alpha)\hat{\rho} - \sin(\alpha)\hat{z}$

$\hat{e}_2 = \hat{\phi}$

$\hat{e}_3 = \sin(\alpha)\hat{\rho} + \cos(\alpha)\hat{z}$

$\vec{\ell} = \omega(J'\hat{\rho} + J\hat{z})$

Por el Teorema del Torque - Momento Angular: $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{\ell}}{dt}$

En particular, $\tau_z = \dfrac{d\ell_z}{dt}$

Es decir: $-\lambda\omega^2 = J\dot{\omega} \iff -\dfrac{J\dot{\omega}}{\lambda\omega^2} = 1$

$$\iff \int -\frac{J\dot{\omega}}{\lambda\omega^2}\, dt = \int 1\, dt \iff -\int \frac{J}{\lambda\omega^2}\, d\omega = t + t_0$$

$$\iff \frac{J}{\lambda\omega} = t + t_0 \iff \omega(t) = \frac{J}{\lambda(t+t_0)}$$

La constante t_0 se determina a partir de la condición inicial $\omega(0) = \omega_0$:

$$\frac{J}{\lambda t_0} = \omega_0 \iff t_0 = \frac{J}{\lambda\omega_0}$$

$$\omega(t) = \frac{J}{\lambda\left(t + \frac{J}{\lambda\omega_0}\right)} = \frac{J}{\lambda t + \frac{J}{\omega_0}} \quad //$$

Determinemos la energía cinética. En general:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \cdot \mathbb{I} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\ell} \cdot \vec{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2}\cdot\omega(J_3\cos^2(\alpha) + J_1\sin^2(\alpha))\cdot\omega = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Expresando en función del único grado de libertad, $T = J\dot{\theta}^2$

No hay energía potencial (ni en presencia de gravedad, pues el centro de masa está fijo). Así que el Lagrangeano es:

$$L = T + \cancel{V} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

Ansatz: La fuerza generalizada es el torque τ_z

Ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \Leftrightarrow \frac{d(J\dot{\theta})}{dt} - 0 = \tau_z$$

$$\Leftrightarrow J\ddot{\theta} = \tau_z \Leftrightarrow J\dot{\omega} = -\lambda \omega^2$$

Se obtiene la misma ecuación. //