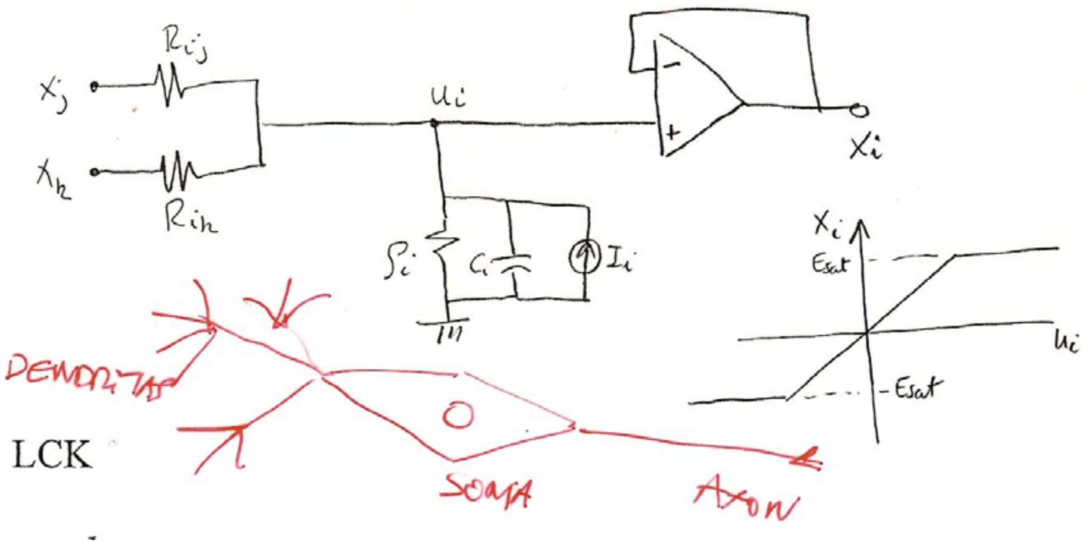
Modelo continuo



LCK

$$C_i \frac{du_i}{dt} + \frac{u_i}{\rho_i} - I_i = \sum_j (x_j - u_i) / R_{ij}$$

$$x_i = g_i(u_i)$$

La ecuación de movimiento se puede reescribir como

$$\tau_i \frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_j R_i w_{ij} x_j + R_i I_i$$

$$x_i = g_i(u_i)$$

donde

$$\tau_i = R_i C_i$$

$$w_{ij} = \frac{1}{R_{ij}}$$

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\rho_i} + \sum_j \frac{1}{R_{ij}}$$

En equilibrio $du_i/dt = 0$,

$$\frac{u_i}{R_i} = \sum_j w_{ij} g(u_j) + I_i$$

$$g(u) = \operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si u} > 0 \\ 0 & \text{si u} = 0 \\ -1 & \text{si u} < 0 \end{cases}$$

Considere la función de energía

$$E = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j \neq i} w_{ij} x_i x_j + \sum_i \left(\frac{1}{R_i}\right)\int_0^{x_i} g^{-1}(x)dx + \sum_i I_i x_i$$

Derivando esta expresión para W simétrica se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_i \frac{dx_i}{dt}\left(\sum_j w_{ij}x_j - \frac{u_i}{R_i} + I_i\right)$$

$$= -\sum_i C_i \frac{du_i}{dt}\frac{dx_i}{dt}$$

$x_i = g(u_i) \rightarrow \dfrac{dx_i}{dt} = g'(u_i)\dfrac{du_i}{dt}$, luego

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_i C_i g'(u_i)\left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 \leq 0$$

siempre que $C_i > 0$ y $g(u_i)$ función monotónicamente creciente.

