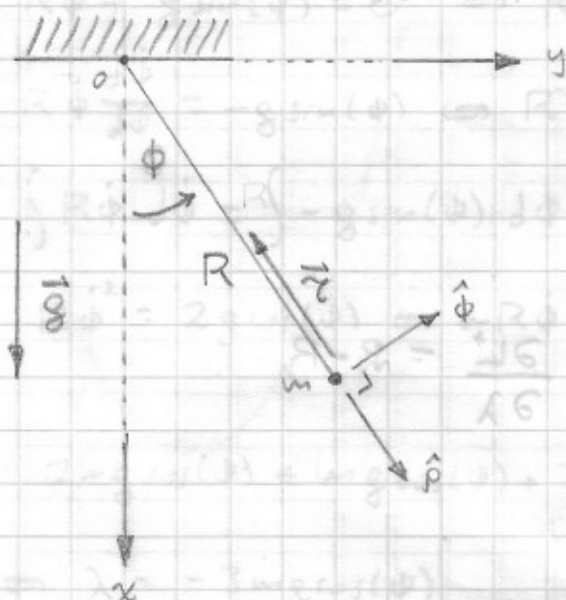


P2/ (Péndulo Simple)



Sea un péndulo simple de masa m y longitud R en presencia de gravedad como muestra la figura. La tensión \vec{T} que ejerce la cuerda sobre la partícula da lugar a la restricción $\|\vec{r}\| = R$. Se pretende hallar las ecuaciones del movimiento y la tensión mediante la teoría de fuerzas de constricción.

Condiciones iniciales: $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$ $\dot{\phi}(0) = 0$

Sol: / Empleamos coordenadas polares planas (ρ, ϕ) :

Restricción (\vec{r}) : $\rho = R$

Es decir, $f(\vec{r}) = \|\vec{r}\| - R = 0$

Omitiendo la restricción tenemos dos grados de libertad:

$$\vec{q} = (\rho, \phi)$$

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} \quad \vec{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$T = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2)$$

$$U = -mg\rho \cos(\phi)$$

Empleamos el Lagrangeano $L^*(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = T - U + \lambda f$

λ es el multiplicador de Lagrange, que se emplea para hallar la tensión \vec{T}

$$L^* = \frac{1}{2}m(\dot{P}^2 + P^2\dot{\phi}^2) + mgP\cos(\phi) + \lambda(P - R) =$$

Derivadas del Lagrangeano:

$$\frac{\partial L^*}{\partial P} = m\dot{\phi}^2 + mg\cos(\phi) + \lambda$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \phi} = -mgP\sin(\phi)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \lambda} = P - R$$

Ecu. Momentum Generalizado:

$$p_P = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{P}} = m\dot{P} \quad \frac{dp_P}{dt} = m\ddot{P}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\phi}} = mP^2\dot{\phi} \quad \frac{dp_\phi}{dt} = 2mP\dot{P}\dot{\phi} + mP^2\ddot{\phi}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{P}}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial P} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial L^*}{\partial \lambda} = 0$$

$$(P): m\ddot{P} - mP\dot{\phi}^2 - mg\cos(\phi) - \lambda = 0$$

$$(\phi): 2mP\dot{P}\dot{\phi} + mP^2\ddot{\phi} + mgP\sin(\phi) = 0$$

$$(\lambda): P = R \Rightarrow \dot{P} = 0 \Rightarrow \ddot{P} = 0$$

Reescribimos:

$$(P): mR\dot{\phi}^2 + mg\cos(\phi) + \lambda = 0$$

$$(\phi): mR^2\ddot{\phi} + mgR\sin(\phi) = 0$$

2

$$\ddot{\phi} = \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$$

Recordar que $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ $\dot{\phi} = 0$

$$(\phi): R\ddot{\phi} + g \sin(\phi) = 0 \Rightarrow R\ddot{\phi} = -g \sin(\phi)$$

$$\Rightarrow R\dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -g \sin(\phi) \Leftrightarrow R\dot{\phi} d\dot{\phi} = -g \sin(\phi) d\phi$$

$$\Rightarrow \int R\dot{\phi} d\dot{\phi} = \int -g \sin(\phi) d\phi \Leftrightarrow \frac{1}{2} R\dot{\phi}^2 = g \cos(\phi)$$

$$\Rightarrow R\dot{\phi}^2 = 2g \cos(\phi) \Leftrightarrow m R\dot{\phi}^2 = 2mg \cos(\phi)$$

$$(\rho): 2mg \cos(\phi) + mg \cos(\phi) + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -3mg \cos(\phi)$$

$$\text{En general, } \vec{F}_i(\omega) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \vec{r}_i}$$

$$\text{En este caso, } \vec{\gamma} = \lambda \frac{df}{d\vec{r}} = \lambda \nabla f$$

$$f(\vec{r}) = \sqrt{x^2 + y^2} - R$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\nabla f = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \hat{\rho}$$

