

#### 4. DEMOSTRACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN

##### Problema básico

Sea

$$y(t) = C x + v. \quad (FK51)$$

$$y \in \mathfrak{R}^m, x \in \mathfrak{R}^n, v \in \mathfrak{R}^m$$

son vectores de: medidas, estado y ruido de medida.

$v$  es un proceso estocástico vectorial de RBD (para cada  $t$  sus componentes son V.A. ) Las componentes de  $v$  sólo pueden estar correlacionadas entre sí para un mismo  $t$ , pero no para instantes diferentes. La matriz de covarianza es

$$E \left[ (v(t) - \bar{v})(v(t) - \bar{v})^T \right] \equiv V(t) \quad (FK52)$$

$$\bar{v} = 0$$

$$E[v_i(t_1) v_j(t_2)] = 0$$

para  $t_1 \neq t_2$  y para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Ejemplo: Sea

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + v$$

Entonces, deseamos estimar  $x$  en forma óptima (según algún criterio de optimización) por medio de un estimador  $\hat{x}$  si medimos  $y$ .

En el caso general, sea el criterio de optimización:

**Encontrar  $\hat{x}$  tal que  $\hat{x}$  minimice la función de costo**

$$J = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{x} - \hat{x}')^T P'^{-1} (\hat{x} - \hat{x}') + [y - C \hat{x}]^T V^{-1} [y - C \hat{x}] \right\}$$

(FK53)

donde:

- $\hat{x}'$  = estimación *a priori* de  $x$ , es decir, antes de conocer la medición  $y$ . La estimación  $\hat{x}'$  se supone conocida (más adelante será determinada por procedimientos recursivos).

- $P' = E \left[ (x - \hat{x}') (x - \hat{x}')^T \right]$  (FK54)

es la matriz de covarianza del error de estimación a priori  $\hat{x}'$ , antes de medir  $y$ , dado por

$$e' = x - \hat{x}' \quad (FK55)$$

error de estimación de  $\mathbf{x}$  antes de tomar en cuenta la medición de  $\mathbf{y}$

Ejemplo:

Sea  $x \in \mathfrak{R}^2$  y

$$P' = \begin{bmatrix} P'_1 & 0 \\ 0 & P'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \left\{ (x_1 - \hat{x}'_1)^2 \right\} & 0 \\ 0 & E \left\{ (x_2 - \hat{x}'_2)^2 \right\} \end{bmatrix}$$

El primer término de  $\mathbf{J}$  es

$$(\hat{x} - \hat{x}')^T P'^{-1} (\hat{x} - \hat{x}') = \frac{(\hat{x}_1 - \hat{x}'_1)^2}{P'_1} + \frac{(\hat{x}_2 - \hat{x}'_2)^2}{P'_2}$$

Mientras más incierta sea la estimación  $\hat{x}'_i$  mayor será el error medio cuadrático  $P'_i$  con lo cual se pesará menos el término correspondiente en la optimización c/r a  $\hat{x}_i$ . (Este es un procedimiento standard en estimaciones estadísticas).

Si  $J$  sólo consistiera en este término es obvio que  $\hat{x}$  óptimo es tal que

$$\hat{x} = \hat{x}' \quad (J=0)$$

o sea que la mejor estimación es la que ya teníamos:  $\hat{x}'_i$  porque no hay la nueva información dada por el conocimiento de  $y$ .

El 2º término de  $J$  es:

$$\frac{1}{2} \left[ (y - C\hat{x})^T V^{-1} (y - C\hat{x}) \right]$$

Como  $\bar{v} = 0$ ,

$$E[y] = C E(x) + 0,$$

$$\bar{y} = C \bar{x}$$

sería el estimador óptimo de  $y$  si no se conocieran las medidas  $M_k$  hasta  $k$ . Pero, dado  $M_k$ , la estimación óptima de  $y$  es (ver caso de estimación general en capítulo de Procesos estocásticos):