Además $\dfrac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \dfrac{dx_i}{dt} = 0 \quad \forall i$

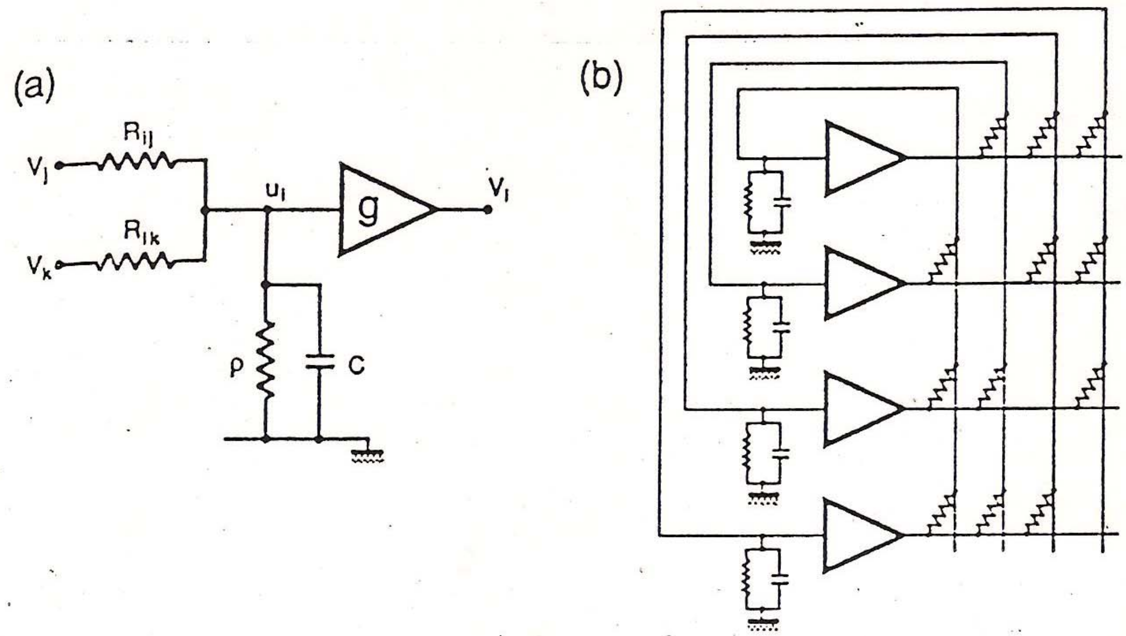


FIGURE 3.5 (a) The circuit described in the text. (b) A network of such circuits.

ρ in parallel with a capacitor C, and the output of unit j is connected to the input of unit i with a resistor R_{ij}. In terms of modelling a real neuron, we can regard ρ and C as the transmembrane resistance and input capacitance respectively.

The circuit equations are

$$C\frac{du_i}{dt} + \frac{u_i}{\rho} = \sum_j \frac{1}{R_{ij}}(V_j - u_i) \tag{3.44}$$

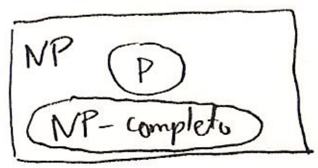
or, equivalently,

$$\tau_i \frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_j w_{ij} g(u_j) \tag{3.45}$$

Optimización Combinatorial

Consideremos sistemas discretos donde hay un número grande pero finito soluciones posibles. Típicamente para un problema de tamaño N se tienen del orden de e^N ó N! posibles soluciones, entre las cuales se desea encontrar aquella que minimiza la función de costos.

<u>Clases de problemas de optimización</u>



P (Polynomial): Existe un algoritmo determinístico que resuelve el problema en un tiempo que crece a lo más polinomialmente con el tamaño N del problema.
P es una subclase de otra clase denominada NP.

NP (Non-deterministic Polynomial) :
Se puede verificar en tiempo polinomial si alguna solución particular es correcta o no. No se conoce solución mejor que la búsqueda exhaustiva de todas las posibilidades.

¿P=NP ? No se sabe, pero lo más probable es que sean distintos.
NP-completo : Subclase de NP. Si se pudiera encontrar un algoritmo determinístico que resuelva un problema NP-completo en tiempo polinomial, entonces se podrían resolver todos los otros problemas NP en tiempo polinomial, es decir P=NP en ese caso.

El problema del vendedor viajero
(Traveling Salesman Problem : TSP)

Un conjunto de N ciudades A,B,C,... están separadas por distancias d_{AB}, d_{AC}, ...,d_{BC},....

