a) Como $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q})$ calculamos la velocidad mediante la Regla de la Cadena:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{d\vec{q}} \cdot \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{d\vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}}$$

Notar que $\vec{v}_i = \vec{v}_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$

En general, $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a}^T \cdot \vec{a}$, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$$\|\vec{v}_i\|^2 = \vec{v}_i^T \cdot \vec{v} = \dot{\vec{q}}^T \cdot \frac{d\vec{r}_i}{d\vec{q}}^T \cdot \frac{d\vec{r}_i}{d\vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}}$$

Con esto, $$T_i = \frac{m_i \|\vec{v}_i\|^2}{2} = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^T \cdot \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}^T \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq} \right) \cdot \dot{\vec{q}}$$

Sea $$M_i(\vec{q}) = m_i \frac{d\vec{r}_i}{d\vec{q}}^T \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq}$$

Con esto, $$T_i = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \cdot M_i(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}}$$

En general para una forma cuadrática $\vec{a}^T \cdot A \cdot \vec{a}$ se puede sustituir A por su parte simétrica y la forma no cambia: $\vec{a}^T \cdot A \cdot \vec{a}^T = \vec{a}^T \cdot \tilde{A} \cdot \vec{a}^T$

donde $$\tilde{A} = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

En este caso, no hace falta hacer lo anterior: $M_i(\vec{q})$ es una matriz simétrica, pues tiene la forma $A^T \cdot A$

Por último, $T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{q}}^T \cdot M_i(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}}$

Una suma de formas cuadráticas es una forma cuadrática. Su matriz representante es la suma de matrices.

Finalmente, la Matriz Representante Simétrica del sistema está dada por:

$$M(\vec{q}) = \sum_{i=1}^{N} M_i(\vec{q}) \quad //$$

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^T \cdot M(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}}$$

Propuesto: Si $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q}, t)$

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$\|\vec{v}_i\|^2 = \left(\dot{\vec{q}}^T \cdot \frac{\partial \vec{r}^T}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial \vec{r}_i^T}{\partial t}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)$$

$$= \dot{\vec{q}}^T \cdot \frac{\partial \vec{r}^T}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}}^T + 2\,\frac{\partial \vec{r}_i^T}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}} + \frac{\partial \vec{r}_i^T}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$= \dot{\vec{q}}^T \cdot A(\vec{q}, t) \cdot \dot{\vec{q}} + \vec{a}(\vec{q}, t) \cdot \dot{\vec{q}} + \left\|\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}(\vec{q}, t)\right\|^2$$

b) En general la fuerza generalizada está dada por:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{F}_i$$

Expresando vectorialmente se puede verificar que:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{r}_i^{\,T}}{d\vec{q}} \cdot \vec{F}_i$$

En el caso del componente conservativo:

$$\vec{Q}^{(c)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{r}_i^{\,T}}{d\vec{q}} \cdot \vec{F}_i^{(c)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{r}_i^{\,T}}{d\vec{q}} \cdot \frac{\partial U^T}{\partial \vec{r}_i}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{d\vec{q}} \right)^T = \left(\frac{dU}{d\vec{R}} \cdot \frac{d\vec{R}}{d\vec{q}} \right)^T$$

Donde $\vec{R} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ es el vector que contiene los componentes de las posiciones de todas las partículas

Por la Regla de la Cadena, $\frac{dU}{d\vec{q}} = \frac{dU}{d\vec{R}} \cdot \frac{d\vec{R}}{d\vec{q}}$

Finalmente, $\boxed{\vec{Q}^{(c)} = \frac{dU^T}{d\vec{q}}}$ //

Recordar: $U = U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ sólo depende de las posiciones de las N partículas.

b) A continuación, resolveremos nuevamente la parte (b) del problema, pero utilizando un lenguaje diferente.

Citemos primero la Regla de la Cadena:

Sean $\vec{\varphi}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\vec{f}: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funciones. Luego, sea la composición $\vec{f} \circ \vec{\varphi}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Si $\vec{f}$ y $\vec{\varphi}$ son derivables, entonces $\vec{f} \circ \vec{\varphi}$ también es derivable y su matriz jacobiana es igual a:

$$\underset{(m \times n)}{D(\vec{f} \circ \vec{\varphi})(\vec{x})} = \underset{(m \times p)}{D\vec{f}(\vec{\varphi}(\vec{x}))} \cdot \underset{(p \times n)}{D\vec{\varphi}(\vec{x})}$$

O de otro modo

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \quad (*)$$

Ahora resolveremos el problema.
En general la Fuerza Generalizada está dada por:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{F}_i$$

En el caso del componente conservativo:

$$Q_j^{(c)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(c)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \nabla_i U \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

Esta sumatoria tiene la misma forma que la sumatoria (*). Por la Regla de la Cadena, se concluye que:

$$Q_j^{(c)} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Si definimos $\vec{Q}^{(c)} = (Q_1^{(c)}, \ldots, Q_n^{(c)})$

Tenemos que $\vec{Q}^{(c)} = -\nabla_q U = -\frac{dU}{d\vec{q}}$