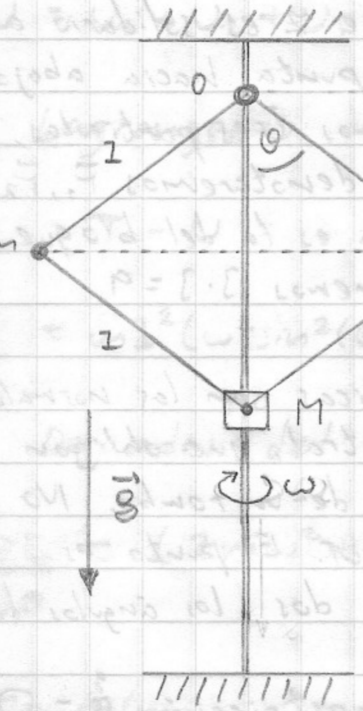
Sol/

P2/ (Regulador Centrífugo)



Considérense cuatro barras articuladas de masa despreciable y longitud I como se muestra en la figura. El sistema esta fijo al punto O. La masa M puede deslizar sin roce a lo largo del eje. Las esferas en las articulaciones a los costados tienen masa m. El sistema esta girando en torno al eje con velocidad angular ω constante y las articulaciones que unen las barras les permiten girar en torno al eje perpendicular al plano que contiene a las cuatro barras.

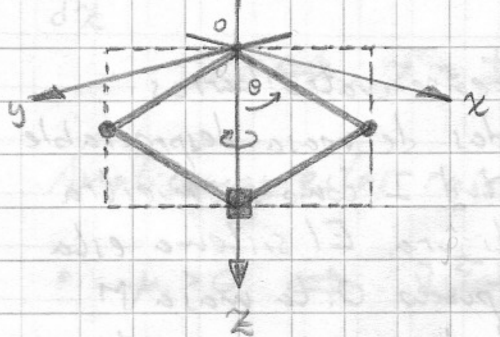
a) Encuentre el Lagrangeano y las cantidades conservadas

b) Encuentre las ecuaciones del movimiento que describen el sistema

c) Encontrar el ángulo(s) $\theta > 0$ tal que el sistema permanece el equilibrio. Encontrar los valores de ω que hacen esto posible.

Sol:/

a)



Utilizamos a priori como sistema de referencia uno con origen en el punto O, cuyo eje z es solidario al eje central y apunta hacia abajo ($\vec{g} = g\hat{z}$). Tenemos tres partículas, cuyas posiciones denotaremos $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$ (esta última es la del bloque de masa M). Tenemos $3 \cdot 3 = 9$ coordenadas.

Las fuerzas de restricción holonómicas son las normales ejercidas por las articulaciones y el eje central, que obligan al conjunto $\{O, m, m, M\}$ a ser los vértices de un rombo. No estudiaremos esto muy detalladamente aquí. El punto es que las coordenadas libres se reducen a dos: los ángulos de coordenadas esféricas θ y ϕ.

Pero aún hace falta considerar la restricción $\dot{\phi} = \Omega$, reduciéndose los grados de libertad a sólo uno: θ.

$\vec{r}_1 = l\hat{r}$ $\qquad$ $\vec{v}_1 = l(\omega \sin(\theta)\hat{\phi} + \dot{\theta}\hat{\theta})$

$\vec{r}_3 = 2l\cos(\theta)\hat{z}$ $\qquad$ $\vec{v}_3 = -2l\dot{\theta}\sin(\theta)\hat{z}$

$$T_1 = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_1\|^2 = \frac{1}{2}ml^2(\omega^2\sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2)$$

Se puede ver que $T_2 = T_1$

$$T_3 = \frac{1}{2}M\|\vec{v}_3\|^2 = 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2(\theta)$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = ml^2(\omega^2\sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2(\theta)$$

$$U_1 = U_2 = -mg \cdot l\cos(\theta) \qquad U_3 = -Mg \cdot 2l\cos(\theta)$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = -2(m+M)gl\cos(\theta)$$

Lagrangeano:

$$L = T - U$$

$$= ml^2(\omega^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + 2Ml^2\dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) + 2(m+M)gl\cos(\theta)$$

Derivadas del Lagrangeano:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = (2m\omega^2 + 4M\dot{\theta}^2)l^2 \sin(\theta)\cos(\theta) - 2(m+M)gl\sin(\theta)$$

Momentum Generalizado: $p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2ml^2\dot{\theta} + 4Ml^2\dot{\theta}\sin^2(\theta)$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = 2ml^2\ddot{\theta} + 4Ml^2\ddot{\theta}\sin^2(\theta) + 8Ml^2\dot{\theta}^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Ecuación de Euler-Lagrange: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2ml^2\ddot{\theta} + 4Ml^2\ddot{\theta}\sin^2(\theta) + 8Ml^2\dot{\theta}^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$- (2m\omega^2 + 4M\dot{\theta}^2)l^2\sin(\theta)\cos(\theta) + 2(m+M)gl\sin(\theta) = 0$$

$$(2m+4M\sin^2(\theta))l\ddot{\theta}+(4M\dot{\theta}^2-2m\omega^2)l\sin(\theta)\cos(\theta)+2(m+M)g\sin(\theta)=0$$

Estudiemos ahora las posibles cantidades conservadas.

Como $\frac{\partial L}{\partial \theta}$, p_θ no es conservado.

Hamiltoniano:

$$H = p_\theta\dot{\theta} - L$$

$$= ml^2(-\omega^2\sin^2(\theta)+\dot{\theta}^2)+2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2(\theta)-2(m+M)gl\cos(\theta)$$

Como $\frac{\partial L}{\partial t}=0$, H es conservado

Energía Mecánica:

$$E = T + U$$

$$= ml^2(\omega^2\sin^2(\theta)+\dot{\theta}^2)+2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2(\theta)-2(m+M)gl\cos(\theta)$$

Vemos que $E \neq H$. Esto se debe a que ϕ no es un grado de libertad, por la restricción $\dot{\phi}=\omega$.

b) Para estudiar los equilibrios relativos del sistema debemos encontrar y minimizar (o maximizar) un potencial generalizado $U^*(\theta)$. Este potencial satisface:

$$H = \frac{1}{2}\mathcal{M}(\theta)\dot{\theta}^2 + U^*(\theta)$$

Así que $U^*(\theta) = -m l^2 \omega^2 \sin^2(\theta) - 2(m+M) g l \cos(\theta)$

$$\frac{dU^*}{d\theta} = -2ml^2\omega^2 \sin(\theta)\cos(\theta) + 2(m+M) g l \sin(\theta)$$

$$= -ml^2\omega^2 \sin(2\theta) + 2(m+M) g l \sin(\theta)$$

$$\frac{d^2U^*}{d\theta^2} = -2ml^2\omega^2\cos(2\theta) + 2(m+M) g l \cos(\theta)$$

$$\frac{dU^*}{d\theta} = 0 \iff -ml\omega^2\cos(\theta) + (m+M)g = 0$$

$$\iff ml\omega^2\cos(\theta) = (m+M)g$$

$$\iff \cos(\theta) = \frac{(m+M)g}{ml\omega^2}$$

Pero esto sólo es posible si $-1 \leq \frac{(m+M)g}{ml\omega^2} \leq 1$

Ya tenemos que es mayor o igual a cero, pues $m>0$, $M>0$, $g>0$, $l>0$, $\omega^2 \geq 0$

$$\frac{(m+M)g}{ml\omega^2} \leq 1 \iff \omega^2 \geq \frac{(m+M)g}{ml} \iff |\omega| \geq \sqrt{\frac{(m+M)g}{ml}}$$