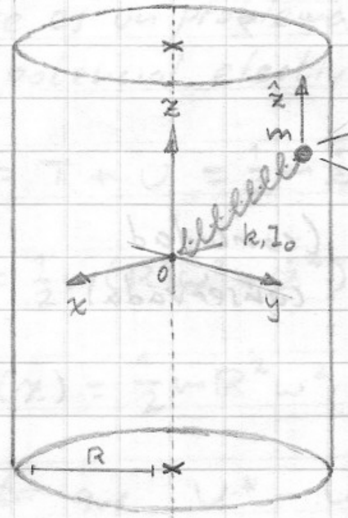
FI21B Sistemas Dinámicos Semestre Primavera 2005
Profesor: Nicolás Mujica Sección: 1

Clase auxiliar 09/08

P1/ (P2 Control N°1 Primavera 2004)

(El enunciado está en el control)



Describiremos la partícula mediante coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z). Tenemos a priori 3 dimensiones × 1 partícula = 3 coordenadas. Pero está además la restricción que impone la fuerza normal que ejerce el cilindro: $\rho = R$

Son $n = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ grados de libertad: $\vec{q} = (\phi, z)$.

Posición: $\vec{r} = R\hat{\rho} + z\hat{z}$

Velocidad: $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$

Energía Cinética: $T = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$

Energía Potencial: $U = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(\sqrt{R^2+z^2} - l_0)^2$

Lagrangeano:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(\sqrt{R^2-z^2} - l_0^2)$$

Derivadas del Lagrangeano:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -k\left(\sqrt{R^2+z^2} - l_0\right)\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

Momentum Generalizado:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot 2\dot{\phi} = mR^2\dot{\phi}$$ (cantidad conservada)

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\frac{dp_\phi}{dt} = mR^2\ddot{\phi} \qquad \frac{dp_z}{dt} = m\ddot{z}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \iff mR^2\ddot{\phi} = 0 \iff mR^2\dot{\phi} = l_z \text{ (cte)}$$

$$\iff \dot{\phi} = \omega \text{ (cte)}$$

p_ϕ es la componente vertical del momento angular.

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v} = m(R\hat{\rho} + z\hat{z}) \times (R\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z})$$

$$= mR^2\dot{\phi}\hat{z} - mR\dot{z}\hat{\phi} - mRz\dot{\phi}\hat{\rho}$$

La otra ecuacion: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{z} + \frac{kz\left(\sqrt{R^2+z^2} - l_0\right)}{\sqrt{R^2+z^2}} = 0$$

Éste es un problema de equilibrio relativo. Debemos buscar un potencial efectivo $U^*(z)$

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + U^*$$

$$E = \frac{1}{2}m(R^2\omega^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{R^2+z^2} - l_0\right)$$

$$U^*(z) = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{R^2+z^2} - l_0\right)$$

Notar que $U^* - U = cte$

$$\frac{dU^*}{dz} = \frac{dU}{dz} = \frac{\partial L}{\partial z} = -m\ddot{z} = \frac{kz\left(\sqrt{R^2+z^2} - l_0\right)}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

z_0 será punto de equilibrio si $\frac{dU^*}{dz}(z_0) = 0$.

Si $\frac{d^2U^*}{dz^2}(z_0) > 0$, z_0 es estable

Si $\frac{d^2U^*}{dz^2}(z_0) < 0$, z_0 es inestable.

$$\frac{d^2U^*}{dz^2} = \frac{k\left(\sqrt{R^2+z^2} - l_0\right)}{\sqrt{R^2+z^2}} + kz^2\left(\frac{1}{R^2+z^2} - \frac{\sqrt{R^2+z^2} - l_0}{\sqrt{R^2+z^2}^3}\right)$$

Obs:

$m>0,\ R>0,\ I_0>0,\ k>0$

$$\frac{dU^*}{dz}=0 \iff \sqrt{R^2+z^2}=I_0 \ \vee\ z=0$$

$$\iff z=\pm\sqrt{I_0^2-R^2} \ \vee\ z=0$$

Analicemos estas raíces según el valor de $\mu=I_0-R$

- $\mu>0 \iff I_0^2-R^2>0$

Tenemos tres soluciones reales

$$\frac{d^2U^*}{dz^2}(0)=\frac{k(R-I_0)}{R}<0$$

$$\frac{d^2U^*}{dz^2}\left(\pm\sqrt{I_0^2-R^2}\right)=\frac{k(I_0^2-R^2)}{I_0^2}>0$$

En este caso, notar que $\sqrt{R^2+z^2}=I_0$
Con eso en mente se calcula con más facilidad

Si $\mu>0$ hay tres puntos de equilibrio: $z=0$ es inestable; $z=-\sqrt{I_0^2-R^2}$, $z=\sqrt{I_0^2-R^2}$ son estables

- $\mu<0 \iff I_0^2-R^2<0 \Rightarrow \pm\sqrt{I_0^2-R^2}\notin\mathbb{R}$

Tenemos una solución real.

$$\frac{d^2U^*(0)}{dz^2}=\frac{k(R-I_0)}{R}>0$$

Si $\mu<0$ hay un único punto de equilibrio, que es estable: $z=0$.