El problema consiste en encontrar una gira de viaje que visite cada ciudad sólo una vez y vuelva al punto de partida, recorriendo la mínima distancia.

Una gira define una secuencia B,F,E,G,...,W en la que se visitan las ciudades, y la distancia total recorrida es $d=d_{BF}+d_{FE}+...+d_{WB}$.

El problema es NP-completo. No se conoce solución mejor que probar todas las posibilidades. Hay $\frac{N!}{2N}$ rutas distintas (no importa donde comience la secuencia ni la dirección).

Representación Neuronal

Se consideran N conjuntos independientes de N neuronas. Por ejemplo, 5 ciudades en orden CAEBD se representan como

	1	2	3	4	5
A	0	1	0	0	0
B	0	0	0	1	0
C	1	0	0	0	0
D	0	0	0	0	1
E	0	0	1	0	0

Notación : $x_{z,j}$ donde z es el nombre de la ciudad y j es la posición en la gira.

$$x_{z,j} = \frac{1}{1+e^{-u_{z,j}\lambda}}, \qquad \lambda >> 0$$

Función de energía de Hopfield-Tank

$$E = E1 + E2$$

El término E1 define las soluciones válidas. Sean A,B,C constantes,

$$E1 = \frac{A}{2}\sum_{z}\sum_{i}\sum_{j\neq i} x_{z,i}x_{z,j} + \frac{B}{2}\sum_{i}\sum_{z}\sum_{y\neq z} x_{z,i}x_{y,i} + \frac{C}{2}\left(\sum_{z}\sum_{i}\left(x_{z,i} - N\right)\right)^2$$

=0 ssi cada fila z no contiene más una posición por ciudad.	=0 ssi cada columna i no contiene más de una ciudad en cada posición.	=0 ssi hay N unos en la matriz.

El término E2 define la distancia recorrida

$$E2 = \frac{D}{2}\sum_{z}\sum_{y\neq z}\sum_{i} d_{zy}x_{z,i}\left(x_{y,i+1} + x_{y,i-1}\right)$$

Los subíndices son módulo N, i.e. la ciudad N-ésima es adyacente a (N-1) y a 1, $x_{y,N+j} = x_{y,j}$.

La matriz de pesos implícitamente definida al considerar la funcional de energía de Hopfield es :

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{zy,ij} w_{zi,yj} x_{z,i} x_{y,j} + \sum_{zi} I_{zi} x_{zi}$$

donde

$$w_{zi,yj} = \begin{cases} -A\delta_{zy}(1-\delta_{ij}) & \text{conecc. inhibitorias dentro de cada fila} \\ -B\delta_{ij}(1-\delta_{zy}) & \text{conecc. inhib. dentro de cada columna} \\ \text{-}C & \text{inhibicion global} \\ \text{-}Dd_{zy}(d_{j,i+1}+d_{j,i\text{-}1}) & \text{termino de datos} \end{cases}$$

donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

$$w_{zi,0} = I_{zi} = +CN \qquad \text{entrada externa}$$

Simulaciones

Problema de 10 ciudades.
La especificación de las 10 ciudades se escogió aleatoriamente con probabilidad uniforme en el interior de un cuadrado unitario bi-dimensional.

La red análoga tiene la siguiente ecuación de movimiento :

$$\frac{du_{z,i}}{dt} = -\frac{u_{z,i}}{\tau} + \sum_y \sum_j w_{ziyj} x_{yj} + I_{zi}$$

$$\frac{du_{z,i}}{dt} = -\frac{u_{z,i}}{\tau} - A\sum_{j \neq i} x_{z,j} - B\sum_{y \neq z} x_{y,i} - C\left(\sum_z \sum_j x_{z,j} - N\right)$$

$$- D\sum_y d_{zy}\left(x_{y,i+1} + x_{y,i-1}\right)$$

$$x_{z,i} = g(u_{z,i}) = \frac{1}{2}\left(1 + tanh\left(u_{z,i} / u_0\right)\right) = 1\Big/\left[1 + \exp\left(-{}^{2u_{inic}}\!\big/_{u_0}\right)\right] \qquad \forall z, i$$

$$u_{inic} = u_0 + \delta u_{inic},$$

$$-0.1u_0 \leq \delta u_{inic} \leq 0.1u_0$$

Parámetros A=B=500, C=200, D =500, u_0 =0.02, τ=1.