$$\hat{y} = E[y | M_k] = C E[x | M_k] + E[v | M_k]$$

y si  $\mathbf{v}$  es independiente de  $M_k$ ,

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}},$$

con lo cual

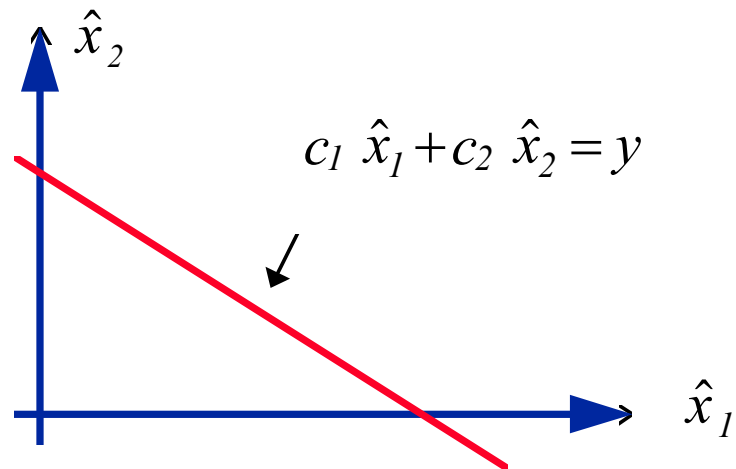
$$\mathbf{y} - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$$

es el error de estimación de la medida  $\mathbf{y}$ .

Si  $\mathbf{J}$  sólo tuviera el 2º término, el  $\hat{\mathbf{x}}$  óptimo estaría dado por

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}$$

$\mathbf{J} = 0$ , y si  $\mathbf{C}$  no es invertible, no hay solución única.



Estimación usando sólo el segundo término de  $\mathbf{J}$  si se conoce  $y$ .

Hay un subespacio de soluciones  $\hat{x}$  que satisfacen

$$\mathbf{C} \hat{x} = y_o$$

para cada medida  $y = y_o$ .

$$y - \mathbf{C} x = v$$

$$E [v v^T] = E [(y - \mathbf{C} x)(y - \mathbf{C} x)^T] = V$$

es la matriz de covarianza del ruido de medida. Si el ruido es grande los

$\sigma_{vi}^2$  serán grandes y la correspondiente ponderación en  $\mathbf{J}$  será más pequeña.

Por ejemplo: Sea

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{v1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v2}^2 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{v1}^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_{v2}^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}[(y - C \hat{x})V^{-1}(y - C \hat{x})] =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_1 - c_{11} \hat{x}_1 - c_{12} \hat{x}_2 \\ y_2 - c_{21} \hat{x}_1 - c_{22} \hat{x}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_{v1}^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_{v2}^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - c_{11} \hat{x}_1 - c_{12} \hat{x}_2 \\ y_2 - c_{21} \hat{x}_1 - c_{22} \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\left( y_1 - [c_{11} \hat{x}_1 + c_{12} \hat{x}_2] \right)^2}{\sigma_{v1}^2} + \frac{\left( y_2 - [c_{21} \hat{x}_1 + c_{22} \hat{x}_2] \right)^2}{\sigma_{v2}^2} \right]$$

$$\hat{y}_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$$

$$\hat{y}_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$$

### Determinación del estimador óptimo.

Para minimizar  $J$  con respecto a  $\hat{x}$  usamos la condición necesaria  $dJ = 0$ .

$$dJ = d\hat{x}^T \left[ P'^{-1} (\hat{x} - \hat{x}') - C^T V^{-1} (y - C \hat{x}) \right] = 0 \quad (FK56)$$

Como  $dJ$  debe ser 0  $\forall d\hat{x}^T$  alrededor del  $\hat{x}$  óptimo,

$$P'^{-1} (\hat{x} - \hat{x}') = C^T V^{-1} (y - C \hat{x}) \quad (FK57)$$

Problema FK10A: Demostrar que la condición necesaria es la indicada y que ello implica la ecuación precedente (Sugerencia: vector en  $\Re^n$  ortogonal a una base).

Expandiendo, sumando y restando un término y luego despejando  $\hat{x}$ , (Ejercicio: Demostrar)

$$\begin{aligned} \left[ P'^{-1} + C^T V^{-1} C \right] \hat{x} &= P'^{-1} \hat{x}' + C^T V^{-1} y + \\ &+ C^T V^{-1} C \hat{x}' - C^T V^{-1} C \hat{x}' \end{aligned}$$

$$\hat{x} = \hat{x}' + \underbrace{\left[ P'^{-1} + C^T V^{-1} C \right]^{-1} C^T V^{-1}}_{\text{Matriz de Ganancia de la corrección}} \underbrace{(y - C \hat{x}')}_{\text{error de predicción (a priori) de la medida}}$$

Diagram illustrating the Kalman filter equation and its components:

- Green box:** estimación antes de considerar la medida  $y$  (points to  $\hat{x}'$ )
- Red box:** estimación considerando la medida  $y$  (points to  $\hat{x}$ )
- Blue box:** Matriz de Ganancia de la corrección (points to the gain matrix term)
- Black box:** error de predicción (a priori) de la medida (points to the residual term)

**(FK58)**

*Se ve que el estimador adquiere una forma que está de acuerdo con nuestra intuición.*

Sea

$$P \equiv \left[ P'^{-l} + C^T V^{-l} C \right]^{-l} \quad (FK59)$$

Entonces:

$$\hat{x} = \hat{x}' + \underbrace{P C^T V^{-l}}_{\Gamma} (y - C \hat{x}')$$

y el estimador de  $\mathbf{x}$  es

$$\hat{x} = \hat{x}' + \Gamma (y - C \hat{x}') \quad (FK59)$$

$$\Gamma = P C^T V^{-l} \quad (FK60)$$

Esta es la ecuación básica de la estimación.  
obtener de aquí el Filtro de Kalman.

Queda sólo un paso para

### El Filtro de Kalman

Sea en la ecuación básica de estimación,

$$\hat{x} = \hat{x}_{k|k} = \hat{x}_k \quad (FK61)$$

$$\hat{x}' = \hat{x}_{k|k-1} = \text{estimación de } x \text{ desde } k-1 \\ \text{antes de tener la medición " } y_k \text{ " } \quad (FK62)$$

$$y = y_k = \text{medida en " } k \text{ " } \quad (FK63)$$

Entonces:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + \Gamma \left( y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1} \right) \quad (FK64)$$

De esta forma,

$$P' = E \left[ \begin{array}{c} (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \\ \downarrow \\ x \end{array} \begin{array}{c} (x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T \\ \downarrow \\ \hat{x}' \end{array} \right] = P_{k|k-1} \quad (FK65)$$

resulta ser la matriz de covarianza del error de estimación a priori (FK10).

De (FK59),

$$P^{-1} = P'^{-1} + C^T V^{-1} C,$$

y postmultiplicando por  $P'$  y luego premultiplicando por  $P$ ,

$$P' = P + P C^T V^{-1} C P',$$

$$P = [I - P C^T V^{-1} C] P'$$

y por (FK60),

$$P = [I - \Gamma C] P' \tag{FK66}$$

y, de (FK65),

$$P = [I - \Gamma C] P_{k|k-1} \tag{FK67}$$

Ahora vamos a demostrar que  $\mathbf{P}$  corresponde a (FK4):

$$P = P_k = P_{k|k} = E \left\{ \left( \hat{x}_{k/k} - x_k \right) \left( \hat{x}_{k/k} - x_k \right)^T \right\} \tag{FK68}$$

o

$$P = P_k = E\{e_k e_k^T\}$$

donde

$$e_k = \hat{x}_k - x_k = \text{error de estimación}$$

Demostración:

$$e_k = \hat{x}'_k - x_k + \hat{x}_k - \hat{x}'_k$$

$$\hat{x}'_k = \hat{x}_{k|k-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + \Gamma_k (y_k - C_k \hat{x}'_k)$$

$$\hat{x}_k - \hat{x}'_k = \Gamma_k [C_k x_k + v_k - C_k \hat{x}'_k]$$

$$\hat{x}_k - \hat{x}'_k = \Gamma_k v_k + \Gamma_k C_k (x_k - \hat{x}'_k)$$

$$e_k = \hat{x}'_k - x_k + \hat{x}_k - \hat{x}'_k$$

$$e_k = \hat{x}'_k - x_k + \Gamma_k v_k + \Gamma_k C_k (x_k - \hat{x}'_k)$$

$$e_k = [I - \Gamma_k C_k](\hat{x}'_k - x_k) + \Gamma_k v_k$$

(FK69)

### Problema FK11A

Demostrar que si, por hipótesis,  $V_k$  es independiente de  $\mathcal{W}_{k-1}$ , entonces

- (i)  $x_k$  es independiente de  $V_k$  y
- (ii)  $\hat{x}_{k|k-1} = \hat{x}'_k$  es independiente de  $V_{k-1}$

Por (FK69)

$$e_k = [I - \Gamma_k C_k](\hat{x}'_k - x_k) + \Gamma_k v_k \quad (\text{FK 69})$$

$$E \{e_k e_k^T\} = E \left\{ [I - \Gamma_k C_k](\hat{x}'_k - x_k)(\hat{x}'_k - x_k)^T [I - \Gamma_k C_k]^T \right\} + E \{ \Gamma_k v_k v_k^T \Gamma_k^T \}$$