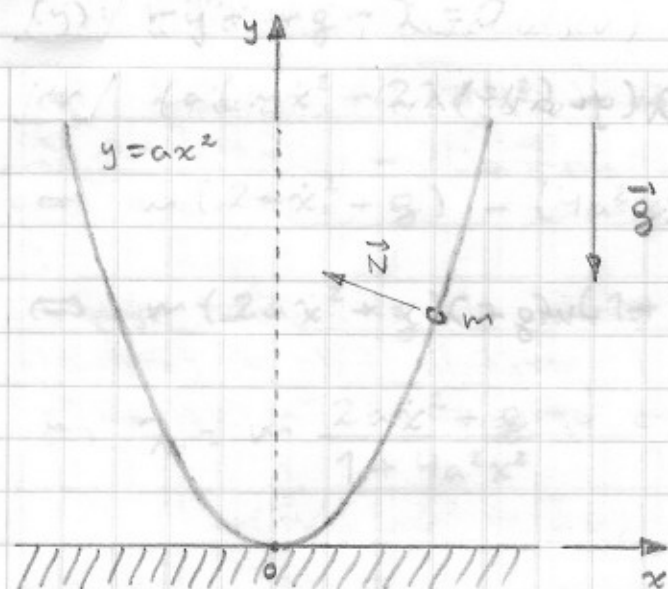
$$\text{Finalmente, } \vec{\gamma} = \lambda \hat{\rho} = -3mg \cos(\phi) \hat{\rho} //$$

$$\text{Notar que } \lambda \leq 0 \Leftrightarrow \cos(\phi) \geq 0 \Leftrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

λ es el multiplicador de Lagrange, usado para hallar la normal

P3/ (Péndulo Parabólico)

7



Se tiene un alambre con forma de parábola descrito por la ecuación $y = ax^2$, en presencia de gravedad. Un pequeño anillo de masa m se desliza sin roce a lo largo del alambre.

Encontrar las ecuaciones del movimiento del anillo y la fuerza normal que ejerce el alambre sobre el anillo, en función de x y \dot{x} .

Sol: Utilizamos coordenadas cartesianas (x, y)

Restricción (\tilde{N}): $y = ax^2$

$$f(\vec{r}) = y - ax^2 = 0$$

Omitiendo la restricción tenemos dos grados de libertad

$$\vec{q} = (x, y) = \vec{r}$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} \quad \vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$$

$$T = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$U = mgy$$

Empleamos el Lagrangiano $L^*(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = T - U + \lambda f$

λ es el multiplicador de Lagrange, usado para hallar la normal \vec{N}

$$(y): m\ddot{y} + mg - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a(m\dot{x}^2 - 2\lambda ax^2) + mg - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow m(2a\dot{x}^2 + g) - (4a^2x^2 + 1)\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow m(2a\dot{x}^2 + g) = \lambda(1 + 4a^2x^2)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = m \frac{2a\dot{x}^2 + g}{1 + 4a^2x^2}$$

$$\text{En general } \vec{F}_i = \sum_{k=1}^K \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \vec{F}_i}$$

$$\text{En este caso, } \vec{N} = \lambda \frac{df}{d\vec{F}} = \lambda \nabla f$$

$$f(\vec{F}) = y - ax^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2ax$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

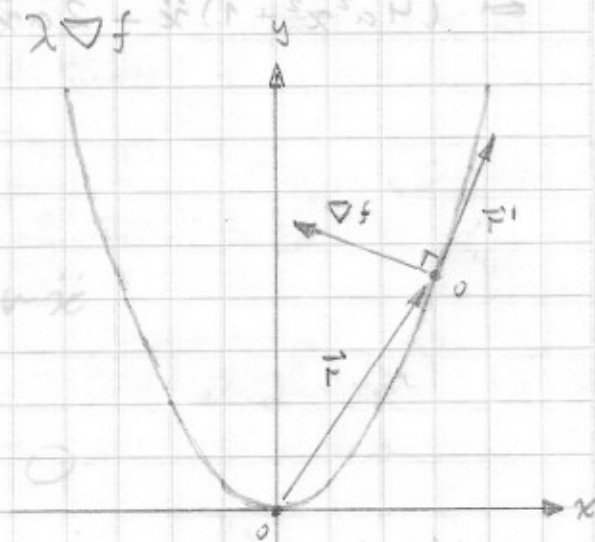
$$\nabla f = -2ax\hat{x} + \hat{y}$$

$$\text{Si } y = ax^2, \quad \vec{F}' = x\hat{x} + ax^2\hat{y}$$

Sabemos que $\frac{d\vec{F}}{dx} = \hat{x} + 2ax\hat{y}$ es vector tangente a la parábola.

$$\text{Además, } \nabla f \perp \vec{F}', \quad \text{y } \|\nabla f\| = \|\vec{F}'\| = \sqrt{1 + 4a^2x^2}$$

Vemos que ∇f es vector normal a la parábola y siempre apunta hacia su convexidad.



$$0 = f - 2w + jw : (c)$$

Finalmente,

$$\vec{N} = \lambda \nabla f = m \frac{2ax^2 + g}{4a^2x^2 + 1} (-2ax\hat{x} + \hat{y}) = m \frac{2ax^2 + g}{\sqrt{4a^2x^2 + 1}} \hat{n} //$$

Notar que $\lambda \geq 0$ siempre. Así que la fuerza normal siempre apunta a la convexidad de la parábola. Esto es razonable pues esta fuerza aparece como oposición al peso del anillo

Ecuación del Movimiento:

$$m\ddot{x} + 2\lambda ax = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} + 2m \frac{2ax^2 + g}{4a^2x^2 + 1} ax = 0$$

$$\Leftrightarrow (4a^2x^2 + 1)\ddot{x} + 2ax(2ax^2 + g) = 0 //$$