Hay 10!/20= 181.440 trayectorias posibles. En 16 de 20 simulaciones se convergió a giras legítimas. En aproximadamente el 50% de los casos se produjo una de las 2 rutas más cortas.

Contribución : Técnica general de minimización de energía sumada a las redes neuronales pueden encontrar soluciones aproximadas a problemas NP-completos.

Circuitos paralelos de unidades simples pueden resolver difíciles problemas de optimización combinatorial.

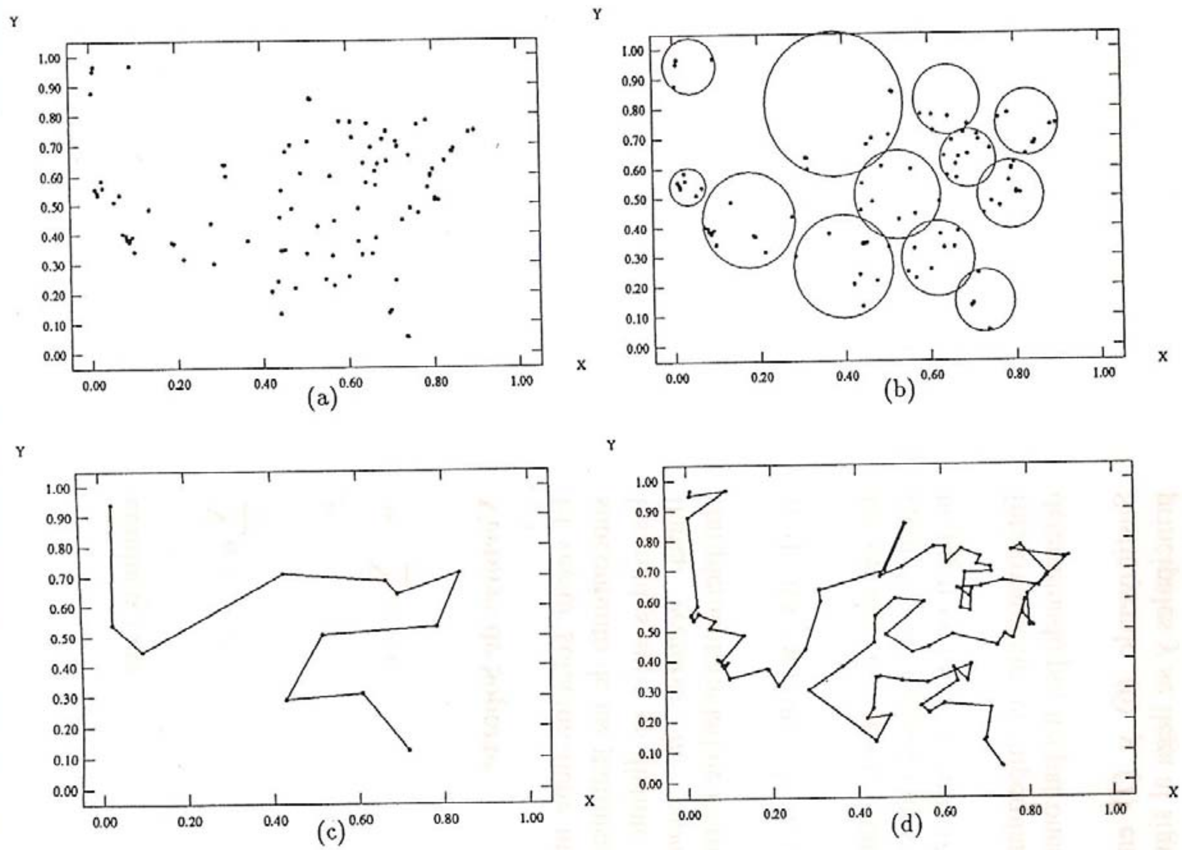


Figure 3: (a) 100 US cities, (b) 100 US broken up into 12 groups, (c) centroid tour of city groups (12 groups), and (d) final tour of 100 US cities.