De aquí,

$$E\{e_k e_k^T\} = \underbrace{\left[ I - \Gamma_k C_k \right] P_{k|k-1} \left[ I - \Gamma_k C_k \right]^T}_{P_k} + \Gamma_k V_k \Gamma_k^T$$

por (FK67)

$$\begin{aligned} E\{e_k e_k^T\} &= P_k \left[ I - \Gamma_k C_k \right]^T + \Gamma_k V_k \Gamma_k^T = \\ &= P_k - P_k C_k^T \Gamma_k^T + \Gamma_k V_k \Gamma_k^T \end{aligned}$$

Pero de (FK60),

$$\Gamma = P C^T V^{-1} \quad (\text{FK60})$$

$$\Gamma_k = P_k C_k^T V_k^{-1},$$

y, además,

$$P_k = P_k^T \quad y \quad V_k = V_k^T,$$

por lo que

$$E\{e_k e_k^T\} = P_k - \cancel{P_k C_k^T V_k^{-1} C_k P_k} + \cancel{P_k C_k^T V_k^{-1} V_k V_k^{-1} C_k P_k}$$

y

$$E\{e_k e_k^T\} = P_k = P_{k|k} \quad (\text{QED}) \quad (\text{FK70})$$

Es decir

$$P \equiv \left[ P' - I + C^T V^{-1} C \right]^{-1}$$

es la misma  $P$  definida en (FK4):

$$P_k = P_{k|k} = E \left\{ e_k e_k^T \right\}$$

Entonces, de (FK67), con  $\Gamma = \Gamma_k$ , resulta que por la tercera (FK12c). del F.K.,

$$P_{k|k} = P_k = \left[ I - \Gamma_k C_k \right] P_{k|k-1} \quad (FK12c)$$

Queda por demostrar las ecuaciones (FK12a) y (FK12b)

**Demostración de (FK12a).** La ecuación de estado del sistema es

$$x_k = A_{k-1} x_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1} + w_{k-1} \quad (FK1a)$$

y la predicción de un paso es

$$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} + B_{k-1} u_{k-1} + 0 \quad (FK8)$$

Restando,

$$x_k - \hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1}) + w_{k-1}$$

y como

$$P_{k|k-1} \equiv E \left\{ \left( \hat{x}_{k|k-1} - x_k \right) \left( \hat{x}_{k|k-1} - x_k \right)^T \right\}, \quad (FK10)$$

$$P_{k|k-1} = A_{k-1} E \left\{ \left( \hat{x}_{k-1} - x_{k-1} \right) \left( \hat{x}_{k-1} - x_{k-1} \right)^T \right\} A_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

*+ Dobles Productos*

Pero los dobles productos resultan nulos porque  $w_k$  es ruido blanco (¡Demostrar!).

Entonces, resulta lo que se quería demostrar:

$$P_{k|k-1} = A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (FK12a)$$

De (FK60), por (FK35) y (FK38) se obtiene (FK12b):

$$\Gamma_k = P_{k|k-1} C_k^T \left[ C_k P_{k|k-1} C_k^T + V_k \right]^{-1} \quad (FK12b)$$

Pero el estimador de estado óptimo  $\hat{x}$  determinado por la matriz  $\Gamma_k$  de las ecuaciones (FK 12), no sólo minimiza la funcional (FK53)

$$J = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{x} - \hat{x}')^T P'^{-1} (\hat{x} - \hat{x}') + [y - C \hat{x}]^T V^{-1} [y - C \hat{x}] \right\}$$

como se ha demostrado, sino que también minimiza la funcional (FK2) que da el error medio cuadrático:

$$J = E \left\{ \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{k/k}^i - x_k^i)^2 \right\} = E \left\{ (\hat{x}_{k/k} - x_k)^T (\hat{x}_{k/k} - x_k) \right\} = E [e_k e_k^T]$$

$$J = E [e_k^T e_k] = \text{tr} \left\{ E [e_k e_k^T] \right\} = \text{tr} \{ P_k \} \quad (FK2)$$

Realicemos la demostración para el caso más simple:

$$\begin{aligned}x_k &= A_{k-1} x_{k-1} \\y_k &= C_k x_k + V_k \\(B_{k-1} &= 0, Q_{k-1} = 0)\end{aligned}$$

El estimador óptimo encontrado está dado por

$$\hat{x}_k = A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + \Gamma_k (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})$$

Pero

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1}$$

con lo que

$$\hat{x}_k = A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + \Gamma_k [C_k x_k V_k - C_k A_{k-1} \hat{x}_{k-1}]$$

con  $e_k = \hat{x}_k - x_k$ , se ha demostrado que

$$P = E [e_k e_k^T]$$

Entonces,

$$e_k = A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + \Gamma_k \left[ \underbrace{C_k x_k + V_k - C_k A_{k-1} \hat{x}_{k-1}}_{C_k A_{k-1} x_{k-1}} \right]$$

y

$$e_k = A_{k-1} e_{k-1} - \Gamma_k C_k A_{k-1} e_{k-1} + \Gamma_k V_k$$

$$e_k = [I - \Gamma_k C_k] A_{k-1} e_{k-1} + \Gamma_k V_k$$

$$e_k^T = e_{k-1}^T A_{k-1}^T [I - C_k^T \Gamma_k^T] + V_k^T \Gamma_k^T$$

$$P_k = E[e_k e_k^T] = E\left\{[I - \Gamma_k C_k] A_{k-1} e_{k-1} e_{k-1}^T A_{k-1}^T [I - C_k^T \Gamma_k^T]\right\}$$

$$+ E\left\{\Gamma_k V_k V_k^T \Gamma_k^T\right\} + E\left\{\text{dobles productos}\right\} = 0$$

$$P_k = [I - \Gamma_k C_k] \underbrace{A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T}_{P_{k|k-1} \text{ por (FK 12 a) ya que } Q_{k-1} = 0} [I - C_k^T \Gamma_k^T] + \Gamma_k V_k V_k^T \Gamma_k^T$$

Expandiendo, se llega a:

$$P_k = P_{k|k-1} - \Gamma_k C_k P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C_k^T \Gamma_k^T + \Gamma_k (C_k P_{k|k-1} C_k^T + V_k) \Gamma_k^T$$

donde

$$S_k S_k^T \equiv C_k P_{k|k-1} C_k^T + V_k$$

es Simétrica y NND

$$P_k = P_{k|k-1} - \Gamma_k C_k P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C_k^T \Gamma_k^T + \Gamma_k S_k S_k^T \Gamma_k^T$$

Sea  $D_k$  una matriz tal que

$$P_k = P_{k|k-1} + (\Gamma_k S_k D_k) (\Gamma_k S_k D_k)^T - D_k D_k^T$$

y veamos cuánto vale  $D_k$

$$P_k = P_{k|k-1} + \Gamma_k S_k S_k^T \Gamma_k^T + \cancel{D_k D_k^T} - \Gamma_k S_k D_k^T - D_k S_k^T \Gamma_k^T - \cancel{D_k D_k^T}$$

Igualando términos:

$$D_k S_k^T = P_{k|k-1} C_k^T$$

$$D_k = P_{k|k-1} C_k^T (S_k^{-1})^T$$

$$\begin{aligned} \text{tr} \{P_k\} &= \text{tr} \{P_{k|k-1}\} + \text{tr} \left\{ (\Gamma_k S_k - D_k) (\Gamma_k S_k - D_k)^T \right\} \\ &\quad - \text{tr} D_k D_k^T \end{aligned}$$

$$\text{tr} [P_k] = E [e_k^T e_k]$$

El mínimo de la  $\text{tr} [P_k]$  c/r a  $\Gamma_k$  (la ganancia de corrección se obtiene minimizando la traza del 2º término, ya que los demás no dependen de  $\Gamma_k$ ).

Por lo tanto,

$$\Gamma_k S_k = D_k$$

y la traza del segundo término es 0 que es el mínimo valor de este término porque es NND.

$$\left\{ \begin{array}{l} x^T M M^T x = (M^T x)^T (M^T x) = \|M^T x\|^2 \\ \text{Si } M \text{ es no singular } \|M^T x\| = 0 \Rightarrow M^T x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right\}$$

Si M es singular o de rango incompleto, por ejemplo  $M = C \in R^{l \times n}$

$$\|C x\| = 0 \Rightarrow C x = 0 \not\Rightarrow x = 0$$

por ejemplo, por ser  $x$  octogonal a  $c$ .

$$\Gamma_k S_k = D_k$$

produce el mínimo de  $\text{tr} \{P_k\}$ :

$$\Gamma_k S_k = P_{k|k-1} C_k^T (S_k^{-1})^T$$

$$\Gamma_k = P_{k|k-1} C_k^T (S_k^{-1})^T S_k^{-1}$$

$$\Gamma_k = P_{k|k-1} C_k^T [S_k^T S_k]^{-1}$$

$$\Gamma_k = P_{k|k-1} C_k^T [C_k P_{k|k-1} C_k^T + V_k]^{-1}$$

En el mismo  $\Gamma_k$  ya determinado (FK 12b). Por lo tanto, es este caso simple (y también resulta en el caso más completo)  $\Gamma_k$  es tal que minimiza  $J$  en (FK2):

$$J = \text{tr} \{ P_k \} = \text{tr} E [ e_k e_k^T ] = E [ e_k^T e_k ]$$

y minimiza el error cuadrático medio total de la estimación del estado  $x_k$ .

Ejercicio : Demostrar esto para el caso general de las ecuaciones de estado - estado/salida (FK 1).

Con esto se completa la demostración del Filtro de Kalman.

### **Resumen de la Demostración del Filtro de Kalman (F.K.)**

**1.-** La funcional de costo a minimizar es:

$$J = \frac{1}{2} [ (\hat{x} - \hat{x}') P'^{-1} (\hat{x} - \hat{x}')^T + (y - C\hat{x}) V^{-1} (y - C\hat{x})^T ]$$

(FK53)

$\hat{x}'$ : estimación a priori (antes de usar el conocimiento de  $y(t)$ ).

Matriz de covarianza del error de estimación a priori

$$P' = E \left\{ (\hat{x}' - x) (\hat{x}' - x)^T \right\} \quad (FK54)$$

Problema:

$$\underset{\hat{x}}{Min} J$$

2.- La minimización de  $J$  con respecto a  $\hat{x}$  da:

$$\hat{x} = \hat{x}' + \underbrace{\left[ \underbrace{P'^{-1} + C^T V^{-1} C}_{\equiv P} \right] C^T V^{-1} (y - C \hat{x}')}_{\Gamma \equiv P C^T V^{-1}} \quad (FK58)$$

$$\hat{x} = \hat{x}' + \Gamma (y - C \hat{x}') \quad (FK58a)$$

3.- Aplicando al sistema lineal con ecuaciones de estado y estado-salida (FK1),

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \Gamma_k (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}) \quad (FK64)$$

$$\Gamma_k = P_k C_k^T V_k^{-1}$$

4.- De

$$P_k = [I - \Gamma_k C_k] P_{k/k-1} \quad (FK12c)$$

se deduce que

$$P_{k|k} = P_k = E\{e_k e_k^T\}$$

$$e_k = \hat{x}_{k/k} - x_k = \hat{x}_k - x_k$$

5.- Por otra parte, de (FK1a) se dedujo que

$$P_{k|k-1} = Q_{k-1} + A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T \quad (FK12a)$$

6.- Después se demostró que

$$\Gamma_k = \left[ P_{k/k-1}^{-1} + C_k V_k^{-1} C_k^T \right]^{-1} C_k^T V_k^{-1} = P_{k|k} C_k^T V_k^{-1}$$

7.- Se demostró también que el estimador óptimo (FK 64) también minimiza la funcional

$$J = E \left[ e_k^T e_k \right] = tr \left\{ E \left[ e_k e_k^T \right] \right\} = tr \left\{ P_k \right\}$$

8.- El Filtro de Kalman se construye con la predicción de un paso

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_{k-1} \quad (FK8)$$

corregida por el error de predicción de la medida  $y_k$ .

Notar que:

$tr P_k$  = error medio cuadrático total de estimación del estado.

$tr P'_k$  = error medio cuadrático total de estimación “a priori” (antes de medir  $y_k$ ) del estado.

Ejercicio: Demostrar que

$$(a) \quad P_k = P_{k/k-1} - P_{k/k-1} C_k^T (C_k P_{k/k-1} C_k^T + V_k)^{-1} C_k P_{k/k-1}$$

$$(b) \quad P_k = [I - \Gamma_k C_k] P_{k/k-1} [I - \Gamma_k C_k]^T + \Gamma_k V_k \Gamma_k^T$$

¿Que ventajas tiene (b) sobre (a) para el calculo de  $P_k$ ?